Open Journal of Mathematics and Physics | Volume 4, Article 272, ISSN: 2674-5747
https://doi.org/10.31219/osf.io/xypcf | published: 23 Aug 2022 | https://ojmp.org

KR

[white paper]
Diamond Open Access

[awaiting peer review]

Cálculo minimalista

Colaboração Matemática Aberta[1]

23 de Agosto de 2022

Resumo

O principal objetivo deste white paper pedagógico é mostrar o essencial do cálculo diferencial e integral de uma variável, de uma forma minimalista.

palavras-chave: função, limite, integral, cálculo diferencial e integral, algoritmo de resolução

A versão mais atualizada deste artigo está disponível em
https://osf.io/xypcf/download
https://zenodo.org/record/7017082

Introdução

1. [1–4]

2. Alguns trechos deste white paper são deixadas em branco intencionalmente com o intuito de ser completado pelo estudante ou pelo professor durante uma aula.

3. Esta versão aborda somente funções e uma parte de limites.

[1]Todos os autores com suas afiliações aparecem no final deste artigo.

Notação

4. O que está entre chaves é um conjunto.
5. O símbolo $:=$ significa que o que está à esquerda é definido pelo que está à direita.
6. $\forall :=$ para todos
7. $\Rightarrow :=$ implicação (se então)
8. $\rightarrow :=$ implicação *ou* seta utilizada na definição de uma função *ou* seta utilizada em limites (tende a)
9. $\leftrightarrow :=$ se e somente se
10. $\vee :=$ ou
11. $\subset$ subconjunto próprio ("contido")
12. $\subseteq :=$ subconjunto ("contido ou igual")
13. $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, ...\} :=$ conjunto dos números inteiros positivos

Par ordenado

14. Definição
$$(a,b) = \{\{a\},\{a,b\}\}$$

15. $(a,b) :=$ `par ordenado`

16. $a :=$ primeira coordenada

17. $b :=$ segunda coordenada

18. Note que, em (14), o primeiro elemento do par ordenado, a, aparece sozinho no conjunto $\{a\}$.

Produto cartesiano

19. Definição
$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\}$$

20. $A, B, A \times B :=$ conjuntos

21. $A \times B :=$ `produto cartesiano`

22. $(a,b) :=$ par ordenado

23. Exemplo: $A = \{1,2,3\},\ B = \{4,5\}$,
$$A \times B = \{(1,4),(1,5),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5)\}.$$

Relação

24. Definição

$$R \subseteq A \times B$$

25. $R, A, B :=$ conjuntos

26. $R :=$ `relação` de A a B

27. $x \in A, \;\; y \in B, \;\; xRy \equiv (x, y) \in R$

28. Exemplo de Relação: $A = \{1, 2, 3\}, \;\; B = \{4, 5\},$

$$R = \{(1, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)\}.$$

29. $R \subset A \times B = \{(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)\}$

30. `Diagrama de flechas:` Desenhe os conjuntos A e B, conecte seus elementos com uma linha e faça uma seta em cada linha, indicando o sentido da relação R.

Função

31. Função é um caso particular de relação, isto é, função é uma relação com restrições.
32. Definição de função
$$f : A \to B$$
$$\forall a \in A\ \exists! b \in B\ ((a, b) \in f)$$
33. f, A, B := conjuntos
34. f := `função` de A a B
35. A := domínio de f
36. B := imagem de f
37. $\exists!$:= existe exatamente um
38. (a, b) := par ordenado
39. **f relaciona cada elemento de A a exatamente um elemento de B.**

40. Exemplo de função: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5\}$,

$$f = \{(1,5), (2,4), (3,4)\},$$

$$f(1) = 5, \quad f(2) = 4, \quad f(3) = 4.$$

41. $f(1) = 5$ é lido "f de 1 é igual a 5".

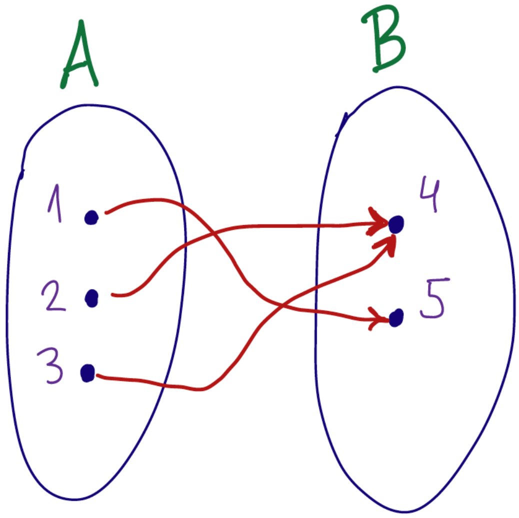


Figura 1: Diagrama de flechas do exemplo (40).

Gráfico de uma função

42. Seja a função

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

dada por

$$f(x) = x^2.$$

43. $\{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$:= `gráfico` de f (conjunto de pares ordenados)

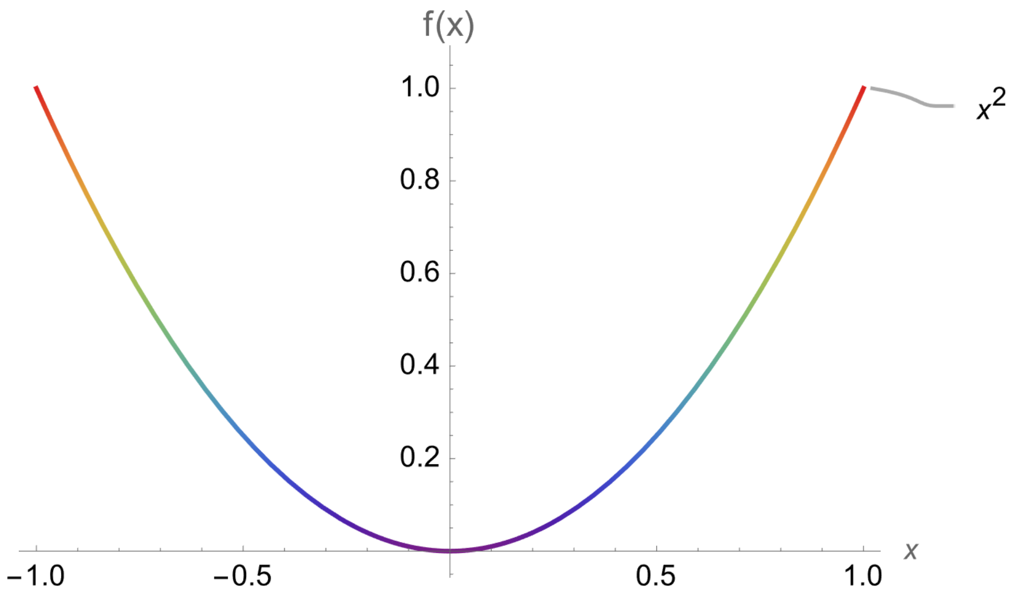


Figura 2: Gráfico de (42).

