Equação de Choquard: Existência de Solução de Energia Mínima

Colaboração Matemática Aberta*

10 de fevereiro de 2022

Resumo

Neste trabalho, apresentamos um estudo sobre a existência de solução de energia mínima via método de Nehari para uma classe de problemas não locais envolvendo potenciais limitados ou ilimitados.

Palavras-chave: Equação de Choquard. Sequência de Cerami. Variedade de Nehari.

Introdução

1. O objetivo aqui é mostrar a existência de solução mínima via método de Nehari.
2. Note a seguinte equação de Choquard não linear

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{Q(y)F(u(y))}{|x-y|^\mu} dy \right) Q(x)f(u(x)) \\ u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

onde $N \geq 3$, $0 < \mu < N$, $V \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N, [0, +\infty))$, $Q \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N, (0, +\infty))$, $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e $F(t) = \int_0^t f(s)ds$.

*Todos os autores com suas afiliações aparecem no final deste artigo.

3. O funcional energia para o problema (2) é definido por

$$\begin{aligned}\Phi(u) = & \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla u|^2 + V(x)u^2] dx \\ & - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{Q(x)Q(y)F(u(x))F(u(y))}{|x-y|^\mu} dx dy.\end{aligned}$$

4. Propriedades sobre os potenciais V e Q :

(Q1) $V(x), Q(x) > 0$, $V \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ e $Q \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$.

(Q2) Se $\{A_n\} \subset \mathbb{R}^N$ é uma sequência do conjunto de Borel, tal que a medida de Lebesgue para A_n é menor do que δ , $\forall n$ e algum $\delta > 0$, então

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{A_n \cap B_r^c(0)} [Q(x)]^{\frac{2N}{2N-\mu}} dx = 0, \text{ uniformemente em } n \in \mathbb{N}.$$

(Q3) $\frac{Q}{V} \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

(Q4) Existe $p \in (2, 2^*)$ tal que

$$\frac{[Q(x)]^{\frac{2N}{2N-\mu}}}{[V(x)]^{\frac{2^*-p}{2^*-2}}} \longrightarrow 0, \quad |x| \rightarrow +\infty.$$

5. Vamos assumir as seguintes hipóteses sobre a não linearidade da função f :

(F0) Se $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(t)}{|t|^{(2N-\mu)/N}} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{|t| \rightarrow +\infty} \frac{F(t)}{|t|^{(2N-\mu)/(N-2)}} = 0.$$

Então, existe uma constante $C_0 > 0$ tal que

$$|tf(t)| \leq C_0 \left(|t|^{(2N-\mu)/N} + |t|^{(2N-\mu)/(N-2)} \right), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

$$(F1) \quad \lim_{|t| \rightarrow +\infty} \frac{F(t)}{|t|} = +\infty.$$

$$(F2) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(t)}{|t|^{\frac{2N-\mu}{N}}} = 0, \text{ se está em (Q3); ou } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(t)}{|t|^{\frac{p(2N-\mu)}{2N}}} = 0, \text{ se está em (Q4).}$$

$$(F3) \quad \lim_{|t| \rightarrow +\infty} \frac{F(t)}{|t|^{\frac{2N-\mu}{N-2}}} = +\infty, \text{ se (Q3) é válido; ou } \lim_{|t| \rightarrow +\infty} \frac{F(t)}{|t|^{\frac{p(2N-\mu)}{2N}}} < +\infty, \text{ se (Q4) é válido.}$$

$$(F4) \quad f(t) \text{ é não-decrescente em } \mathbb{R}.$$

6. Ressaltamos que $(2N-\mu)/(N-2)$ e $(2N-\mu)/N$ são, respectivamente, expoentes críticos superior e inferior.

Regularidade do Funcional Φ

7. **Desigualdade de Hardy-Littlewood-Sobolev:** Sejam $t, r > 1$ e $0 < \mu < N$ com $1/t + 1/r + \mu/N = 2$, $g \in L^t(\mathbb{R}^N)$, $h \in L^r(\mathbb{R}^N)$. Então existe uma constante $C(t, N, \mu, r)$ independente de g e h , tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{g(x)h(y)}{|x-y|^\mu} dx dy \leq C(t, N, \mu, r) \|g\|_t \|h\|_r.$$

8. A desigualdade de Hardy-Littlewood-Sobolev, a Estimativa do Potencial de Riesz e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, essencialmente, nos ajudam a mostrar que Φ está bem definido e de $\mathcal{C}^1(H^1(\mathbb{R}^N); \mathbb{R})$.

