Pemodelan Matematika Pada Penyebaran Populasi Perokok Menggunakan Tipe SEIRS

Siti Maryam Barham¹

¹ Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Negeri Gorontalo,
Jl. Prof. Dr. Ing. B. J. Habibie, Tilongkabila, Kabupaten Bone Bolango, Gorontalo 96119, Indonesia
Email: Maryambarham05@gmail.com

Abstrak

Makalah ini membahas tentang dinamika penyebaran populasi perokok menggunakan pemodelan matematika tipe SEIRS. Populasi dibagi menjadi empat sub, yaitu individu rentan, perokok pemula, perokok aktif, dan individu yang berhenti dari perokok. Hasil menunjukkan bahwa titik kesetimbangan bebas perokok mencapai kondisi stabil ketika $R_0 < 1$ dan titik kesetimbangan endemik mencapai kondisi stabil ketika $R_0 > 1$.

Kata Kunci: Model Matematika; Perokok; Bilangan Reproduksi Dasar; SEIRS

1. Pendahuluan

Merokok merupakan kegiatan yang berbahaya bagi kesehatan tubuh karena menurut Badan Kesehatan Dunia (WHO) rokok merupakan zat adiktif yang memiliki kandungan kurang lebih 4000 elemen, dimana 200 elemen di dalamnya [1]. Indonesia menjadi negara ketiga pada jumlah perokok aktif terbanyak setelah Cina dan India, yaitu sebesar 34% pada tahun 2008. Jumlah perokok ini terus meningkat pada tahun 2010 sebesar 34,7% berbahaya bagi kesehatan tubuh [2]. Berdasarkan WHO, prevalensi data perokok 2013 di Indonesia sebesar 36,3 %, perokok laki-laki 66,0 %, perokok wanita 6,7 %, anak-anak 1,4 % dan remaja 18,3 % . Masalah ini menguatirkan pemerintah, masyarakat dan lingkungan. Salah satu cara untuk meminimalisir permasalahan penyebaran perokok yaitu dengan merumuskan model matematika [3].

Penelitian yang berhubungan dengan perokok sudah dilakukan oleh beberapa orang dan beberapa penelitian menawarkan pendekatan matematika pada populasi perokok yaitu melalui konsep pemodelan matematika [4]. Pemodelan matematika dapat membantu memahami dan mengidentifikasi hubungan penyebaran populasi perokok dengan berbagai parameter epidemiologi, membantu dalam perencanaan masa depan dan mempertimbangkan langkah-langkah pengendalian yang tepat [5].

Adapun dalam penelitian ini kami mengkaji model matematika tipe SEIRS pada penyebaran perokok. Model ini terdapat empat sub populasi saling berinteraksi yaitu Susceptible (S) individu sehat tapi rentan menjadi perokok, Exposed (E) perokok pemula, Infected (I) perokok aktif, dan Recovered (R) individu yang berhenti menjadi perokok. Mengasumsi laju perubahan individu (S) ke individu (E) dipengaruhi oleh besar interaksi S dan E ditambah besar interaksi S dan I dapat ditulis $aE + bIS$, dimana a dan b adalah bobot bilangan positif dengan $a < b$. Berdasarkan asumsi yang digunakan maka akan terbentuk sistem persamaan diferensial, selanjutnya dilihat perilaku solusi dari titik kesetimbangan agar dapat dianalisis kestabilan dari titik kesetimbangan tersebut. Penentuan ambang batas penyebaran populasi perokok yang merupakan nilai bilangan reproduksi dasar dicari menggunakan matriks Next Generation. Tujuan dari penelitian ini yaitu menganalisis kestabilan titik kesetimbangan model matematika penyebaran populasi perokok.

2. Model Matematika

Secara skematik, pola penyebaran populasi perokok dinyatakan dalam diagram kompartemen pada Gambar berikut.

Gambar 1. Diagram Skematik Penyebaran Populasi Perokok

Berdasarkan skema pada Gambar diatas maka diperoleh model matematika tipe SEIRS pada persamaan (1).