Domínio e imagem de uma função

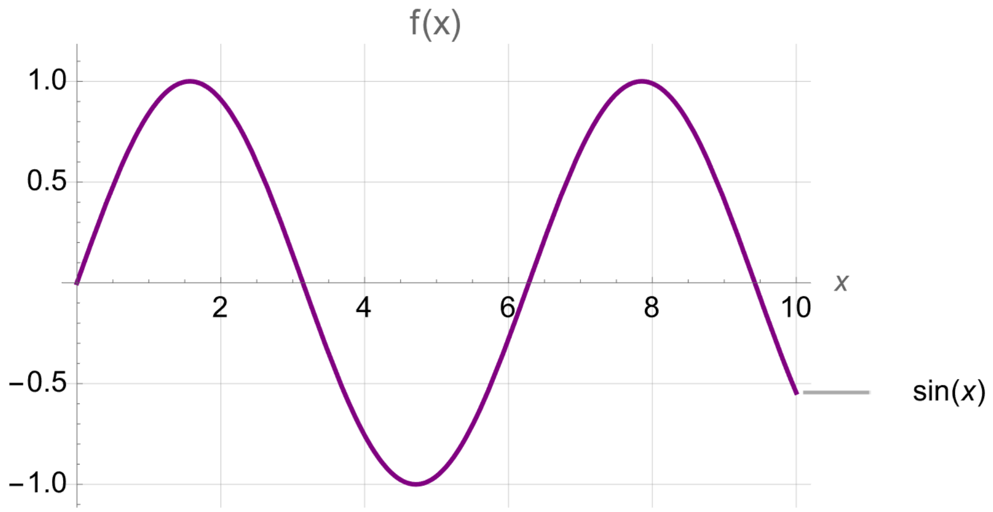
44. Seja a seguinte função real (isto é, nos números reais)

$$f : \mathrm{Dom} \to \mathrm{Im}$$

dada por

$$f(x) = \mathrm{sen}(x)$$

no intervalo representado pelo gráfico



.

45. Dom, Im $\subseteq \mathbb{R}$

46. Dom, Im := conjuntos domínio e imagem, respectivamente

47. Note que $x \in \mathbb{R}$.

48. Dom $f = \{x \mid 0 \leq x \leq 10\} = [0, 10]$

49. Im $f = \{f(x) \mid 0 \leq x \leq 10\} = [-1, 1]$

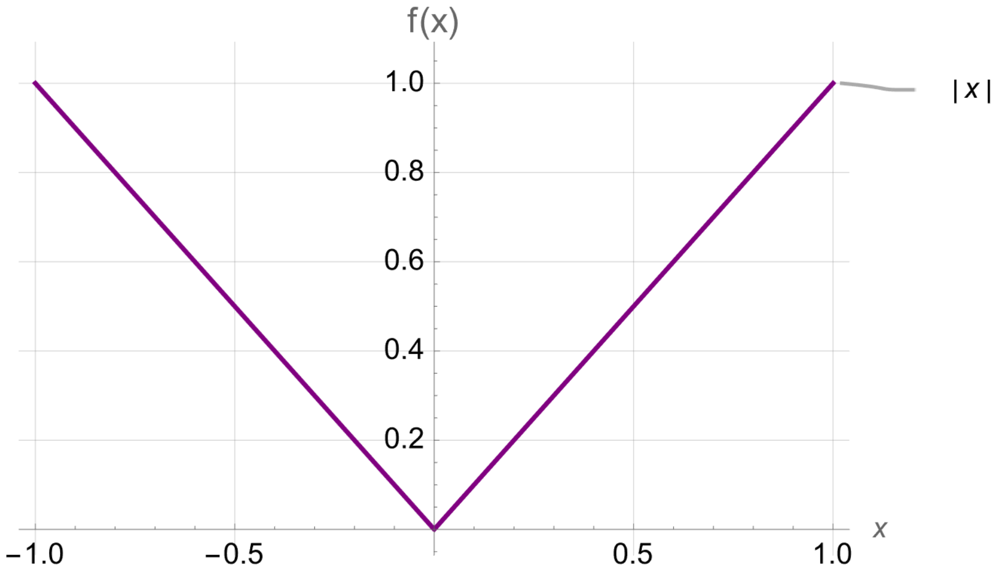
50. Seja a seguinte função nos números reais

$$f : \text{Dom} \to \text{Im}$$

dada por

$$f(x) = |x|$$

no intervalo representado pelo gráfico



.

51. Dom, Im := conjuntos domínio e imagem, respectivamente

52. Note que $x \in \mathbb{R}$.

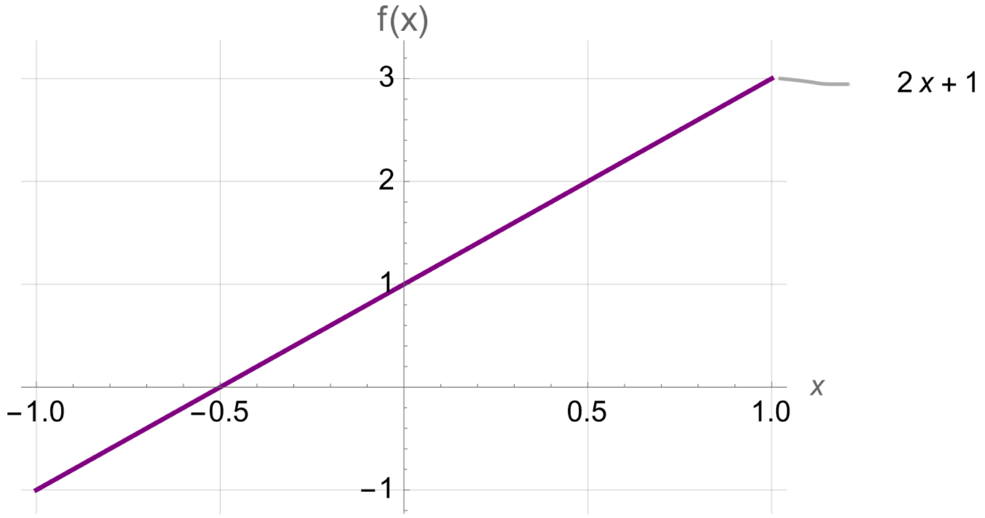
53. Complete os itens a seguir.

54. Dom f =

55. Im f =

Encontrando os pares ordenados a partir do gráfico de uma função

56. Considere o gráfico da função $f(x) = 2x + 1$ a seguir.



57. Temos os seguintes valores de f:

   (i) $f(-1) = -1$,

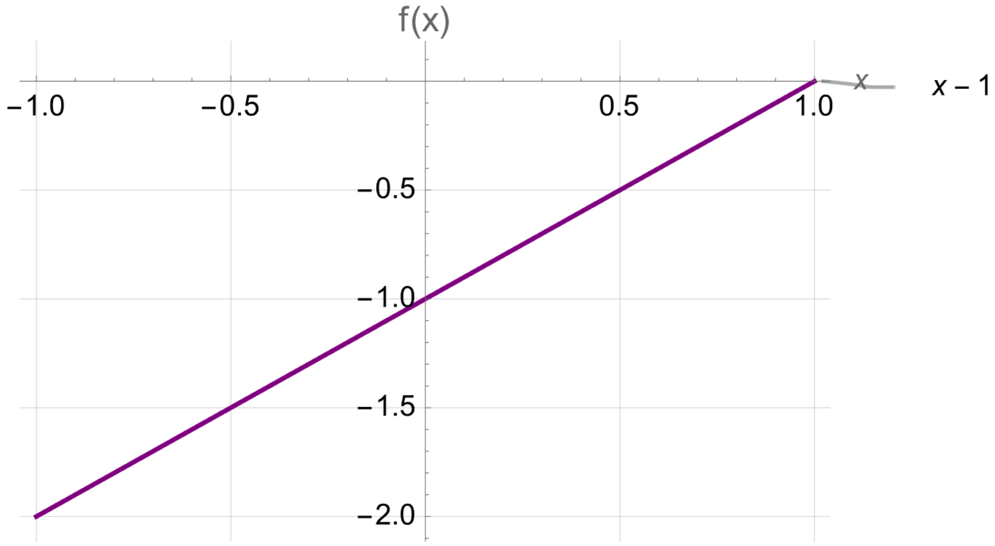
   (ii) $f(0,5) = 0$,

   (iii) $f(0) = 1$,

   (iv) $f(0,5) = 2$,

   (v) $f(1) = 3$.