Solução de Energia Mínima Via Método de Nehari

9. Defina o conjunto de Nehari por

$$\mathcal{N} := \{u \in E \setminus \{0\} : \langle \Phi'(u), u \rangle = 0\} \neq \emptyset.$$

Lema 1

10. Suponha que $(V, Q) \in \mathcal{K}$ e f satisfaz (F2) e (F3).

11. Então

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{Q(x)Q(y)F(u(x))F(u(y))}{|x-y|^\mu} dx dy \right| < +\infty, \quad \forall u \in E,$$

e para $u \in E$, existe $\mathcal{C}_1 > 0$ tal que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{Q(x)Q(y)F(u(x))f(u(y))v(y)}{|x-y|^\mu} dx dy \right| < \mathcal{C}_1 \|v\|, \quad \forall v \in E.$$

12. Além disso, se $\{u_n\} \subset E$ for uma sequência tal que $u_n \rightharpoonup u$ em E , então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{Q(x)Q(y) [F(u_n(x))F(u_n(y)) - F(u(x))F(u(y))]}{|x-y|^\mu} = 0$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{Q(x)Q(y)F(u_n(x))f(u_n(y)) [u_n(y) - u(y)]}{|x-y|^\mu} = 0.$$

13. Propriedades Adicionais:

$$f(\tau) \geq 0, \text{ se } \tau \geq 0; \quad f(\tau) \leq 0, \text{ se } \tau \leq 0;$$

$$f(\tau)\tau \geq \int_0^\tau f(t)dt = F(\tau) \geq 0, \quad \forall \tau \in \mathbb{R};$$

$$F(t) \geq 0, \quad \forall t \geq 0.$$

14. Além disso, $\frac{F(\tau)}{\tau}$ é uma função monótona não-decrescente em $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.
15. A partir de agora, iremos enunciar alguns resultados que usamos no decorrer do trabalho. Para o leitor interessado nas demonstrações, referimos [2].
16. Suponha que (F2) e (F4) são válidos.
17. Então, para todo $t \geq 0$ e $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}$;

$$g(t, \tau_1, \tau_2) := F(t\tau_1)F(t\tau_2) - F(\tau_1)F(\tau_2) \\ + \frac{1-t^2}{2} [F(\tau_1)f(\tau_2)\tau_2 + F(\tau_2)f(\tau_1)\tau_1] \geq 0.$$

18. Suponha que $(V, Q) \in \mathcal{K}$ e f satisfaz (F2)-(F4).
19. Então,

$$\Phi(u) \geq \Phi(tu) + \frac{1-t^2}{2} \langle \Phi'(u), u \rangle; \quad \forall u \in E, t \geq 0.$$

20. Lembre-se que

$$\langle \Phi'(u), v \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} [\nabla u \cdot \nabla v + V(x)uv] dx \\ - \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{Q(x)Q(y)F(u(x))f(u(y))v(y)}{|x-y|^\mu} dx dy.$$

21. Suponha que $(V, Q) \in \mathcal{K}$ e f satisfaz (F2)-(F4).
22. Então,

$$\Phi(u) = \max_{t \geq 0} \Phi(tu), \quad \forall u \in \mathcal{N}.$$

23. Suponha que $(V, Q) \in \mathcal{K}$ e f satisfaz (F1)-(F4).
24. Então, para qualquer $u \in E \setminus \{0\}$, existe um único $t_u > 0$, tal que $t_u u \in \mathcal{N}$.
25. Para compreender (24), observe o gráfico abaixo:

Figura 1: Existência de projeção única.

26. Suponha que $(V, Q) \in \mathcal{K}$ e f satisfaz (F1)-(F4).
27. Então,
- $$\inf_{u \in \mathcal{N}} \Phi(u) := m = \inf_{u \in E \setminus \{0\}} \max_{t \geq 0} \Phi(tu) > 0.$$
28. Sejam X um espaço de Banach e Φ um funcional $\mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$.
29. Dizemos que $\{u_n\}$ é uma sequência de Cerami no nível m , quando
- $$\Phi(u_n) \rightarrow m, \quad (1 + \|u_n\|) \|\Phi'(u_n)\| \rightarrow 0.$$
30. Além disso, Φ satisfaz a condição de Cerami quando qualquer sequência de Cerami admite subsequência convergente.

31. O nível m é atingido por uma função não negativa, ou seja, existe $u \in \mathcal{N}$; $u(x) \geq 0$ q.t.p em $\mathbb{R}^N$ de modo que

$$\Phi(u) = m.$$

32. Suponha que $(V, Q) \in \mathcal{K}$ e f satisfaz (F1)-(F4).

33. Então existe uma constante $c_* \in (0, m]$ e uma sequência $\{u_n\} \subset E$ satisfazendo

$$\Phi(u_n) \rightarrow c_*, \quad \|\Phi'(u_n)\| (1 + \|u_n\|) \rightarrow 0.$$

34. **Demonstração:** Seja $m = \inf_{u \in \mathcal{N}} \Phi(u)$.

