[white paper]

Diamond Open Access

Propriedades Reais: algoritmo de aprendizagem

Colaboração Matemática Aberta¹

13 de Abril de 2022

Resumo

Neste artigo apresentamos algumas propriedades dos números reais por meio de um algoritmo de aprendizagem.

palavras-chave: números reais, matemática, algoritmo de aprendizagem

A versão mais atualizada deste artigo está disponível em

<https://osf.io/y452t/download>

<https://zenodo.org/record/6367822>

Preâmbulo

1. *Ter ou não inclusão social (via escola/universidade) é uma decisão dos educadores e suas autoridades. (parafraseando Luckesi, 2018) [1]*

Introdução

2. algoritmo = *conjunto de diretrizes; receita; instruções*

¹Todos os autores com suas afiliações aparecem no final deste artigo.

3. Um **algoritmo de aprendizagem** consiste em um material didático-pedagógico que permite *compreender o ponto de partida e progredir a partir de pequenos saltos de aprendizagem* [1].
4. O *foco* de um *algoritmo de aprendizagem* deve ser na *aprendizagem necessária* e no empreendimento de *um conteúdo/habilidade por vez* [1, 2].
5. Por *aprendizagem necessária*, queremos dizer ensinar o estritamente necessário, isto é, não precisa ensinar nem a mais, nem a menos.
6. **pequenos saltos** = *um conteúdo/habilidade por vez*

Pré-requisitos

7. [3–5]

Algoritmo de Aprendizagem

8. Deixamos propositalmente espaços em branco neste *white paper* para que ele possa ser preenchido com anotações e cálculos extras durante seu estudo.

Algumas definições

9. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$.
10. A palavra **comutatividade** está associada com comutar, que significa *realizar troca ou permuta de*.
11. **Associatividade** vem de associar; *associe* essa palavra com o símbolo de *parêntesis* ().
12. Justaposição: ab é o mesmo que $a \cdot b$, que significa a vezes b .

13. É comum não escrevermos o símbolo de multiplicação ($\cdot$) quando não causar ambiguidade.
14. Lembre-se que quando não aparece nada do lado esquerdo de um número real, na verdade temos

$$2 = +2 = +1 \cdot 2.$$

15. O item (14) é para lembrar que nem sempre colocamos o sinal positivo à esquerda de um número e, também, que o número 1 está multiplicando todos os números já que essa multiplicação por 1 não altera o resultado final.

Propriedades dos números reais

16. Vamos começar com exemplos para prosseguir, então, com resultados mais gerais, isto é, na forma literal (usando letras).
17. Quando generalizamos um resultado utilizando letras quer dizer que ele é válido para qualquer valor de um dado conjunto.
18. *Aqui* estamos considerando o **conjunto** dos **números reais**.

Comutatividade da Soma

19. comutatividade da soma = *trocar a ordem da soma*

20. Exemplo

$$\underbrace{2 + 3}_5 = \underbrace{3 + 2}_5$$

21. Caso geral ($a, b \in \mathbb{R}$)

$$a + b = b + a$$

22. O *resultado* (21) vale, também, para *números negativos*.

23.

$$\underbrace{-4 + 5}_1 = \underbrace{+5 - 4}_1$$

24.

$$\underbrace{-1 - 2}_{-3} = \underbrace{-2 - 1}_{-3}$$

Comutatividade do Produto

25. comutatividade do produto = *trocar a ordem da multiplicação*

26.

$$\underbrace{2 \cdot 3}_6 = \underbrace{3 \cdot 2}_6$$

27.

$$ab = ba$$

28. O *resultado* (27) vale, também, para *números negativos*.

29. Ao operar com números negativos, temos que colocar os *parêntesis* para indicarmos que se trata de uma *multiplicação*.

30.

$$\underbrace{(-4)(+5)}_{(-) \cdot (+) \cdot 4 \cdot 5} = \underbrace{(+5)(-4)}_{(+)(-) \cdot 5 \cdot 4}$$

$-20 \qquad \qquad \qquad -20$

31. Na multiplicação envolvendo números negativos, é interessante primeiro multiplicar os sinais, depois multiplicar os números “sem sinal”,

$$(-2) \cdot (+3) = (-) \cdot (+) \cdot 2 \cdot 3 = -6.$$

32.

$$\underbrace{(-1)(-2)}_{+2} = \underbrace{(-2)(-1)}_{+2}$$

Soma com números negativos

33. Note que

$$2 - 1 = 2 + (-1),$$

por isso a subtração pode ser vista como uma soma com um número negativo.

34. Quando a soma é feita com dois números negativos, mantém-se o sinal negativo,

$$-1 - 2 = -3.$$

35. Quando a soma é feita entre dois números com sinais opostos, mantém-se o sinal do maior número.

36. Neste caso é mais fácil escrever primeiro o número positivo e depois o negativo, antes de concluir o cálculo,

$$-1 + 2 = 2 - 1 = 1.$$

37.

$$1 - 2 = -1$$

38.

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : -a + b = b - a$$

39. Mostre que, dado $a = -3$,

$$-a = +3.$$

Produto com números negativos

40. Use a regra:

Primeiro multiplique os sinais, depois multiplique os números.