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dt} &= \sigma + \alpha_2 E + \rho_1 I + \psi_2 R + aES - bIS - \mu S \\
 \frac{dE}{dt} &= aES + bIS + \beta_2 I - \omega_1 E \\
 \frac{dI}{dt} &= \beta_1 E - \omega_2 I \\
 \frac{dR}{dt} &= \psi E + \rho_2 I - \omega_3 R
 \end{aligned} \tag{1}$$

Analisis Dinamik Model Matematika Penyebaran Populasi Perokok dengan :

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= aES + bIS \\ \omega_1 &= \alpha_2 + \beta_1 + \psi_1 + \mu \\ \omega_2 &= \beta_2 + \rho_1 + \rho_2 + \mu + \delta \\ \omega_3 &= \psi + \mu\end{aligned}$$

Definisi variabel dan parameter dapat dilihat pada Tabel 1.

Tabel 1. Variabel dan Parameter

Simbol	Definisi
σ_1	Laju rekrutmen untuk menjadi individu rentan
α_1	laju perpindahan individu rentan menjadi perokok pemula
α_2	laju perpindahan perokok pemula kembali menjadi individu rentan
β_1	laju perpindahan perokok pemula menjadi perokok aktif
β_2	laju perpindahan perokok aktif kembali menjadi perokok pemula
ρ_1	laju perpindahan perokok aktif kembali menjadi individu rentan
ρ_2	laju perpindahan perokok aktif menjadi berhenti merokok
ψ_1	laju perpindahan perokok pemula menjadi individu berhenti perokok
ψ_2	laju perpindahan individu berhenti merokok kembali menjadi individu rentan
δ	laju kematian penyakit yang disebabkan rokok
σ_2	laju kematian alami pada setiap populasi

3. Hasil dan Pembahasan

3.1. Titik Keseimbangan

Titik keseimbangan diperoleh dengan menyelesaikan persamaan (1), dengan kondisi pada saat $\frac{dS}{dt} = \frac{dE}{dt} = \frac{dI}{dt} = \frac{dR}{dt} = 0$. Berdasarkan persamaan (1) diperoleh titik keseimbangan bebas perokok $(E_0^*) = (S_0, E_0, I_0, R_0,)$ dan Endemik $(E_1^*) = (S_1, E_1, I_1, R_1)$ yaitu

$$\begin{aligned}E_0^* &= \left(\frac{\sigma}{\mu}, 0, 0, 0\right) \\ E_1^* &= \left(\frac{\omega_1\omega_2 - \beta_1\beta_2}{a\omega_2 + b\beta_1}, \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_3\gamma_4}, \frac{\beta_1(\gamma_1 - \gamma_2)}{\omega_2(\gamma_3\gamma_4)}, \frac{(\psi_1 + \psi_2 + \beta_1\rho_2)(\gamma_1 - \gamma_2)}{\omega_2\omega_3(\gamma_3 - \gamma_4)}\right)\end{aligned}\quad (2)$$

Selanjutnya eksistensi titik keseimbangan E_1^* diperoleh dengan ketentuan E_1^* eksis jika $\omega_1\omega_2 > \beta_1\beta_2$ dan

- $\gamma_1 > \gamma_2$ dan $\gamma_3 > \gamma_4$ atau

- $\gamma_1 < \gamma_2$ dan $\gamma_3 < \gamma_4$

3.2. Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar yang dinotasikan dengan R_0 merupakan nilai harapan banyaknya infeksi tiap satuan waktu. Bilangan reproduksi dasar dicari menggunakan pendekatan matriks Next Generation [6]. Penggunaan metode ini secara spesifik dapat dilihat pada [7][8]. Berdasarkan sistem persamaan (1), diambil sistem persamaan yang memuat sub populasi terinfeksi, yaitu

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= aES + bIS + \beta_2 I - \omega_1 E \\ \frac{dI}{dt} &= \beta_1 E - \omega_2 I\end{aligned}\quad (3)$$

Berdasarkan persamaan (3) diperoleh matriks F dan V sebagai berikut

$$F = \begin{bmatrix} aES + bIS + \beta_2 I \\ \beta_1 E \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} \omega_1 E \\ \omega_2 I \end{bmatrix}\quad (4)$$

Matriks Jacobian dari persamaan (4) dinyatakan dengan matriks $F = J(f)$ dan $V = J(V)$, diperoleh

$$F = \begin{bmatrix} aS & bS + \beta_2 \\ \beta_1 & 0 \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 \\ 0 & \omega_2 \end{bmatrix}\quad (5)$$

