See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/333338421>

Kelas Konjugasi Pada Grup Transformasi Möbius

Conference Paper · May 2018

CITATIONS

0

2 authors, including:

Iden Rainal Ihsan

Bandung Institute of Technology

13 PUBLICATIONS 3 CITATIONS

SEE PROFILE

Some of the authors of this publication are also working on these related projects:

Bilinear Spaces, Algebra on Mathematical Music Theory, Algebraic Coding [View project](#)

Kelas Konjugasi Pada Grup Transformasi M bius

Guntur Maulana Muhammad¹ dan Iden Rainal Ihsan^{2, a)}

¹Pendidikan Matematika, Universitas Suryakencana, Cianjur

²Pendidikan Matematika, Universitas Islam Nusantara, Bandung

^{a)}E-mail: irainalhsan@uninus.ac.id

Abstrak. Transformasi M bius merupakan suatu transformasi geometri yang dapat dikaji dari sudut pandang geometri maupun aljabar. Himpunan transformasi M bius bersama operasi komposisi membentuk suatu sistem matematika yang berupa grup. Pada himpunan transformasi M bius terdapat juga suatu relasi konjugasi. Relasi tersebut kemudian dikaji sedemikian sehingga diperoleh konsep mengenai kelas konjugasi dari grup transformasi M bius

1. Pendahuluan

Pembahasan mengenai transformasi M bius terdahulu [1],[2], dan [3] menjadi acuan penulis dalam mengkaji konsep transformasi M bius. Pada [2] dan [3] dibahas lebih banyak mengenai aspek geometri dari transformasi M bius, sedangkan pada [1] dibahas dari segi aljabar dan geometri. Pada makalah ini pembahasan dari sudut pandang aljabar, yakni mengenai himpunan transformasi M bius ditinjau strukturnya yang merupakan suatu grup.

Penulis tertarik mengkaji transformasi M bius karena menurut [4] transformasi geometri merupakan salah satu teknik yang ampuh untuk membuktikan sifat geometri. Hal yang memberikan ketertarikan tersendiri bagi penulis adalah kegunaan konsep transformasi M bius pada pembelajaran aljabar terutama dalam menyampaikan konsep grup [5],[6].

Pembahasan makalah ini akan berpusat pada grup transformasi M bius. Lebih khusus, pembahasan yang akan dipaparkan adalah terkait relasi konjugasi dan kelas konjugasi sebagai mana telah dijelaskan secara singkat pada [1].

2. Tinjauan Pustaka

2.1. Grup Transformasi M bius

Penamaan transformasi M bius merupakan suatu dedikasi kepada pengkaji konsep transformasi tersebut untuk yang pertama kalinya, yakni Auguste Ferdinand M bius [7]. Berikut ini adalah definisi dari transformasi M bius

Definisi 2.1 Transformasi M bius adalah suatu fungsi variabel kompleks dengan bentuk

$$f(z) = \frac{a + bz}{c + dz}$$

dengan $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ dan $a - b \neq 0$

Berdasarkan definisi 2.1 jelas bahwa f terdefinisi untuk semua z bilangan kompleks selain $z = -\frac{cd}{c}$ jika $c \neq 0$. Kemudian jika $c = 0$, maka daerah definisi f adalah semua $z \in \mathbb{C}$. Pendefisian pada makalah ini jelas tidak memperbolehkan c dan d keduanya nol.

Pada bagian ini akan dibahas mengenai sistem matematika yang dibentuk oleh himpunan transformasi M bius, sebut $\mathcal{M}$, dengan operasi komposisi ($\circ$). Sistem matematika tersebut disebut sistem transformasi M bius $(\mathcal{M}, \circ)$ [1][5].

Teorema 2.2 Sistem transformasi M bius $(\mathcal{M}, \circ)$ merupakan suatu grup

Bukti. Jelas bahwa $\mathcal{M}$ bukan himpunan hampa. Kemudian jelas pula bahwa operasi komposisi $\circ: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ terdefinisi dengan baik, artinya setiap komposisi dua transformasi M bius menghasilkan transformasi M bius.

Selanjutnya, ambil $f_1, f_2, f_3 \in \mathcal{M}$ sebarang. Misal untuk sebarang $z \in D_{f_i}, i = 1, 2, 3$

$$f_1(z) = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}; f_2(z) = \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}; \text{ dan } f_3(z) = \frac{a_3 z + b_3}{c_3 z + d_3}$$

Berdasarkan [1]

$$(f_1 \circ f_2) \circ f_3(z) = f \circ (f_2 \circ f_3)(z)$$

Dengan demikian sistem $(\mathcal{M}, \circ)$ memenuhi sifat asosiatif.