58. Considere o seguinte gráfico da função $f(x) = x - 1$.



59. Complete os itens a seguir.

60. $f(-1) =$

61. $f(-0,5) =$

62. $f(0) =$

63. $f(0,5) =$

64. $f(1) =$

Funções lineares

65. Definição

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = ax + b$$

66. $f(x) :=$ `função linear`

67. $a, b \in \mathbb{R}$

68. O gráfico de f é uma reta.

69. $a :=$ coeficiente angular da reta

70. $b :=$ coeficiente linear (interseção com o eixo y)

71. As funções em (56) e (58) são lineares.

Polinômios

72. Definição

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

73. $n \in \{0, 1, 2, 3, ...\}$

74. $P(x) :=$ `polinômio` (função)

75. $a_0, a_1, ..., a_n, x, P(x) \in \mathbb{R}$

76. $a_0, a_1, ..., a_n :=$ coeficientes do polinômio

77. $a_n \neq 0 \;\Rightarrow\; P_n(x)$ tem grau n

78. Note que, na definição (72), n se refere ao maior expoente da variável x.

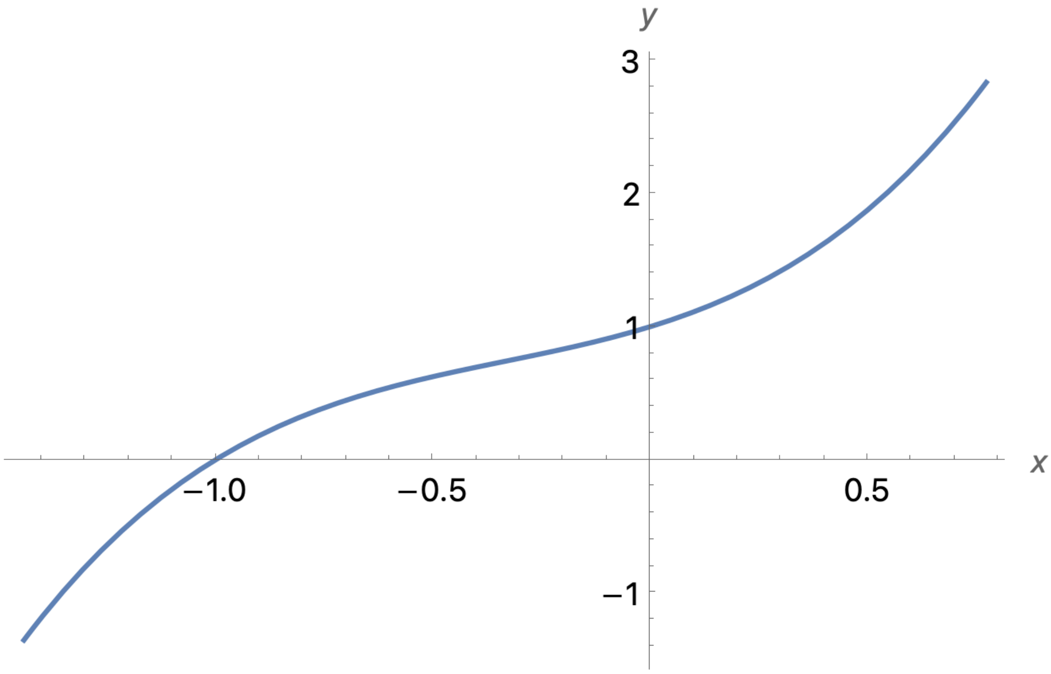
79. $P_1(x) = ax + b :=$ polinômio de grau 1 (função linear)

80. $P_2(x) = ax^2 + bx + c :=$ polinômio de grau 2 (função quadrática) $(a \neq 0)$

81. O gráfico de uma função quadrática é uma parábola com a concavidade para cima (se $a > 0$) ou concavidade para baixo (se $a < 0$).

82. $P_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d :=$ polinômio de grau 3 (função cúbica) $(a \neq 0)$

83. Exemplo: $P_3(x) = x^3 + x^2 + x + 1$



Funções potências

84. Definição

$$f_a(x) = x^a$$

85. $a :=$ constante

86. $f :=$ letra que designa a função

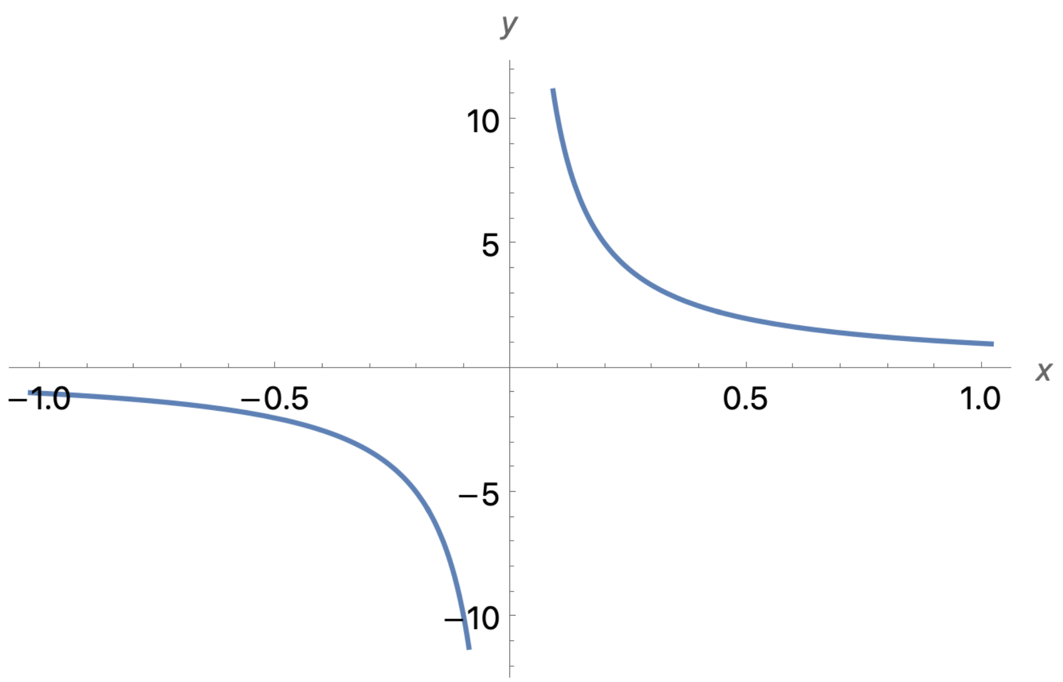
87. $(x) :=$ argumento de f

88. $f_a(x) :=$ `função potência`

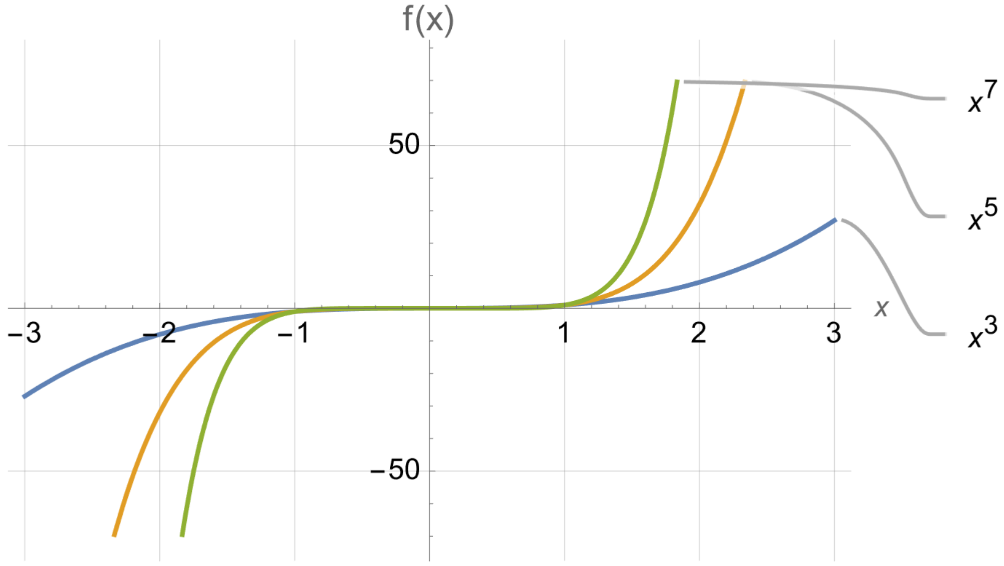
89. Em f_a, a é um índice.