Selanjutnya substitusi titik kesetimbangan bebas perokok pada persamaan (2) ke persamaan(5), diperoleh

$$F = \begin{bmatrix} a\sigma & \frac{b\sigma}{\mu} + \beta_2 \\ \beta_1 & 0 \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 \\ 0 & \omega_2 \end{bmatrix}\quad (6)$$

Matriks Next Generation (K) didefinisikan berdasarkan persamaan (6) dengan $K = FV^{-1}$, yaitu

$$K = \begin{bmatrix} \frac{a\sigma}{\mu\omega_1} & \frac{b\sigma}{\mu\omega_2} + \frac{\beta_2}{\omega_2} \\ \frac{\beta_1}{\omega_1} & 0 \end{bmatrix}\quad (7)$$

Bilangan reproduksi dasar (R_0) merupakan nilai eigen positif terbesar dari matriks K yaitu $R_0 = \rho(K)$, dengan ρ nilai eigen dominan. Untuk menentukan nilai eigen dari K , maka akan dicari persamaan karakteristik dari matriks K , yaitu $\det(KI) = 0$ diperoleh

$$\lambda^2 - \frac{a\sigma}{\mu\omega_1} \lambda - \frac{\beta_1}{\omega_1} \left(\frac{b\sigma}{\mu\omega_2} + \frac{\beta_2}{\omega_2} \right) = 0\quad (8)$$

Berdasarkan persamaan (8), nilai eigen diperoleh

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\frac{a\sigma}{\mu\omega_1} \pm \sqrt{\frac{a^2\sigma^2}{\mu^2\omega_1^2} + 4 \frac{\beta_1}{\omega_1} \left(\frac{b\sigma}{\mu\omega_2} + \frac{\beta_2}{\omega_2} \right)} \right) \quad (9)$$

Dengan demikian, dapat ditentukan nilai eigen terbesar matriks K, yaitu

$$R_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{a\sigma}{\mu\omega_1} \pm \sqrt{\frac{a^2\sigma^2}{\mu^2\omega_1^2} + 4 \frac{\beta_1}{\omega_1} \left(\frac{b\sigma}{\mu\omega_2} + \frac{\beta_2}{\omega_2} \right)} \right) \quad (10)$$

Persamaan (10) adalah nilai ambang batas yang menjadi tolak ukur tingkat penyebaran populasi perokok. Kondisi yang memungkinkan terdapat pada Definisi (3.1) sebagai berikut

Definisi 3.1. *Jika $R_0 < 1$ titik kesetimbangan bebas perokok stabil asimtotik lokal, sehingga tidak terjadi penyebaran populasi perokok. Selanjutnya jika $R_0 > 1$ titik kesetimbangan endemic stabil asimtotik lokal, sehingga terjadi penyebaran populasi perokok.*

3.3. Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan

Berdasarkan persamaan (1) diperoleh matriks jacobian sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} aE - bI - \mu & -aS + \alpha_2 & -bS + \rho_1 & \psi_2 \\ aE + bI & aS - \omega_1 & bS + \beta_2 & 0 \\ 0 & \beta_1 & -\omega_2 & 0 \\ 0 & \psi_1 & \rho_2 & -\omega_3 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Substitusi titik kesetimbangan bebas perokok pada persamaan (2) ke persamaan (11), dengan persamaan karakteristik diperoleh dari $\det(\lambda I - J(E_0^*))$ yang mengacu pada menghasilkan

$$\begin{vmatrix} \lambda + \mu & \frac{a\sigma}{\mu} + \alpha_2 & \frac{b\sigma}{\mu} - \rho_1 & -\psi_2 \\ 0 & \lambda - \frac{a\sigma}{\mu} + \omega_1 & \frac{-b\sigma}{\mu} - \beta_2 & 0 \\ 0 & -\beta_1 & \lambda + \omega_2 & 0 \\ 0 & -\psi_1 & -\rho_2 & \lambda + \omega_3 \end{vmatrix} \quad (12)$$

Dengan menggunakan aturan kofaktor, persamaan karakteristik pada sistem (12) yaitu

$$(\lambda + \mu)(\lambda + \omega_3) \left(\lambda^2 \left(\omega_1 + \omega_2 - \frac{a\sigma}{\mu} \right) \lambda + \left(\omega_1\omega_2 - \frac{b\sigma\beta_1}{\mu} - \beta_1\beta_2 \right) \right) \quad (13)$$