Lebih lanjut perhatikan pemetaan identitas $e(z) = z, \forall z \in \mathbb{C}$. Jelas bahwa $e \in \mathcal{M}$. Hal tersebut karena kita dapat sajikan $e(z) = \frac{a}{a}$, dengan $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dengan demikian $\exists e \in \mathcal{M} \ni \forall f \in \mathcal{M}$ berlaku $e \circ f = f = f \circ e$. Kemudian ambil $f \in \mathcal{M}$ sebarang. Misalkan $f(z) = \frac{a+b}{c+d}$ untuk setiap $z \in D_f$. Berdasarkan [1] terdapat $f^{-1} \in \mathcal{M}$ dengan

$$f^{-1}(z) = \frac{-dz+b}{c-z-a}, \forall z \in \mathbb{C}; z \neq \frac{a}{c},$$

sehingga $f \circ f^{-1} = e = f^{-1} \circ f$. Dengan demikian Sistem transformasi Möbius $(\mathcal{M}, \circ)$ merupakan suatu grup

2.2. Kelas Ekuivalen

Untuk membahas kelas konjugasi yang merupakan suatu kelas ekuivalen, perlu dibahas terlebih dahulu mengenai kelas ekuivalen. Misalkan A adalah suatu himpunan tak hampa, kemudian berlaku suatu relasi, tulis $\sim$, di A . Penulisan $a \sim b$ memiliki arti a berelasi dengan b . Berikut ini adalah definisi relasi ekuivalen [8]

Definisi. 2.3 Relasi $\sim$ di suatu himpunan A disebut relasi ekuivalen jika untuk setiap $a, b, c \in A$ berlaku

1. $a \sim a$ (Sifat refleksif) ;
2. Jika $a \sim b$, maka $b \sim a$ (sifat simetris) ; dan
3. Jika $a \sim b$ dan $b \sim c$, maka $a \sim c$

Untuk sebarang $a \in A$, dapat kita definisikan suatu sub himpunan A , sebut $k(a)$, yang memuat semua unsur $x \in A$ yang berelasi dengan a , yakni $x \sim a$. Dapat kita tulis sub himpunan yang dimaksud dengan cara sebagai berikut

$$k(a) = \{x \in A | x \sim a\}$$

Sub himpunan $k(a)$ tersebut disebut kelas ekuivalen. Kita dapat pula menyatakan suatu himpunan yang memuat semua kelas ekuivalen di A berdasarkan relasi $\sim$. Himpunan tersebut dapat kita tuliskan sebagai berikut

$$\mathcal{K} = \{k(a) | a \in A\}$$

Terdapat sifat terkait kelas ekuivalen yang termuat di $\mathcal{K}$, yakni

Sifat 2.4

1. Untuk setiap $k(a)$ dan $k(b)$ di $\mathcal{K}$ berlaku atau $k(a) \cap k(b) = \emptyset$ atau $k(a) = k(b)$; dan
2. $\bigcup \mathcal{K} = \bigcup_{k(a) \in \mathcal{K}} k(a) = A$

Bukti. Untuk membuktikan bagian 1., kita misalkan $k(a) \cap k(b) \neq \emptyset$. Dengan demikian harus kita buktikan $k(a) = k(b)$. Ambil $x \in k(a)$ sebarang, maka $x \sim a$. Karena $k(a) \cap k(b) \neq \emptyset$, maka kita dapat mengambil $y \in k(a) \cap k(b)$. Kita miliki $a \sim y$ dan $y \sim b$. Karena $x \sim a$, maka $x \sim y$. Dengan argumen yang sama, berarti $x \sim b$. Dengan demikian $x \in k(b)$. Terbukti bahwa $k(a) = k(b)$

Untuk bukti bagian ke 2., sudah jelas berlaku $\bigcup_{k(a) \in \mathcal{K}} k(a) \subseteq A$. Ambil $u \in A$ sebarang, jelas

bahwa $u \in k(u)$, yang artinya $u \in \bigcup_{k(a) \in \mathcal{K}} k(a)$. Dengan demikian berlaku $A \subseteq \bigcup_{k(a) \in \mathcal{K}} k(a)$, jadi terbukti $\bigsqcup \mathcal{K} = \bigcup_{k(a) \in \mathcal{K}} k(a) = A$ ■

Himpunan $\mathcal{K}$ yang berisikan sub himpunan tak hampa dari suatu himpunan A yang memenuhi 1. dan 2. pada sifat 2.4 kita sebut partisi dari himpunan A . Himpunan kelas ekivalen membentuk suatu partisi. Hal sebaliknya juga berlaku, setiap partisi dari suatu himpunan A adalah suatu himpunan kelas ekivalen untuk suatu relasi ekivalen di himpunan A , dengan suatu relasi tertentu. Lebih sederhana, ambil $x, y \in A$, dengan $x \sim y$. Jika x dan y berada di dalam satu partisi, maka relasi $\sim$ bersifat refleksif, simetris, dan transitif.

3. Hasil dan Pembahasan

Pada bagian ini akan dipaparkan penjelasan utama makalah ini yakni tentang kelas konjugasi pada grup $(\mathcal{M}, \circ)$. Pada intinya kelas konjugasi (misalkan kelas konjugasi f) adalah suatu kumpulan semua konjugat dari suatu $f \in \mathcal{M}$ [1]. Sebelumnya, perlu didefinisikan terlebih dahulu mengenai relasi konjugat pada $\mathcal{M}$. Berikut ini adalah definisi relasi konjugat pada $\mathcal{M}$.

