Open Journal of Mathematics and Physics | Volume 2, Article 193, 2020 | ISSN: 2674-5747
https://doi.org/10.31219/osf.io/zky7e | published: 27 Dec 2020 | https://ojmp.org
HP

[white paper]
Diamond Open Access

Regularização dimensional: como isolar o infinito de uma integral divergente

Colaboração Matemática Aberta[1]

27 de Dezembro de 2020

Resumo

Apresentamos uma adaptação do método da regularização dimensional para isolar o infinito de uma integral divergente.

palavras-chave: regularização dimensional, integral divergente, infinito

A versão mais atualizada deste artigo está disponível em
https://osf.io/zky7e/download

Introdução

1. Em cálculos da **Teoria Quântica de Campos**, é frequente o aparecimento de *integrais divergentes* [1].

2. Para *lidar* com os *infinitos* que aparecem em *integrais* que *divergem*, faz-se a **regularização** [2] e a **renormalização** [3] para que o resultado se torne finito.

[1]Todos os autores com suas afiliações aparecem no final deste artigo.

Regularização

3. *Regularizar* uma *integral* significa reescrevê-la, *isolando o infinito*.

4. A **Regularização Dimensional** [1–3] consiste em converter uma integral de d para $d-\epsilon$ dimensões e, após ter *isolado* o *termo* que *diverge*, tomar o *limite* de $\epsilon \to 0$ [1].

Integral divergente

5. Considere
$$\mathcal{M} = \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{(x^2+a^2)^2}\, dx.$$

6. A integral $\mathcal{M}$ *diverge*.

7. A seguir, iremos adaptar o método (4) apenas para o expoente do integrando, sem alterar a dimensionalidade da integral.

Regularização dimensional

8. Converteremos um dos expoentes de $\mathcal{M}$ de 3 para $3-\epsilon$.

9. Seja
$$\mathcal{M}_\epsilon = \int_0^{+\infty} \frac{x^{3-\epsilon}}{(x^2+a^2)^2}\, dx.$$

10. Assim, temos
$$\mathcal{M} = \lim_{\epsilon \to 0} \mathcal{M}_\epsilon.$$

11. Assumindo $\epsilon > 0$ e consultando uma *tabela de integrais* [4, 5],
$$\mathcal{M}_\epsilon = \frac{1}{2a^\epsilon}\Gamma(\epsilon/2)\Gamma(2-\epsilon/2).$$

12. $\Gamma(z)$ é a função *gamma*.

13. Como $\Gamma(0) \to \infty$, precisaremos manipular $\mathcal{M}_\epsilon$ antes de tomarmos o limite (10).

14. Considere a seguinte expansão [6],

$$\Gamma(z) \approx \frac{1}{z} - \gamma + \mathcal{O}(z).$$

15. $\mathcal{O}(z)$ são termos com ordens de z.

16. $\gamma = 0,577216...$ é a constante de Euler-Mascheroni.

17. Aplicando (14) em (11),

$$\mathcal{M}_\epsilon = \frac{1}{2a^\epsilon}\left(\frac{1}{\epsilon/2} - \gamma\right)\left(\frac{1}{2-\epsilon/2} - \gamma\right) + \mathcal{O}(\epsilon).$$

18. Seja

$$b = \left(\frac{1}{\epsilon/2} - \gamma\right)\left(\frac{1}{2-\epsilon/2} - \gamma\right)$$

19.

$$b = \frac{4}{\epsilon(4-\epsilon)} - \frac{2\gamma}{\epsilon} - \frac{2\gamma}{4-\epsilon} + \gamma^2$$

20. Sabemos que

$$-\frac{4}{\epsilon(\epsilon-4)} = \frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{4-\epsilon}.$$

21. Substituindo (20) em (19),

$$b = \frac{1-2\gamma}{\epsilon} + \frac{1-2\gamma}{4-\epsilon} + \gamma^2.$$

22. Substituindo (21) em (17),

$$\mathcal{M}_\epsilon = \frac{1}{2a^\epsilon}\left(\frac{1-2\gamma}{\epsilon} + \frac{1-2\gamma}{4-\epsilon} + \gamma^2\right) + \mathcal{O}(\epsilon).$$

23.

$$\mathcal{M}_\epsilon = \frac{1-2\gamma}{2a^\epsilon}\left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{4-\epsilon} + c\right) + \mathcal{O}(\epsilon)$$

24. $c = \frac{\gamma^2}{1-2\gamma}$

25. Seja
$$\mathcal{M}_\infty = \frac{(1-2\gamma)}{2a^\epsilon}\frac{1}{\epsilon}.$$

26. Assim,
$$\mathcal{M}_\epsilon = \frac{1-2\gamma}{2a^\epsilon}\left(\frac{1}{4-\epsilon}+c\right)+\mathcal{O}(\epsilon)+\mathcal{M}_\infty.$$

27. Substituindo (26) em (10) e tomando o limite de $\epsilon \to 0$,
$$\mathcal{M} = \frac{1}{8}-\frac{\gamma}{4}-\frac{\gamma^2}{2}+\mathcal{M}_\infty.$$

28. Portanto, o termo **finito** de (5) vale
$$\mathcal{M}_{\text{finito}} = \frac{1}{8}-\frac{\gamma}{4}-\frac{\gamma^2}{2}.$$

Considerações Finais

29. É possível *isolar* o termo *infinito* de uma *integral divergente* com uma adaptação do método da **regularização dimensional**, conforme mostramos neste artigo.

Ciência Aberta

O **arquivo latex** para este artigo, juntamente com outros *arquivos suplementares*, estão disponíveis em [7].

Referências

[1] Kraus, Per, and David J. Griffiths. "Renormalization of a model quantum field theory." *American Journal of Physics* 60.11 (1992): 1013-1023.

[2] Veltman, Martinus. "Regularization and renormalization of gauge fields." *Nuclear Physics B* 44.1 (1972): 189-213.

[3] t Hooft, Gerardus. "Dimensional regularization and the renormalization group." *Nuclear Physics B* 61.CERN-TH-1666 (1973): 455-68. https://cds.cern.ch/record/880603/files/CM-P00060417.pdf

[4] Apostol, Tom M. Calculus, Vol 2. John Wiley & Sons, 1969. 2nd ed., p. 411.

[5] Gradshteyn, Izrail Solomonovich, and Iosif Moiseevich Ryzhik. *Table of integrals, series, and products*. Academic press, 2014.

[6] Ryder, Lewis H. *Quantum field theory*. Cambridge university press, 1996.

[7] Lobo, Matheus P. "Open Journal of Mathematics and Physics (OJMP)." *OSF*, 21 Apr. 2020. https://doi.org/10.17605/osf.io/6hzyp

Colaboração Matemática Aberta

Matheus Pereira Lobo (autor principal, mplobo@uft.edu.br)[1,2]
https://orcid.org/0000-0003-4554-1372

[1]Universidade Federal do Tocantins (Brasil)
[2]Universidade Aberta (UAb, Portugal)