Berdasarkan persamaan (13), diperoleh empat nilai eigen yang didefinisikan yaitu

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\mu \\ \lambda_2 &= -\omega_3 \end{aligned}$$

Karena setiap nilai parameter adalah positif, maka λ_1 dan λ_2 bernilai negatif. Sementara untuk melihat kestabilan nilai eigen lainnya digunakan kriteria Routh Hurwitz

$$\lambda^2 + \left(\omega_1 + \omega_2 - \frac{a\sigma}{\mu}\lambda\right) + \left(\omega_1\omega_2 - \frac{b\sigma\beta_1}{\mu} - \beta_1\beta_2\right) = 0 \quad (14)$$

Persamaan (14) dapat ditulis kembali dalam bentuk

$$a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0 \quad (15)$$

dengan:

$$a_0 = 1, a_1 = \omega_1 + \omega_2 - \frac{a\sigma}{\mu}, a_2 = \omega_1\omega_2 - \left(\frac{b\sigma\beta_1}{\mu} - \beta_1\beta_2\right)$$

Karena setiap nilai parameter positif, maka dapat dipastikan a_0, a_1 , dan a_2 merupakan bilangan positif. Dengan demikian $a_1a_2a_0a_3 > 0$, sehingga memenuhi kriteria kestabilan Routh Hurwitz. Selanjutnya substitusi titik kesetimbangan endemik pada persamaan (2) ke persamaan (11), dengan persamaan karakteristik diperoleh dari $\det(\lambda I - J(E_1^*))$ yang mengacu pada [1] menghasilkan

$$\begin{bmatrix} \lambda - j_{11} & -j_{12} & -j_{13} & -\psi_2 \\ -j_{21} & \lambda - j_{22} & -j_{23} & 0 \\ 0 & -\beta_1 & \lambda + \omega_{2+0} & \\ 0 & -\psi_1 & -\rho_2 & \lambda + \omega_3 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Dengan

$$\begin{aligned} j_{11} &= \frac{a\gamma_1\omega_2 + b\gamma_2\beta_1 + \gamma_4\mu\omega_2 - (a\gamma_1\omega_2 + b\gamma_1\beta_1 + \gamma_3\mu\omega_2)}{\omega_2(\gamma_3 - \gamma_4)} \\ j_{12} &= \frac{a\beta_1\beta_2 - (a\omega_1\omega_2 + a\alpha_2\omega_2 + b\alpha_2\beta_1)}{a\omega_2 + b\beta_1} \\ j_{13} &= \frac{b\beta_1\beta_2 - (b\omega_1\omega_2 + a\rho_1\omega_2 + b\rho_1\beta_1)}{a\omega_2 + b\beta_1} \\ j_{21} &= \frac{(a\omega_2 + b\beta_1)(\gamma_1 - \gamma_2)}{\omega_2(\gamma_3 - \gamma_4)} \\ j_{22} &= \frac{a\beta_1\beta_2 - (2a\omega_1\omega_2 + b\omega_1\beta_1)}{a\omega_2 + b\beta_1} \\ j_{23} &= \frac{b\omega_1\omega_2 - (2b\beta_1\beta_2 + a\beta_2\omega_2)}{a\omega_2 + b\beta_1} \end{aligned}$$

Dengan menggunakan aturan kofaktor, persamaan karakteristik pada sistem (16) yaitu

$$a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0 \quad (17)$$

Dengan :

$$\begin{aligned}
a_0 &= 1 \\
a_1 &= \omega_2 + \omega_3 + k_1 - k_2 \\
a_2 &= \pi_1 - \pi_2 \\
a_3 &= \pi_3 - \pi_4 \\
a_4 &= \pi_5 - \pi_6
\end{aligned}$$