90. Em x^a, a é uma potência.

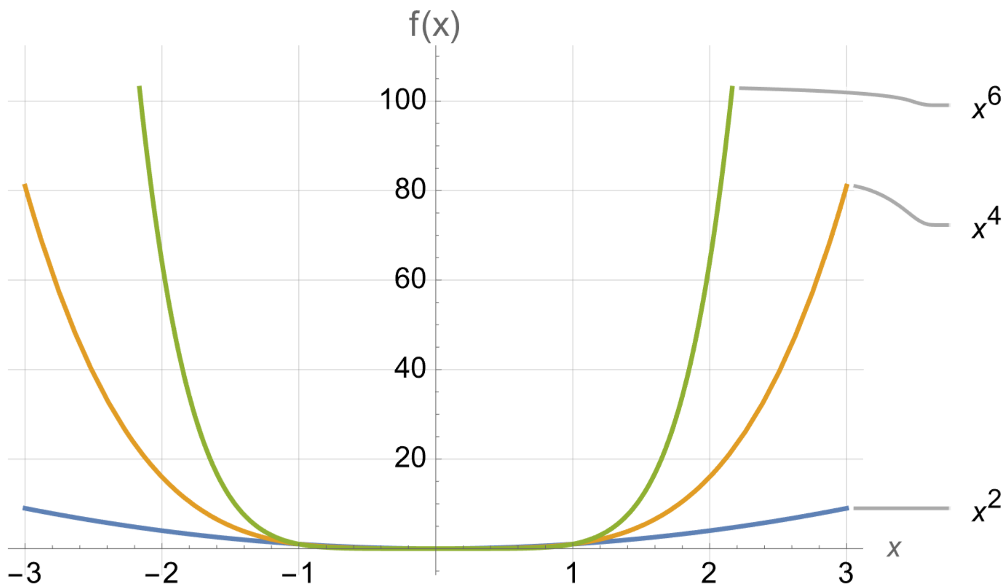
91. Gráfico de $f(x) = x^{-1}$ (função recíproca):



92. Funções potências x^3, x^5 e x^7:



93. Funções potências x^2, x^4 e x^6:



Funções racionais

94. Definição

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

95. $P(x),\ Q(x) :=$ polinômios

96. $f(x) :=$ `função racional`

97. Dom $f = \{x \mid Q(x) \neq 0\}$

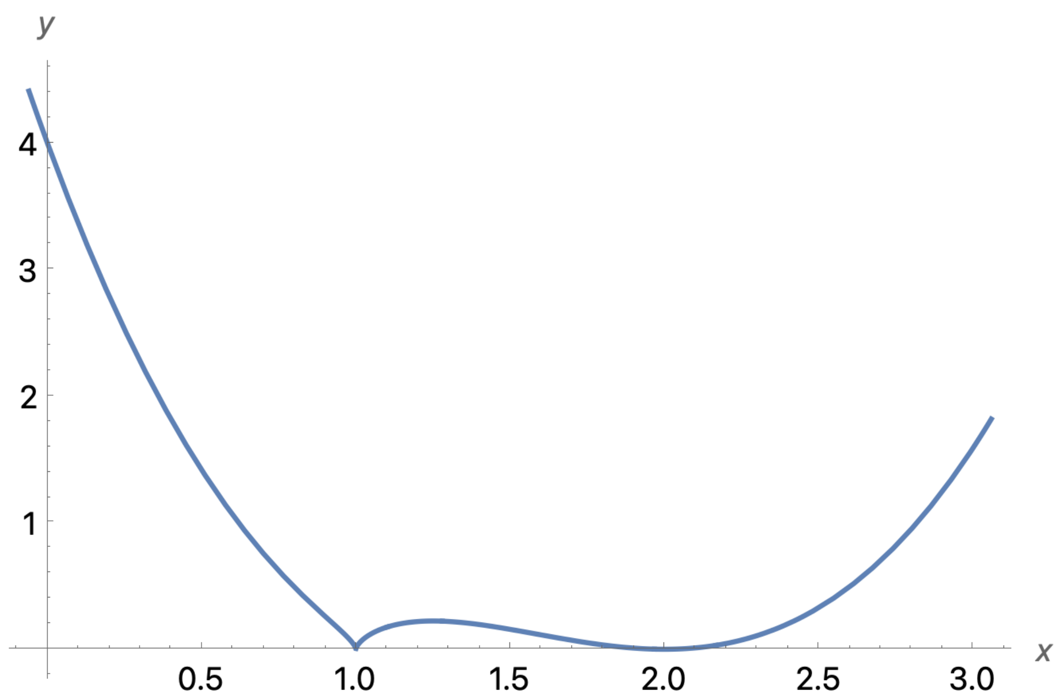
Funções algébricas

98. `função algébrica` := função construída por meio das operações $+,\ -,\ /,\ \sqrt[n]{\ }$ em polinômios

99. $\sqrt[n]{\ }$:= raíz n-ésima

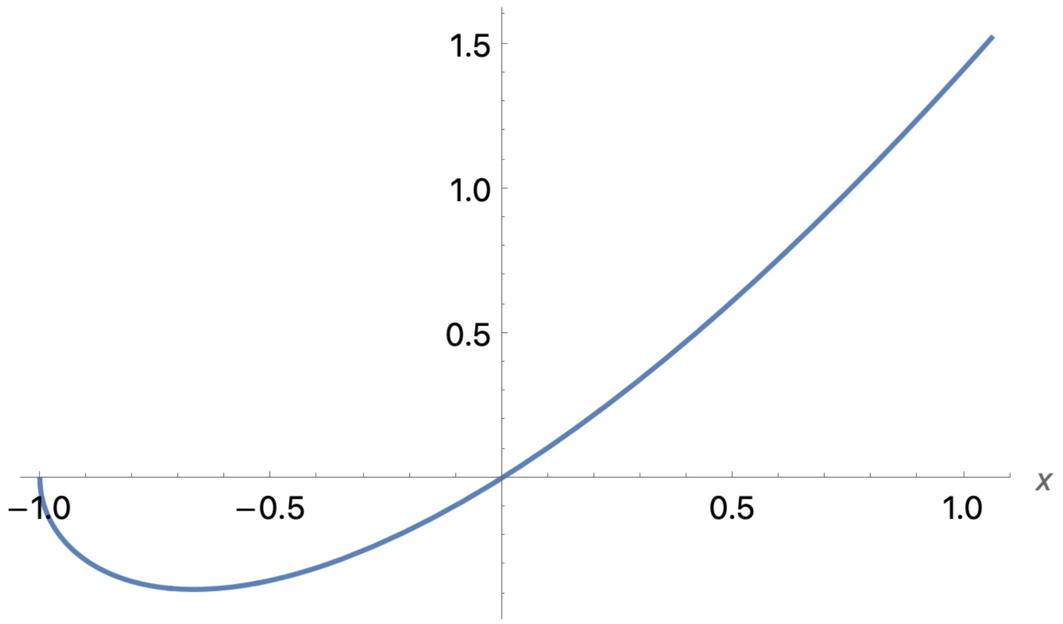
100. A seguir estão alguns exemplos de funções algébricas.