41. Existem apenas dois resultados envolvendo o produto de sinais.

$$42. (+) \cdot (+) = (-) \cdot (-) = +$$

$$43. (+) \cdot (-) = (-) \cdot (+) = -$$

44. Em resumo, o *produto de sinais iguais* é **positivo**, enquanto que o *produto de sinais opostos* é **negativo**.

45. No exemplo a seguir, utilizamos a regra (40),

$$-2 \cdot 3 = (-2) \cdot (+3) = (-) \cdot (+) \cdot 2 \cdot 3 = -6.$$

Associatividade da Soma

46. associatividade $\leadsto$ *parêntesis*

47.

$$\underbrace{\underbrace{(2+3)}_5 + 4}_{9} = 2 + \underbrace{(3+4)}_7_{9}$$

48. A *fórmula geral* é dada por

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} : (a + b) + c = a + (b + c).$$

49. Para $a = -1$, $b = 2$ e $c = -3$, temos que

$$(a) \quad (a + b) + c = (-1 + 2) + -3 = 1 - 3 = -2,$$

$$(b) \quad a + (b + c) = -1 + (2 + -3) = -1 + (2 - 3) = -1 + (-1) = -1 - 1 = -2,$$

(c) portanto, o resultado é o mesmo, independente da ordem da soma.

50. Mostre que a fórmula (48) é válida para os seguintes casos.

51. $a = -2, \quad b = -3, \quad c = -4$

52. $a = -2, \quad b = 3, \quad c = -4$

53. $a = 2, \quad b = -3, \quad c = -4$

Associatividade do Produto

54.

$$\begin{array}{ccc} (2 \cdot 3) \cdot 4 & = & 2 \cdot (3 \cdot 4) \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} \\ 6 & & 12 \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} \\ 24 & & 24 \end{array}$$

55.

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} : (ab)c = a(bc)$$

56. Mostre que a fórmula (55) é válida para os seguintes casos.

57. $a = -2, \quad b = -3, \quad c = -4$

58. $a = -2, \quad b = 3, \quad c = -4$

59. $a = 2, \quad b = -3, \quad c = -4$

Distributiva

60.

$$\underbrace{\underbrace{2 \cdot (3 + 4)}_7}_{14} = \underbrace{\underbrace{2 \cdot 3}_6 + \underbrace{2 \cdot 4}_8}_{14}$$

61. Distributiva pela esquerda

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c = ab + ac$$

62. Distributiva pela direita

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} : (b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a = ba + ca = ab + ac$$

63. Note que na última igualdade de (62), utilizamos a *comutatividade do produto*.

64. Mostre, por meio da fórmula (61) ou (62), que a distributiva é válida para os seguintes casos.

65. $a = -2, \quad b = -3, \quad c = -4$

66. $a = -2, \quad b = 3, \quad c = -4$

67. $a = 2, \quad b = -3, \quad c = -4$

Resumo

68. A *ordem da soma* e do *produto* entre *dois números reais* não altera o *resultado*.
69. O *produto* de *sinais iguais* é **positivo**, enquanto que o *produto* de *sinais opostos* é **negativo**.
70. **comutatividade** $\leadsto$ comutar $\leadsto$ *trocar a ordem*
71. **associatividade** $\leadsto$ associar $\leadsto$ *com parêntesis*
72. $a = +1 \cdot a$
73. $a + b = b + a$
74. $ab = ba$
75. $(+) \cdot (+) = (-) \cdot (-) = +$
76. $(+) \cdot (-) = (-) \cdot (+) = -$
77. $(a + b) + c = a + (b + c)$
78. $(ab)c = a(bc)$
79. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
80. $(b + c) \cdot a = ba + ca$

Ciência Aberta

O **arquivo latex** para este artigo, juntamente com outros *arquivos suplementares*, estão disponíveis em [6, 7]. Seja coautor(a) deste artigo, envie sua contribuição para `mplobo@uft.edu.br`.

Consentimento

O autor concorda com [8].

Como citar este artigo?

<https://doi.org/10.31219/osf.io/y452t>

<https://zenodo.org/record/6367822>

Licença

CC-By Attribution 4.0 International [9]

Referências

- [1] Luckesi, Cipriano C. “Oficina sobre avaliação da aprendizagem no Ensino Superior”. Universidade Federal do Tocantins, Araguaína, 2018.
- [2] Lobo, Matheus P. “Matemática Minimalista: Menos É Mais.” *OSF Preprints*, 18 Oct. 2020.
<https://doi.org/10.31219/osf.io/pey6z>
- [3] OJMP Brasil. “Fundamentos da Matemática”.
<https://ojmpbr.wordpress.com/fundamentos-da-matematica>
- [4] Lobo, Matheus P. “Matemática Zero.” *OSF Preprints*, 1 Oct. 2020.
<https://doi.org/10.31219/osf.io/dgsf2>

- [5] Lobo, Matheus P. “Para Que Servem Os Números?.” *OSF Preprints*, 8 Oct. 2020. <https://doi.org/10.31219/osf.io/tyn7k>
- [6] Lobo, Matheus P. “Open Journal of Mathematics and Physics (OJMP).” *OSF*, 21 Apr. 2020.
<https://doi.org/10.17605/osf.io/6hzyp>
- [7] <https://zenodo.org/record/6367822>
- [8] Lobo, Matheus P. “Simple Guidelines for Authors: Open Journal of Mathematics and Physics.” *OSF Preprints*, 15 Nov. 2019.
<https://doi.org/10.31219/osf.io/fk836>
- [9] CC. Creative Commons. *Attribution 4.0 International* (CC BY 4.0)
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0>

Colaboração Matemática Aberta

Matheus Pereira Lobo (autor principal, mplobo@uft.edu.br)^{1,2}
<https://orcid.org/0000-0003-4554-1372>

¹Universidade Federal do Tocantins (Brasil)

²Universidade Aberta (UAb, Portugal)