Dimana:

$$\begin{aligned}
\pi_1 &= \omega_2\omega_3 + k_3 + k_1\omega_2 + k_1\omega_3 + k_6 \\
\pi_2 &= k_4 + k_2\omega_2 + k_2\omega_3 + k_5 \\
\pi_3 &= \omega_2k_3 + \omega_3k_3 + \omega_2\omega_3k_1 + \omega_2k_6 + \omega_3k_6 + k_7 \\
\pi_4 &= \omega_2k_4 + \omega_3k_4 + \omega_2\omega_3k_2 + \omega_2k_5 + \omega_3k_5 + k_8 \\
\pi_5 &= \omega_2\omega_3k_3 + \omega_2\omega_3k_6 + k_{10} \\
\pi_6 &= \omega_2\omega_3k_4 + \omega_2\omega_3k_5 + k_9b\gamma\beta b\omega\beta \\
k_1 &= \frac{a\gamma_2\omega_2 + b\gamma_1 + \beta_1 + \gamma_3\mu\omega_2}{\omega_2(\gamma_3 - \gamma_4)} \\
k_2 &= \frac{a\gamma_1\omega_2 + b\gamma_2\beta_1 + \gamma_4\mu\omega_2}{\omega_2(\gamma_3 - \gamma_4) \frac{a\beta_1\beta_2}{a\omega_2 + b\beta_1}} \\
k_3 &= \frac{a\beta_1\beta_2(a\gamma_1\omega_2 + b\gamma_2\beta_1 + \gamma_4 + \mu\omega_2) + (a\gamma_2\omega_2 + b\gamma_1\beta_1 + \gamma_3\mu\omega_2)(2a\omega_1\omega_2 + b\omega_1\beta_1)}{\omega_2(\gamma_3 - \gamma_4)(a\omega_2 + b\beta_1)} \\
k_4 &= \frac{(a\gamma_1\omega_2 + b\gamma_2\beta_1 + \gamma_3\mu\omega_2)(2a\omega_1\omega_2 + b\omega_1\beta_1) + a\beta_1\beta_2(a\gamma_2\omega_2 + b\gamma_1\beta_1 + \gamma_3\mu\omega_2)}{\omega_2(\gamma_3 - \gamma_4)(a\omega_2 + b\beta_1)} \\
k_5 &= \frac{a\beta_1\beta_2(a\omega_2 + b\beta_1)(\gamma_1 - \gamma_2)}{\omega_2(\gamma_3 - \gamma_4)(a\omega_2 + b\beta_1)} \\
k_6 &= \frac{(a\omega_1\omega_2 + a\alpha_2\omega_2 + b\alpha_2\beta_1)(a\omega_2 + b\beta_1)(\gamma_1 - \gamma_2)}{\omega_2(\gamma_3 - \gamma_4)(a\omega_2 + b\beta_1)} \\
k_7 &= \frac{\beta_1(2b\beta_1\beta_2 + a\beta_2\omega_2)}{a\omega_2 + b\beta_1} + \frac{\beta_1(b\omega_1\omega_2 + a\rho_1 + \omega_2 + b\rho_1\beta_1)(a\omega_2 + b\beta_1)(\gamma_1 - \gamma_2)}{(a\omega_2 + b\beta_1)\omega_2(\gamma_3 - \gamma_4)} \\
k_8 &= \frac{b\beta_1\omega_1\omega_2}{a\omega_2 + b\beta_1} + \frac{b\beta_1^2\beta_2(a\omega_2 + b\beta_1)(\gamma_1 - \gamma_2)}{\omega_2(\gamma_3 - \gamma_4)(a\omega_2 + b\beta_1)} + \frac{\psi_1(a\omega_2 + b\beta_1)(\gamma_1 - \gamma_2)}{\omega_2(\gamma_3 - \gamma_4)} \\
k_9 &= \frac{\beta_1\omega_3(2b\beta_1\beta_2 + a\beta_2\omega_2 + a\beta_2\omega_2)}{a\omega_2 + b\beta_1} + \frac{b\beta_1^2\beta_2\omega_3(a\omega_2 + b\beta_1)(\gamma_1 - \gamma_2)}{\omega_2(\gamma_3 - \gamma_4)(a\omega_2 + b\beta_1)} \\
&\quad + \frac{\beta_1\omega_2(b\omega_1\omega_2 + a\rho_1\omega_2 + b\rho_1\beta_1)(a\omega_2 + b\beta_1)(\gamma_1 - \gamma_2)}{\omega_2(\gamma_3 - \gamma_4)(a\omega_2 + b\beta_1)} \\
k_{10} &= \frac{b\beta_1\omega_1\omega_2\omega_3}{a\omega_2 + b\beta_1} + \frac{b\beta_1^2\beta_2\omega_3(a\omega_2 + b\beta_1)(\gamma_1 - \gamma_2)}{\omega_2(\gamma_3 - \gamma_4)(a\omega_2 + b\beta_1)} + \frac{\psi_1\omega_2(a\omega_2 + b\beta_1)(\gamma_1 - \gamma_2)}{\omega_2(\gamma_3 - \gamma_4)}
\end{aligned}$$

