Open Journal of Mathematics and Physics | Volume 2, Article 183, 2020 | ISSN: 2674-5747
https://doi.org/10.31219/osf.io/wapzs | published: 10 Oct 2020 | https://ojmp.org
HE

[white paper]
Diamond Open Access

Analisando séries divergentes com ordinais transfinitos

Colaboração Matemática Aberta[1]

11 de Outubro de 2020

Resumo

Comparamos algumas séries divergentes que apresentam resultados não convencionais, utilizando a aritmética do conjunto dos ordinais transfinitos.

palavras-chave: séries divergentes, Grandi, número ordinal transfinito, infinito

A versão mais atualizada deste artigo está disponível em
https://osf.io/wapzs/download

Como ser coautor(a) deste artigo?

1. Envie-nos suas observações e responda às seguintes perguntas.
2. Quais discussões você adicionaria a este artigo?
3. Você encontrou algum erro ou argumento inconsistente? Dê uma justificativa detalhada.

[1]Todos os autores com suas afiliações aparecem no final deste artigo.

Introdução

4. A **aritmética** dos *números ordinais* **transfinitos** é bem diferente da aritmética dos números que estamos acostumados a lidar, como os números *complexos, reais, racionais, inteiros* e *naturais* [1, 2].

5. Uma propriedade muito importante é que, no *conjunto* dos **ordinais transfinitos**, é possível *operar* com **divisões por zero** [3, 4].

Supremo e ínfimo

6. [1]

7. Note que ω é o **supremo** dos *inteiros* e $-\omega$ é o **ínfimo** dos *inteiros*.

8. $\omega = \sup\{m : m \in \mathbb{Z}\}$

9. $-\omega = \inf\{n : n \in \mathbb{Z}\}$

10. $\forall m \in \mathbb{Z} : \omega > m$

11. $\forall n \in \mathbb{Z} : -\omega < n$

12. Portanto, temos a seguinte ordenação

$$\{-\omega, ..., -2, -1, 0, 1, 2, ..., \omega, \omega + 1, ...\}.$$

Aritmética dos transfinitos

13. [1, 2]

14. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$

15.

$$\forall n \in \mathbb{N} : n - \omega = 0$$

16.
$$\forall n \in \mathbb{N} : \omega - n = \omega$$

17.
$$\forall n \in \mathbb{N} : n\omega = \omega$$

18.
$$\omega = -\omega$$

Limite de um sobre zero

19. [3]

20. $x \in \mathbb{R}$

21.
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \omega.$$

22.
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\omega.$$

23. Como $\omega = -\omega$, *os dois limites* acima *são iguais.*

24. Portanto,
$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \omega.$$

25. Assim, podemos escrever
$$\frac{1}{0} = \omega.$$

Séries divergentes

26. A seguir apresentamos alguns resultados obtidos a partir de técnicas sofisticadas, como *continuação analítica*, por exemplo, para algumas séries divergentes [5].

27. Veja também [6–9].

28.
$$\sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + ... = -\frac{1}{2}$$

29.
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + ... = \frac{1}{2}$$

30.
$$\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + ... = -\frac{1}{12}$$

31.
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 = 1 + 4 + 9 + ... = 0$$

O que há de errado?

32. Nos resultados (28)–(31), *o lado esquerdo da igualdade* é uma quantidade infinita, enquanto *o lado direito* é finito.

Séries divergentes com os transfinitos

33. [1]

34. Dado que ω representa uma *quantidade infinita*, isto é,

$$\omega = |\mathbb{N}| = \aleph_0,$$

utilizamos as **operações** da **teoria de conjuntos** (*união, diferença*) nos *números transfinitos*.