101.
$$f(x) = \sqrt[3]{x-1}^{2}(x-2)^2$$



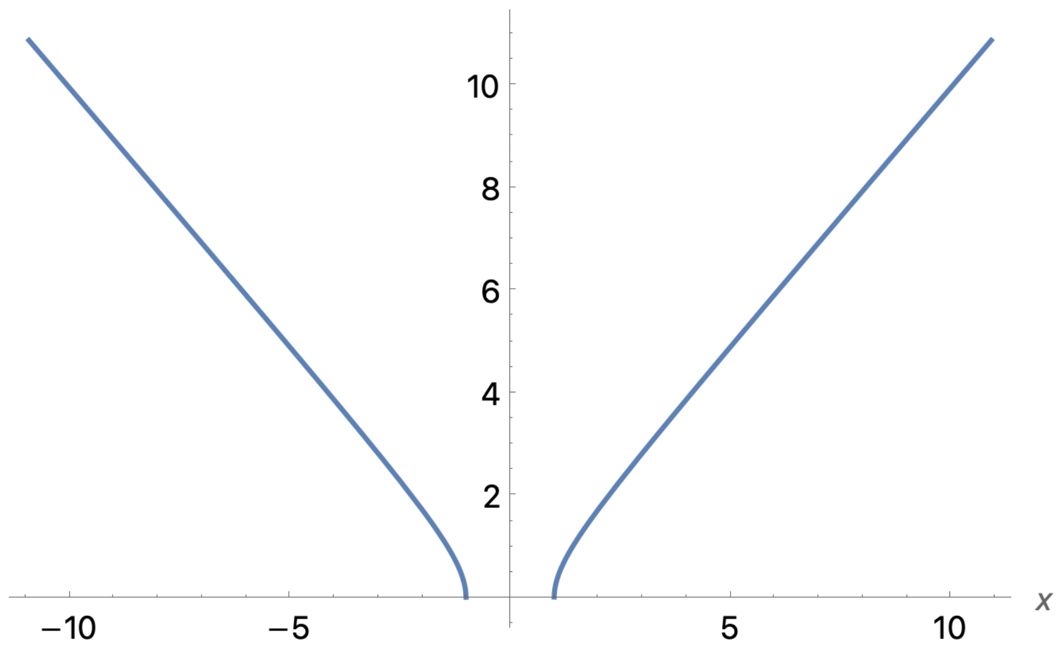
102.

$$f(x) = x\sqrt{x+1}$$



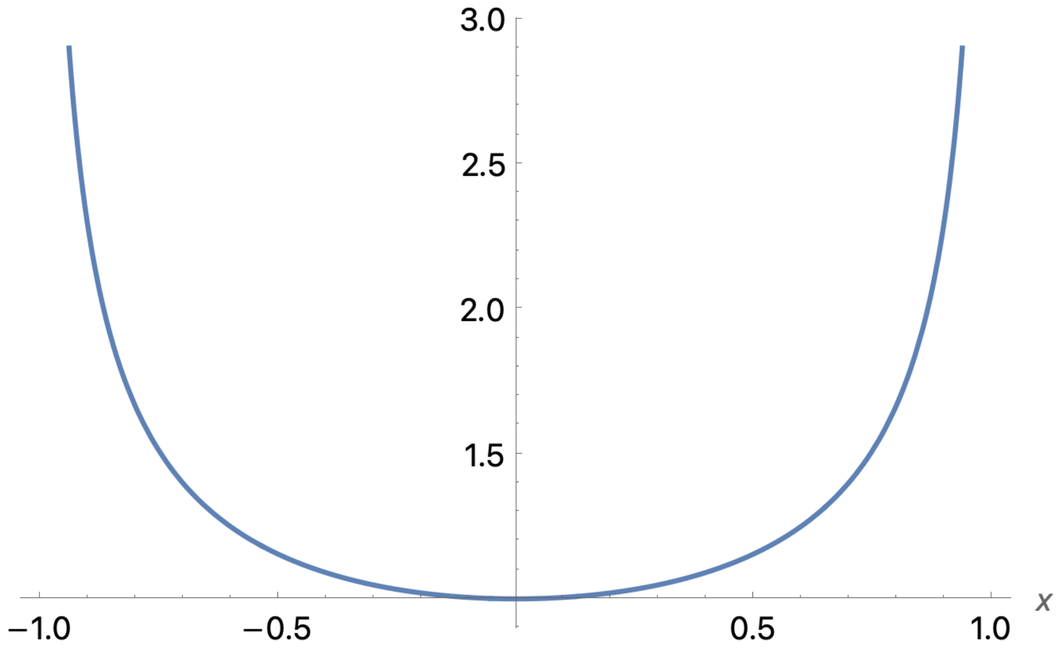
103.

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$



104. A seguinte função aparece na teoria da relatividade especial

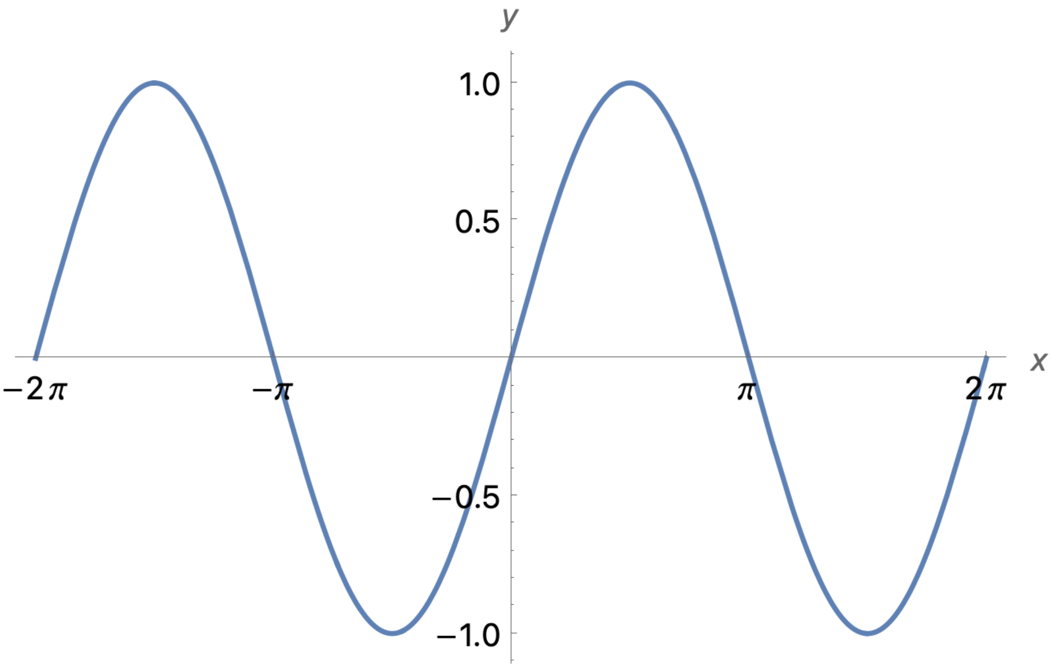
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$



Funções trigonométricas

105.

$$f(x) = \text{sen } x$$



106.

$$-1 \leq \text{sen } x \leq 1$$

107.