Akar-akar karakteristik dari persamaan (17) akan dicari menggunakan kriteria Routh Hurwitz. Berdasarkan kriteria Routh Hurwitz, titik kesetimbangan endemik akan stabil jika semua koefisien persamaan karakteristik bernilai positif dan semua suku

pada kolom pertama tabel Routh bertanda positif [4]. Koefisien-koefisien pada persamaan (17) positif jika memenuhi $\gamma_1 > \gamma_2$ dan $\gamma_3 > \gamma_4$ maka

$$\begin{aligned} a_0 &> 0 \\ a_1 &> 0 \text{ jika } \omega_2 + \omega_3 + k_1 > k_2 \\ a_2 &> 0 \text{ jika } \pi_1 > \pi_2 \\ a_3 &> 0 \text{ jika } \pi_3 > \pi_4 \\ a_4 &> 0 \text{ jika } \pi_5 > \pi_6 \end{aligned}$$

Dengan mengacu pada [4] diperoleh matriks Hurwitz untuk persamaan (17) sebagai berikut:

$$D = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{bmatrix} \quad (18)$$

untuk menentukan kriteria kestabilan, dibuktikan untuk setiap $\det(D) > 0$. Kriteria kestabilan dari persamaan (17) dipenuhi jika $\gamma_1 > \gamma_2$ dan $\gamma_3 > \gamma_4$ maka

$$\begin{aligned} a_1 &> 0 \text{ jika } \omega_2 + \omega_3 + k_1 > k_2 \\ a_1 - a_2 - a_0 a_3 &> 0 \text{ jika } \pi_1 > \pi_2 \\ (a_1 a_2 a_3 + a_0 a_1 a_5) - (a_0 a_3^2 + a_1^2 a_4) &> 0 \text{ jika } \pi_3 > \pi_4 \\ (a_1 a_2 a_3 a_4 + a_0 a_1 a_2 a_7) - (a_0 a_2 a_3 a_5 + a_0 a_1 a_3 a_6) &> 0 \text{ jika } \pi_5 > \pi_6 \end{aligned}$$

dengan:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \omega_2 \pi_1 + \omega_3 \pi_1 + k_1 \pi_1 + k_2 \pi_2 + \pi_4 \\ \pi_2 &= \omega_2 \pi_2 + \omega_3 \pi_2 + k_1 \pi_2 + k_2 \pi_1 + \pi i_3 \\ \pi_3 &= \pi_3 (\omega_2 \pi_1 + \omega_3 \pi_1 + k_1 \pi_1 + k_2 \pi_2) + \pi_4 (\omega_2 \pi_2 + \omega_3 \pi_2 + k_1 \pi_2 + k_2 \pi_1) \\ &\quad + \pi_5 (\omega_{22} + \omega_{32} + k_{21} + k_{22} + 2\omega_2 \omega_3 + 2\omega_2 k_1 + 2\omega_3 k_1) + \pi_{32} + \pi_{42} \\ &\quad + \pi_6 (2\omega_2 k_2 + 2\omega_3 k_2 + 2k_1 k_2) \\ \pi_4 &= \pi_3 (\omega_2 \pi_2 + \omega_3 \pi_2 + k_1 \pi_2 + k_2 \pi_1) + \pi_4 (\omega_2 \pi_1 + \omega_3 \pi_1 + k_1 \pi_1 + k_2 \pi_2) + 2\pi_3 \pi_4 \\ &\quad + \pi_5 (2\omega_2 k_2 + 2\omega_3 k_2 + 2k_1 k_2) \\ &\quad + \pi_6 (\omega_{22} + \omega_{32} + k_{21} + k_{22} + 2\omega_2 \omega_3 + 2\omega_2 k_1 + 2\omega_3 k_1) \\ \pi_5 &= \pi_5 (\pi_3 (\omega_2 \pi_1 + \omega_3 \pi_1 + k_1 \pi_2 + k_2 \pi_1) + \pi_4 (\omega_2 \pi_2 + \omega_3 \pi_2 + k_1 \pi_1 + k_2 \pi_1)) \\ &\quad + \pi_6 (\pi_3 (\omega_2 \pi_2 + \omega_3 \pi_2 + k_1 \pi_2 + k_2 \pi_1) \\ &\quad + \pi_4 (\omega_2 \pi_1 + \omega_3 \pi_1 + k_1 \pi_1 + k_2 \pi_2)) \\ \pi_6 &= \pi_5 (\pi_3 (\omega_2 \pi_2 + \omega_3 \pi_2 + k_1 \pi_2 + k_2 \pi_1) + \pi_4 (\omega_2 \pi_1 + \omega_3 \pi_1 + k_1 \pi_1 + k_2 \pi_2)) \\ &\quad + \pi_6 (\pi_3 (\omega_2 \pi_1 + \omega_3 \pi_1 + k_1 \pi_1 + k_2 \pi_2) \\ &\quad + \pi_4 (\omega_2 \pi_2 + \omega_3 \pi_2 + k_1 \pi_2 + k_2 \pi_1)) \end{aligned}$$