35. Antes de prosseguir, leia as seções **Ordinais Finitos** e **Ordinais Transfinitos** em [1].

36. Portanto, as *operações nos números* são realizadas por meio de *operações* em seus respectivos *conjuntos*.

37. Importante: *cada número é representado por um conjunto contendo a quantidade de elementos associados a ele.*

Série $\sum n$

38.
$$\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + ... = \{0\} \cup \{0, 1\} \cup \{0, 1, 2\} \cup ... = \mathbb{N}$$

39. Como $\omega = |\mathbb{N}|$,
$$1 + 2 + 3 + ... = \omega.$$

40. De (18),
$$\omega = -\omega.$$

41. De (17),
$$12\omega = -\omega.$$

42. Dividindo (41) por 12 pela esquerda,
$$\omega = -\frac{1}{12}\omega.$$

43. Substituindo (42) em (39),
$$1 + 2 + 3 + ... = -\frac{1}{12}\omega.$$

Série $\sum 1$

44. Em (28), fazemos a seguinte associação,
$$1 + 1 + 1 + ... = \{0\} \cup \{1\} \cup \{2\} \cup ... = \mathbb{N}.$$

45. Similarmente,

$$1 + 1 + 1 + ... = \omega = 2\omega = -\omega.$$

46. Dividindo $2\omega = -\omega$ por 2 pela esquerda e substituindo em (45),

$$1 + 1 + 1 + ... = -\frac{1}{2}\omega.$$

Série $\sum n^2$

47. (31) pode ser escrito assim,

$$4 + 9 + 16 + 25 + ... = -1.$$

48.

$$4 + 9 + 16 + 25 + ... = \omega = -\omega$$

Considerações Finais

49.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + ... = -\frac{1}{12}\omega$$

50.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + ... = -\frac{1}{2}\omega$$

51.

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^2 = 4 + 9 + ... = -\omega$$

Ciência Aberta

O **arquivo latex** para este artigo, juntamente com outros *arquivos suplementares*, estão disponíveis [10].

Referências

[1] Lobo, Matheus P. "Aritmética Dos Ordinais Transfinitos." *OSF Preprints*, 10 Sept. 2020. https://doi.org/10.31219/osf.io/h3t5f

[2] Lobo, Matheus P. "Subtraction of Transfinite Ordinals." *OSF Preprints*, 8 Mar. 2020. https://doi.org/10.31219/osf.io/yvrf3

[3] Lobo, Matheus P. "Limite De 1 Sobre X Tendendo a Zero Nos Ordinais." *OSF Preprints*, 13 Sept. 2020. https://doi.org/10.31219/osf.io/epnj4

[4] Lobo, Matheus P. "Soma Ilimitada, Subtração Limitada." *OSF Preprints*, 4 Oct. 2020. https://doi.org/10.31219/osf.io/p3r52

[5] Tao, Terence. "The Euler-Maclaurin formula, Bernoulli numbers, the zeta function, and real-variable analytic continuation." https://terrytao.wordpress.com/2010/04/10/the-euler-maclaurin-formula-bernoulli-numbers-the-zeta-function-and-real-variable-analytic-continuation

[6] Lobo, Matheus P. "The Convergence of Grandi's Series." *OSF Preprints*, 4 Jan. 2020. https://doi.org/10.31219/osf.io/aq5xz

[7] Lobo, Matheus P. "The Infinity Theorem." *OSF Preprints*, 4 Feb. 2020. https://doi.org/10.31219/osf.io/9zm6b

[8] Lobo, Matheus P. "A Multivalued Infinity." *OSF Preprints*, 6 Mar. 2020. https://doi.org/10.31219/osf.io/vtjy7

[9] Lobo, Matheus P. "Quadratic Convergence of a Multi-convergence Series (S+)." *OSF Preprints*, 18 Feb. 2020. https://doi.org/10.31219/osf.io/rx79h

[10] Lobo, Matheus P. "Open Journal of Mathematics and Physics (OJMP)." *OSF*, 21 Apr. 2020. https://doi.org/10.17605/osf.io/6hzyp

Colaboração Matemática Aberta

Matheus Pereira Lobo (autor principal, mplobo@uft.edu.br)[1,2]
https://orcid.org/0000-0003-4554-1372

[1]Universidade Federal do Tocantins (Brasil)
[2]Universidade Aberta (UAb, Portugal)