$$|\text{sen } x| \leq 1$$

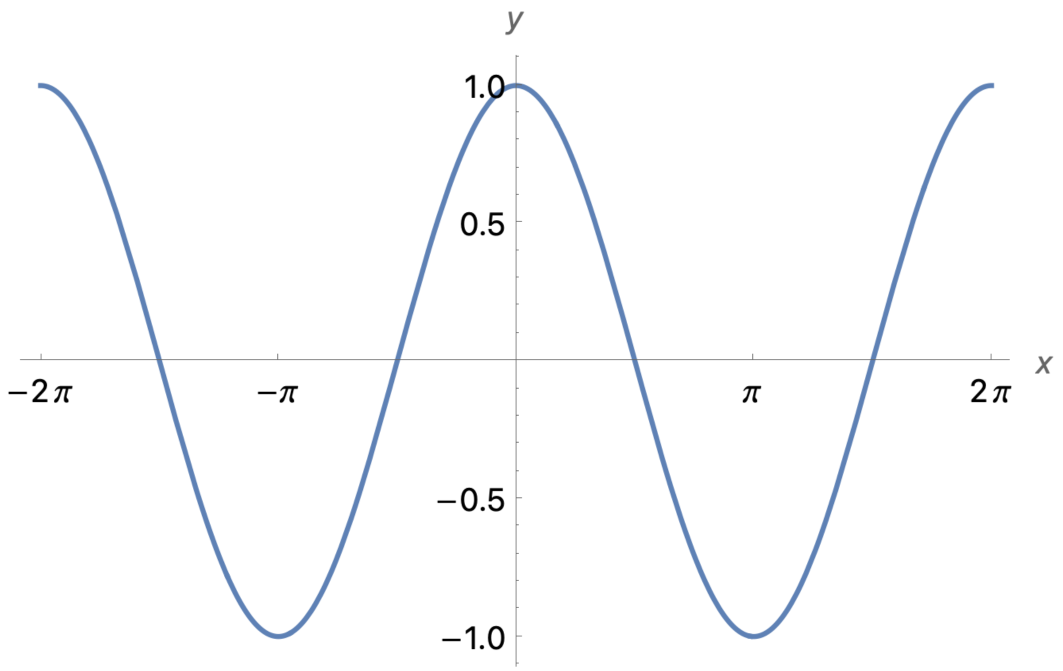
108. (com $n \in \mathbb{Z}$)

$$\text{sen } x = 0 \;\leftrightarrow\; x = n\pi$$

109. Para entender melhor o resultado (108), pesquise sobre o círculo trigonométrico.

110.

$$f(x) = \cos\ x$$



111.

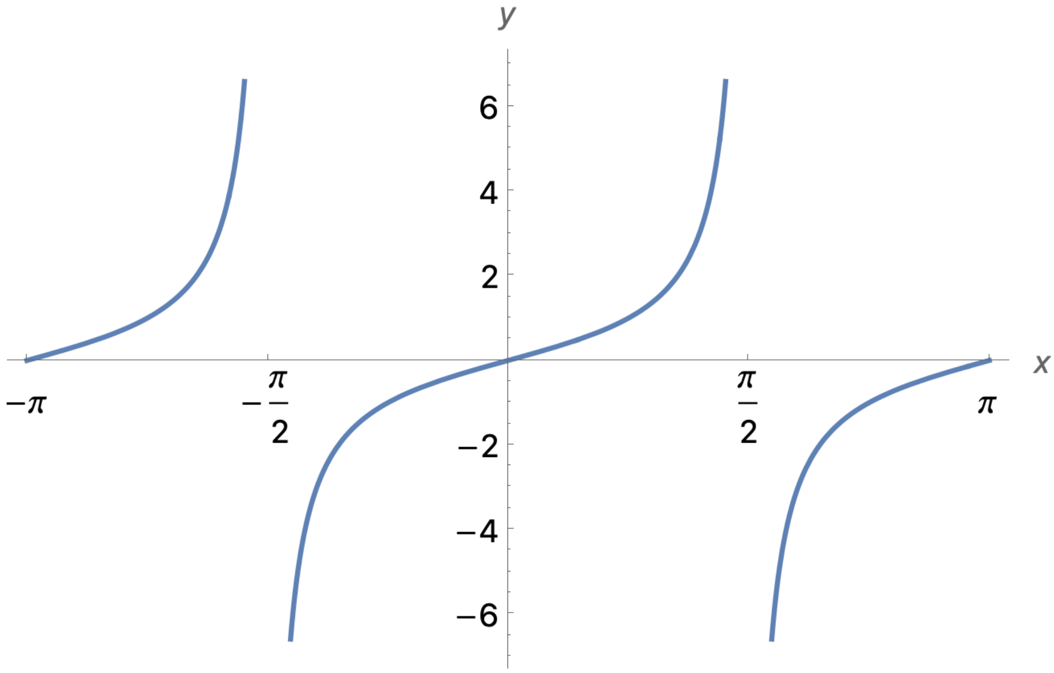
$$-1 \leq \cos\ x \leq 1$$

112.

$$\left|\cos\ x\right| \leq 1$$

113.

$$f(x) = \tan\ x$$



Funções exponenciais

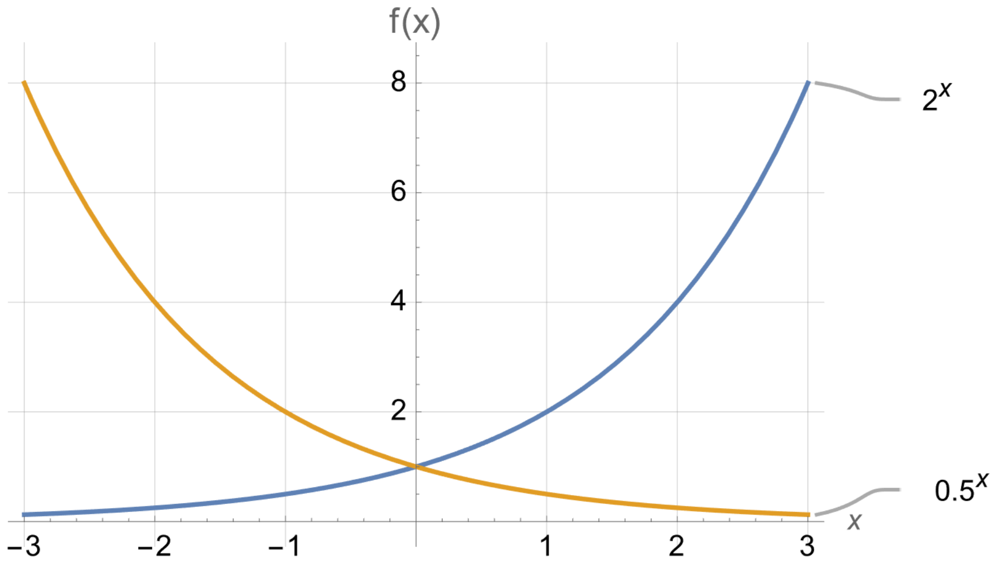
114. Definição

$$f(x) = a^x$$

115. $a :=$ base (constante positiva)

116. Exemplo

$$y = 2^x, \quad y = (0,5)^x$$



117. Dom 2^x =

118. Im 2^x =

Propriedades dos expoentes

119. $a, b, x, y \in \mathbb{R}; \quad a, b > 0$

120.
$$a^{x+y} = a^x a^y$$

121.
$$a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$$

122.
$$(a^x)^y = a^{xy}$$

123.
$$(ab)^x = a^x b^x$$

124. A restrição $a, b > 0$ é necessária porque estamos trabalhando com números reais.

125. O resultado com $a = -1$, $x = 1$ e $y = 1/2$ na propriedade (121) pertence a qual conjunto?

Função injetora

126. Definição

$$x_1 \neq x_2 \;\rightarrow\; f(x_1) \neq f(x_2)$$

127. f := `função injetora`

Função inversa

128. Seja $f : A \to B$ uma função injetora, então $\forall y \in B$:

$$f^{-1}(y) = x \;\leftrightarrow\; f(x) = y.$$

129.

$$f^{-1}(x) : B \to A$$

130. $f^{-1}(x)$:= `função inversa` de $f(x)$

131. Dom f^{-1} = Im f

132. Im f^{-1} = Dom f

133. Exemplo: $f(x) = x^2, \quad f^{-1}(x) = x^{1/2}$
$f^{-1}(f(x)) =$

134. Note que, em $f^{-1}(x)$, -1 não é expoente, é um índice superior para indicar que se trata de uma função inversa.

135.

$$f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)} = [f(x)]^{-1}$$

136. $[f(x)]^{-1}$:= recíproco de $f(x)$

137. Desenhe o diagrama de flechas para o resultado

$$\forall x \in A : f^{-1}(f(x)) = x$$

138. Desenhe o diagrama de flechas para o resultado

$$\forall x \in B : f(f^{-1}(x)) = x$$

A inversa de uma função injetora

139. Algoritmo

   (i) Escreva $y = f(x)$.