3.4. Simulasi Numerik

Pada bagian ini, diamati dinamika pada penyebaran populasi perokok dengan menggunakan nilai awal yaitu $S(0) = 50, E(0) = 3, I(0) = 1$ dan $R(0) = 1$ dan nilai parameter pada Tabel 2.

Table 2. Nilai Parameter Komputasi

Parameter	Nilai $R_0 < 1$	Nilai $R_0 > 1$
σ	0,210	0,06
a	0,001	1,00
b	0,002	2,00
α_2	0,300	0,050
β_1	0,030	0,050
β_2	0,010	0,003
ρ_1	0,020	0,002
ρ_2	0,003	0,003
ψ_1	0,200	0,300
ψ_2	0,100	0,500
μ	0,006	0,060
δ	0,010	0,010

(1) Simulasi Nilai $R_0 < 1$

Untuk $R_0 < 1$ dengan nilai awal dan nilai parameter pada Tabel 2 diperoleh simulasi yang disajikan pada Gambar 2 dengan nilai $R_0 = 0,3366982783 < 1$ dan $(E_0^* = 35, 0, 0, 0)$.

Berdasarkan Gambar 2 terlihat bahwa populasi stabil disekitar titik kesetimbangan, proporsi individu *Susceptible* (S) mengalami kenaikan pada awal waktu dari jumlah populasi awal $S = 50$ namun seiring berjalannya waktu populasi ini mengalami penurunan hingga mencapai titik setimbang yaitu $S = 35$, proporsi individu *Exposed* dengan nilai awal $E = 3$ pada awal waktu mengalami kenaikan, namun pada saat t tertentu mengalami penurunan hingga mencapai titik setimbang yaitu $E = 0$, artinya tidak terdapat lagi populasi *Exposed* pada penyebaran populasi perokok, proporsi individu *Infected* mengalami penurunan dari jumlah populasi awal $I = 1$ hingga mencapai titik setimbang yaitu $I = 0$, artinya tidak terdapat populasi *Infected*

pada penyebaran populasi perokok, dan proporsi individu *Recovered* dengan populasi awal $R = 1$ pada awal waktu mengalami kenaikan, namun pada waktu t tertentu populasi *Recovered* mengalami penurunan hingga mencapai titik setimbang yaitu $R = 0$, sehingga untuk titik kesetimbangan bebas perokok dengan kondisi $R_0 < 1$ bersifat stabil, artinya tidak terdapat penyebaran populasi perokok. Hal ini dikarenakan populasi *Susceptible* tidak memilih untuk menjadi perokok dengan begitu tidak terjadi interaksi antara populasi *Susceptible* terhadap *Exposed* dan interaksi *Susceptible* terhadap *Infected*.

Gambar 2. Dinamika penyebaran perokok ketika $R_0 < 1$

(2) Simulasi Nilai $R_0 > 1$

Untuk $R_0 > 1$ dengan nilai awal dan nilai parameter pada Tabel 2 diperoleh simulasi yang disajikan pada Gambar 3 dengan nilai $R_0 = 5,767456357 > 1$ dan $E_1^* = (0,3014201183; 0,7768256415; 0,5629171315; 0,9206418893)$.