35. Neste caso, podemos pegar uma sequência $\{v_k\} \in \mathcal{N}$ de modo que

$$m \leq \Phi(v_k) < m + \frac{1}{k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

36. Segue-se que $\Phi(u) \geq \delta_0 > 0$, $\forall u \in S_{\rho_0} = \{u \in E : \|u\| = \rho_0\}$.

37. A geometria do Passo da Montanha garante que existe $\{u_{k,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\Phi(u_{k,n}) \rightarrow c_k, \quad \|\Phi'(u_{k,n})\| (1 + \|u_{k,n}\|) \rightarrow 0, \quad k \in \mathbb{N} \text{ e } n \rightarrow +\infty.$$

38. Note que $c_k \in \left[\delta_0, \sup_{t \geq 0} \Phi(tv_k) \right]$.

39. Logo, podemos escolher uma outra sequência $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$ tal que

$$\Phi(u_{k,n_k}) \in \left[\delta_0, m + \frac{1}{k} \right], \quad \|\Phi'(u_{k,n_k})\| (1 + \|u_{k,n_k}\|) < \frac{1}{k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

40. Portanto, tomando $u_k = u_{k,n_k}$, $k \in \mathbb{N}$, obtemos

$$\Phi(u_k) \rightarrow c_* \in [\delta_0, m], \quad \|\Phi'(u_k)\| (1 + \|u_k\|) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow +\infty.$$

41. Isso finaliza a demonstração.

42. Suponha que $(V, Q) \in \mathcal{K}$ e f satisfaz (F1)-(F4).

43. Então, a sequência $\{u_n\} \subset E$ satisfazendo

$$\Phi(u_n) \rightarrow c \geq 0, \quad \langle \Phi'(u_n), u_n \rangle \rightarrow 0$$

é limitada em E .

Teorema:

44. Suponha que $(V, Q) \in \mathcal{K}$ e f satisfaz (F1)-(F4).

45. Então (2) tem uma solução de energia mínima $\bar{u} \in E$ tal que

$$\Phi(\bar{u}) = \inf_{\mathcal{N}} \Phi > 0.$$

46. **Demonstração:** (31), (33) e (43) fornecem uma sequência limitada $\{u_n\} \subset E$.

47. Passando para uma subsequência, o Teorema de Banach-Alaoglu assegura que $u_n \rightharpoonup u$ em E .

48. Dessa forma, obtemos

$$\|u_n - u\|^2 = o_n(1).$$

49. A equação (48) garante que $u_n \rightarrow u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$.

50. Além disso,

$$\|\Phi'(u_n)\| \leq \frac{\varepsilon}{1 + \|u_n\|} \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0.$$

51. Pela arbitrariedade de $\varepsilon > 0$, temos que

$$\Phi'(u) = 0 \Leftrightarrow \Phi'(u)h = 0, \quad \forall h \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

52. Logo, $\Phi(u) = c_* \in (0, m]$.

53. Assim, dado $u \in \mathcal{N}$, segue que $\Phi(u) \geq m$ e $\Phi(u) \leq m$.

54. Isso implica que

$$\Phi(u) = m > 0, \quad \forall u \in E.$$

55. Portanto, $u \in E$ é uma solução de energia mínima para (2).

Considerações Finais

56. Assim fica provado o teorema desejado.

Ciência Aberta

O **arquivo tex** para este artigo, juntamente com outros *arquivos suplementares*, estão disponíveis em [4].

Referências

- [1] CHEN, S.; YUAN, S. Ground state solutions for a class of Choquard equations with potential vanishing at infinity, J. Math. Appl. 463: 880-894, 2018.
- [2] Lima, E. D. Equação de Choquard: existência de soluções de energia mínima para uma classe de problemas não locais envolvendo potenciais limitados ou ilimitados, dissertação de mestrado, UFG, Goiânia, 2020.
- [3] BADIALE, M.; SERRA, E. Semilinear Elliptic Equations for Beginners. British Library Cataloguing in Publication Data, 2011.
- [4] Lobo, Matheus P. “Simple Guidelines for Authors: Open Journal of Mathematics and Physics.” *OSF Preprints*, 15 Nov. 2019. <https://doi.org/10.31219/osf.io/fk836>.

Colaboração Matemática Aberta

Eduardo Dias Lima

(autor principal, duardo.dias16@hotmail.com)^{1,2}