   (ii) Isole x.

   (iii) Troque x por y.

140. Calcule a inversa de $f(x) = x^2 - 1$.

141. Faça o gráfico de $f(x)$ e $f^{-1}(x)$.

142. O gráfico de f^{-1} é uma reflexão do gráfico de f com relação a qual eixo?

Funções logarítmicas

143. Definição

$$f(x) = \log_a x$$

144. $a :=$ base (constante positiva, $a > 0$)

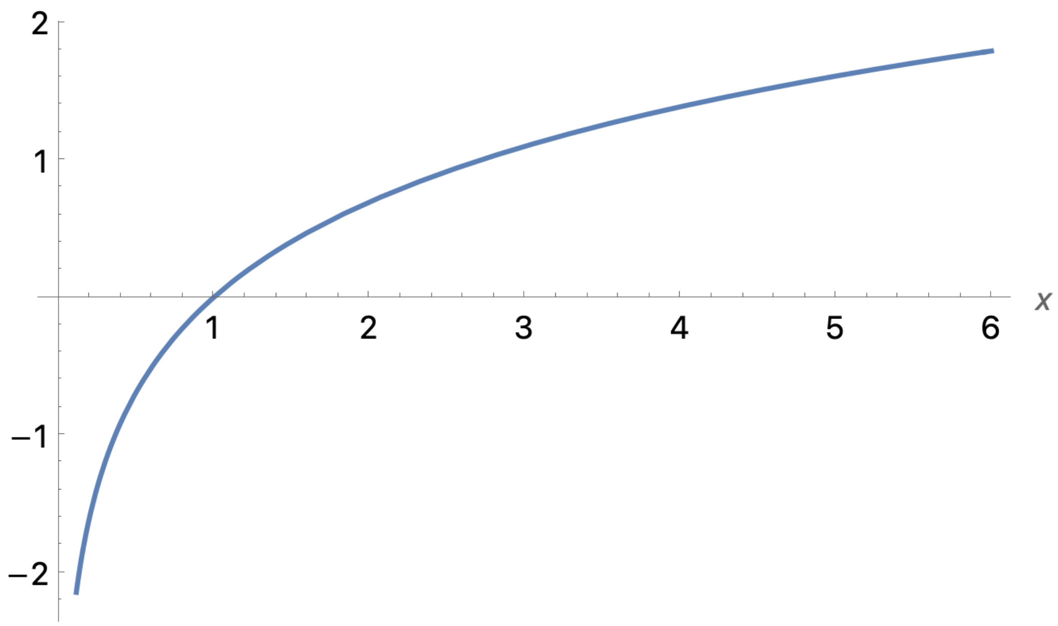
145. $(\log_a x = y) \;\equiv\; (a^y = x)$

146. A função logarítmica é a inversa da função exponencial.

147. Enquanto a função exponencial tem crescimento muito rápido, a função logarítmica cresce muito lentamente.

148.

$$y = \log x$$



149. $f(x) = \log x \equiv \log_e x$

150. Dom $f(x) =$

151. Im $f(x) =$

Propriedades dos Logaritmos

152. $a, x, y > 0, \quad a \neq 1, \quad r \in \mathbb{R}$

$$(i)\ \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$(ii)\ \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$(iii)\ \log_a x^r = r \log_a x$$

153. $a > 0, \quad a \neq 1$

$$\forall x \in \mathbb{R} : \log_a(a^x) = x$$

154. $a > 0, \quad a \neq 1, \quad x \in \mathbb{R}$

$$\forall x > 0 : a^{\log_a x} = x$$

Logaritmos Naturais

155.

$$\ln\,x := \log_e x$$

156. $\ln\,x :=$ logaritmo natural

157. $e = 2,71...$ é um número transcendental (chamado número de Neper).

158. número transcendental := não é raiz de qualquer polinômio com coeficientes inteiros

159.

$$\ln\,x = y \;\leftrightarrow\; e^y = x$$

160.

$$\forall x \in \mathbb{R} : \ln\left(e^x\right) = x$$

161.

$$\forall x \in \mathbb{R},\, x > 0 : e^{\ln\,x} = x$$

162.

$$\ln\,e = 1$$

163. Mudança de base

$$\log_a x = \frac{\ln\,x}{\ln\,a}$$

Limite de uma função

164. $f(x) :=$ função definida em $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ com $\epsilon > 0$ real arbitrariamente pequeno

165. $(a-\epsilon, a+\epsilon) :=$ intervalo aberto

166. $f(a) :=$ pode ou não estar definido

167. Definição do limite de uma função

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

168. $L :=$ limite de $f(x)$ quando x tende a a

169. $x \to a$ significa que x pode ser tomado arbitrariamente próximo de a com $x \neq a$.

170. Como em $x \to a$, $x \neq a$, é interessante observar que a função em (167), por exemplo, pode não estar definida em $x = a$.

171. Faça um gráfico exemplificando (170).

172. Calcule

$$L = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

Dica: use o produto notável $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$.

Limites laterais

173. Seja $\epsilon > 0$ real com $\epsilon \to 0$.

174. Limite à esquerda

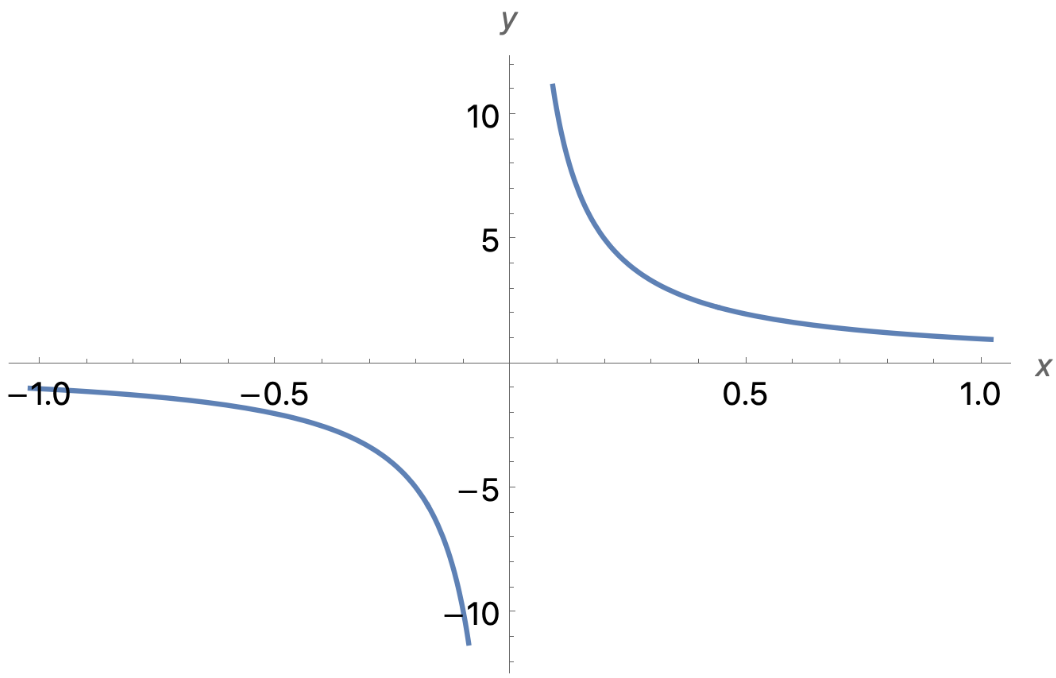
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a - \epsilon} f(x)$$

175. Limite à direita

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a + \epsilon} f(x)$$

176. Exemplo de um limite lateral infinito

$$f(x) = \frac{1}{x}$$



177.