Definisi 3.1 Misalkan $f, g \in \mathcal{M}$. f berkonjugasi dengan g jika dan hanya jika terdapat $h \in \mathcal{M}$ sedemikian sehingga $f = h \circ g \circ h^{-1}$

Untuk memudahkan penulisan, misalkan $f, g \in \mathcal{M}$ dengan f berkonjugasi dengan g , maka kita tuliskan $f \sim g$.

Teorema 3.2 Relasi $\sim$ di $\mathcal{M}$ adalah relasi ekivalen

Bukti. Untuk sebarang $f \in \mathcal{M}$ jelas $f \sim f$. Hal tersebut karena terdapat pemetaan identitas $e \in \mathcal{M}$ sehingga $f = e \circ f \circ e$. Dengan demikian $\sim$ bersifat refleksif. Kemudian ambil $f, g \in \mathcal{M}$ dengan $f \sim g$, maka terdapat $h \in \mathcal{M}$ yang memenuhi $f = h \circ g \circ h^{-1}$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} f &= h \circ g \circ h^{-1} \\ h^{-1} \circ f \circ h &= g \end{aligned}$$

Karena $h \in \mathcal{M}$, maka jelas $h^{-1} \in \mathcal{M}$. Jadi $g \sim f$ (relasi $\sim$ bersifat simetris. Selanjutnya misalkan $f \sim g$ dan $g \sim h$ ($f, g, h \in \mathcal{M}$). Dapat kita tulis $\exists p, q \in \mathcal{M}$ sehingga berlaku

1. $f = p \circ g \circ p^{-1}$, dan
2. $g = q \circ h \circ q^{-1}$.

Dari dua hal tersebut kita peroleh

$$\begin{aligned} f &= p \circ q \circ h \circ q^{-1} \circ p^{-1} \\ &= p \circ q \circ h \circ (p \circ q)^{-1} \end{aligned}$$

Karena $p, q \in \mathcal{M}$, maka $p \circ q \in \mathcal{M}$. Misalkan $p \circ q = m$, kita peroleh

$$f = m \circ h \circ m^{-1}$$

Dengan demikian $f \sim h$ (relasi $\sim$ bersifat transitif).

Kita telah memperoleh hasil yang menunjukkan bahwa $\sim$ adalah suatu relasi ekivalen. Kita dapat menghimpun semua anggota $\mathcal{M}$ yang berelasi dengan $f \in \mathcal{M}$. Himpunan tersebut dapat kita tulis

$$k(g) = \{f \in \mathcal{M} \mid f \sim g\}$$

Himpunan $k(g)$ disebut kelas konjugasi yang memuat semua transformasi M bias yang berkonjugasi dengan g .

4. Simpulan dan Saran

Berdasarkan pembahasan, dapat disimpulkan bahwa relasi konjugasi pada himpunan transformasi M bius merupakan relasi ekuivalen. Dengan demikian kita dapat membentuk suatu kelas ekuivalen berdasarkan relasi konjugasi. Kelas ekuivalen yang dimaksud kita sebut kelas konjugasi.

Untuk melengkapi dan memperkaya hasil kajian ini penulis memberikan beberapa rekomendasi untuk pengkajian dan penelitian selanjutnya. Peneliti merekomendasikan suatu kajian lanjutan mengenai keterkaitan kelas konjugasi dari grup transformasi M bius terhadap aspek geometri transformasi M bius. Kemudian pengkajian yang serupa dapat dilakukan dengan semesta pembicaraan transformasi dan grup lain.

5. Daftar Pustaka

- [1] Ihsan, I.R. 2015. *Klasifikasi geometris dari transformasi M bius*. Tesis. Bandung: Institut Teknologi Bandung.
- [2] Olsen, J. 2010. The geometry of M bius Transformations. (online), (<http://www.johno.dk/mathematics/moebius.pdf>), diakses 24 April 2018.
- [3] Ihsan, I.R. 2016. Titik tetap (*fixed point*) pada transformasi M bius. *Jurnal Euclid*, Vol. 3 No. 1, pp 485-490.
- [4] Budhi, W.S. 2006. Langkah awal menuju ke olimpiade matematika. Jakarta: Ricardo.
- [5] Ihsan, I.R., dan Muhammad, G.M. 2015. Pembelajaran sistem transformasi M bius $(\mathcal{M}, \circ)$ sebagai sarana menyampaikan konsep grup. Makalah disampaikan pada Seminar Nasional Pendidikan Matematika NMC, Universitas Islam Nusantara, Indonesia.
- [6] Ihsan, I.R. 2015. Pembelajaran klasifikasi geometris transformasi M bius, sebagai sarana menyampaikan konsep grup. Makalah disampaikan pada Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika, Universitas Negeri Yogyakarta, Indonesia.
- [7] Deaux, R. 2008. *Introduction to the geometry of complex numbers*. New York: Dover Publication Inc.
- [8] Arifin, A. 2000. *Aljabar*. Bandung: Penerbit ITB.