Gambar 3. Dinamika penyebaran perokok ketika $R_0 > 1$

Berdasarkan Gambar 3 terlihat bahwa populasi stabil disekitar titik

kesetimbangan. Proporsi individu *Susceptible* (S) mengalami penurunan dari jumlah populasi awal $S = 50$ hingga mencapai titik setimbang 0,3, hal ini dikarenakan terjadi interaksi antara populasi *Susceptible* terhadap individu perokok, dengan begitu proporsi individu *Exposed* mengalami kenaikan dari jumlah populasi awal $E = 3$ diawal waktu, namun pada saat t tertentu populasi *Exposed* mengalami penurunan hingga mencapai titik setimbang yaitu $E = 0,78$. Penurunan ini dikarenakan terjadi perpindahan populasi *Exposed* menjadi populasi *Infected*, sehingga populasi *Infected* mengalami kenaikan pada awal waktu dari jumlah populasi awal $I = 1$, namun pada t tertentu mengalami penurunan hingga menuju titik setimbang yaitu $I = 0,56$, hal ini dikarenakan sebagian populasi *Infected* memilih untuk berhenti merokok, sehingga populasi *Recovered* mengalami kenaikan dari jumlah populasi awal $R = 1$ pada awal waktu, namun pada t tertentu populasi *Recovered* mengalami penurunan hingga menuju titik setimbang yaitu $R = 0,9$. Hal ini menunjukkan setiap populasi menuju titik setimbang dan stabil, artinya pada kondisi ini terjadi penyebaran populasi perokok.

4. Kesimpulan

Model matematika penyebaran populasi perokok menghasilkan titik kesetimbangan bebas perokok yang stabil ketika $R_0 < 1$ dan titik kesetimbangan endemik yang stabil ketika $R_0 > 1$.

Referensi

- [1] F. N. Aisyah, "Pemodelan Matematika dan Studi Kesetimbangan Pada Penyebaran Pengaruh Perilaku Merokok Menggunakan Tipe SEIR," 2018.
- [2] M. Saleh and D. Sazmita, "Model Matematika Jumlah Perokok Dengan dinamika Akar Kuadrat dan Faktor Migrasi," *Semin. Nas. Teknol. Informasi, Komun. dan Ind.*, 2017.
- [3] R. Pomalingo, R. Resmawan, and N. Nurwan, "Analisis Dinamik Model Matematika Penyebaran Populasi Perokok," *J. Mat. Integr.*, vol. 15, no. 2, pp. 111–119, 2019, doi: 10.24198/jmi.v15.n2.22567.111-119.
- [4] A. D. Wijayanti, N. Aini, S. Nteseo, and D. Taha, "Model Matematika Dinamika Populasi Perokok Dengan Faktor Edukasi dan Candy Treatment," 03-May-2020. [Online]. Available: osf.io/cxt2s.
- [5] R. Resmawan, "Model Epidemik SEIRS-SEI Penyebaran Penyakit Malaria dengan Vaksinasi dan Pengobatan," in *SENAMAS: Seminar Nasional Matematika IndoMS Wilayah Sulawesi*, 2017, pp. 128–140.

- [6] N. Chitnis, J. M. Cushing, and J. M. Hyman, "Bifurcation Analysis Of A Mathematical Model For Malaria Transmission," *Siam J. Appl. Math.*, vol. 67, no. 1, pp. 24–45, 2006.
- [7] R. Resmawan and N. Nurwan, "Konstruksi Bilangan Reproduksi Dasar pada Model Epidemik SEIRS-SEI Penyebaran Malaria dengan Vaksinasi dan Pengobatan," *J. Mat. Integr.*, vol. 13, no. 2, pp. 105–114, Dec. 2017, doi: 10.24198/jmi.v13.n2.12332.105-114.
- [8] R. Resmawan and L. Yahya, "Sensitivity Analysis of Mathematical Model of Coronavirus Disease (COVID-19) Transmission," *CAUCHY*, vol. 6, no. 2, pp. 91–99, May 2020, doi: 10.18860/ca.v6i2.9165. [Online]. Available: <http://ejournal.uin-malang.ac.id/index.php/Math/article/view/9165>