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} =$$

178.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} =$$

Assíntota vertical

179. A reta $x = a$ é uma assíntota vertical se

$$\lim_{x \to a \vee a^- \vee a^+} f(x) = \pm\infty.$$

180. $x \to a \vee a^- \vee a^+$ significa $x \to a$ ou $x \to a^-$ ou $x \to a^+$.

181. $\pm\infty$ significa mais ou menos infinito.

Propriedades dos limites

182. Suponha que $\lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a} g(x)$ existam.

183. $c :=$ constante

184.
$$\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$$

185.
$$\lim_{x\to a}[cf(x)] = c\lim_{x\to a} f(x)$$

186.
$$\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

187.
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x) \neq 0}$$

188. $n \in \mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, ...\}$
$$\lim_{x\to a}[f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a}[f(x)]\right]^n$$

189.
$$\lim_{x\to a} c = c$$

190.
$$\lim_{x\to a} x = a$$

191. $n \in \mathbb{Z}^+$
$$\lim_{x\to a} x^n = a^n$$

192. $n \in \mathbb{Z}^+$, se n é par, então supomos $a > 0$
$$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$$

193. $n \in \mathbb{Z}^+$, se n é par, então supomos $\lim_{x\to a} f(x) > 0$
$$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$$

Limites: substituição direta

194.
$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

195. $f :=$ função polinomial ou racional

196. $a \in$ Dom f

197. Crie e resolva exemplos de limites com substituição direta.

Teoremas envolvendo limites

198. Em cada um dos teoremas a seguir, desenhe o gráfico de uma função qualquer (conhecida ou não), mostrando a validade do teorema.

199. **Limite bilateral**

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \;\leftrightarrow\; \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

200.

$$f(x) \leq g(x) \;\rightarrow\; \lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x)$$

201. **Teorema do Confronto (Sanduíche ou Imprensamento)**

$$\left(f(x) \leq g(x) \leq h(x),\; \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L \right) \;\rightarrow\; \lim_{x \to a} g(x) = L$$

Definição (formal) de Limite

202. Desenhe os itens a seguir na forma de gráficos e intervalos.

203. $\epsilon, \delta, x, a \in \mathbb{R}$

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : (0 < |x - a| < \delta) \rightarrow (|f(x) - L| < \epsilon) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = L$$

204. $f :=$ função definida em $(x_1, a) \cup (a, x_2)$ ou em (x_1, x_2) com $x_1 < a < x_2$

205. $(x_1, a), (a, x_2), (x_1, x_2) :=$ intervalos abertos

Continuidade

206. Desenhe um exemplo de gráfico de uma função para cada uma das definições a seguir.

207.

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \;\Rightarrow\; f \coloneqq \texttt{função contínua em } a$$

208.

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a) \;\Rightarrow\; f \coloneqq \texttt{função contínua à esquerda em } a$$

209.

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \;\Rightarrow\; f \coloneqq \texttt{função contínua à direita em } a$$

210. $c :=$ constante

$$f, g := \texttt{contínuas em } a \Rightarrow$$
$$f \pm g,\ cf,\ fg,\ f/g\ (\text{com } g(a) \neq 0) \equiv \texttt{contínuas em } a$$

211. Todo *polinômio* é *contínuo em* $\mathbb{R}$.

212. Toda *função racional* é *contínua em* seu *domínio*.

213. Os seguintes tipos de funções são contínuas em seus domínios: polinomiais, trigonométricas, exponenciais, racionais, trigonométricas inversas, logarítmicas e raízes.

214. Seja f uma *função contínua em* $b = \lim_{x\to a} g(x)$, então

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right).$$

215.

$$\begin{aligned}(g \coloneqq \text{contínua em } a, \quad f \coloneqq \text{contínua em } g(a)) \ \Rightarrow \\ \Rightarrow (f\circ g)(x) = f(g(x)) \coloneqq \text{contínua em } a\end{aligned}$$

216. **Teorema do Valor Intermediário**

$$\begin{aligned}f \coloneqq \text{contínua em } [a,b], \quad f(a) \le N \le f(b), \quad f(a) \ne f(b) \ \Rightarrow \\ \Rightarrow \ \exists c \in (a,b) : f(c) = N\end{aligned}$$

Limites no Infinito

217. Definição
$$\lim_{x\to\infty} f_1(x) = L_1$$

218. f_1 := função definida em (a, ∞)

219. $f_1(x)$ é arbitrariamente próximo de L_1 quando x é suficientemente grande

220. Definição
$$\lim_{x\to-\infty} f_2(x) = L_2$$

221. f_2 := função definida em $(-\infty, b)$

222. $f_2(x)$ é arbitrariamente próximo de L_2 quando x é suficientemente grande, em módulo, mas com sinal negativo

Arquivos Suplementares

O **arquivo latex** para este artigo, juntamente com outros *arquivos suplementares*, estão disponíveis em [5, 6]. Seja coautor(a) deste artigo, envie sua contribuição para `mplobo@uft.edu.br`.

Consentimento

O autor concorda com [7].

Como citar este artigo?

`https://doi.org/10.31219/osf.io/xypcf`
`https://zenodo.org/record/7017082`

Licença

Referências

[1] Stewart, James. *Cálculo*. Vol. 1. Cengage Learning, 2013.

[2] Velleman, Daniel J. *How to prove it: A structured approach*. Cambridge University Press, 2019.
`https://books.google.com/books?vid=ISBN0521861241`

[3] Warner, Steve. *Pure Mathematics for Beginners*. GET 800, 2018.
`https://books.google.com/books?vid=dcWrvAEACAAJ`

[4] Warner, Steve. *Abstract Algebra for Beginners*. GET 800, 2018.
`https://books.google.com/books?id=UFleyAEACAAJ`

[5] Lobo, Matheus P. "Open Journal of Mathematics and Physics (OJMP)." *OSF*, 21 Apr. 2020.
https://doi.org/10.17605/osf.io/6hzyp

[6] https://zenodo.org/record/7017082

[7] Lobo, Matheus P. "Simple Guidelines for Authors: Open Journal of Mathematics and Physics." *OSF Preprints*, 15 Nov. 2019.
https://doi.org/10.31219/osf.io/fk836

[8] CC. Creative Commons. *Attribution 4.0 International* (CC BY 4.0)
https://creativecommons.org/licenses/by/4.0

Colaboração Matemática Aberta

Matheus Pereira Lobo[1,2,3] (autor principal, mplobo@uft.edu.br)
https://orcid.org/0000-0003-4554-1372

[1]Universidade Federal do Tocantins (Brasil)
[2]Universidade Federal do Norte do Tocantins (Brasil)
[3]Universidade Aberta (UAb, Portugal)