3 SEPASANG SUDUT ANTARA DUA OPERATOR KOMPAK
4 DENGAN RANG HINGGA
5 ON ANGLES BETWEEN TWO FINITE RANK COMPACT
6 OPERATORS

7 AGAH D. GARNADI¹

8 ¹Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Institut Pertanian Bogor, Indonesia, e-mail:
9 agah.garnadi@gmail.com

10
11 *Teruntuk Prof. Dr. Siswadi, MSc., yang memasuki usia ke 70 tahun.*

12 **Abstrak**

Dengan bantuan rumus sudut antara dua subruang, telah dirumuskan sudut antara
2 matriks berukuran sama. Gagasan ini diperluas ke operator kompak dengan rank
yang hingga di ruang Hilbert.

13 *Kata kunci:* Operator kompak, ruang Hilbert, sudut, subruang

14 **Abstract**

*A pair of angles between two matrices of the same size has been
introduced with the help of angle between two subspace formula. In this
note, we extend the notion of a pair of angles between two finite rank
Compact operators in Hilbert space.*

15 *Keywords:* Compact Operator, Hilbert Space, sudut, subruang

16 1. PENDAHULUAN

17 Rumus sudut antara dua subruang di dimensi hingga [2],[3], telah dimanfaatkan untuk
18 mendefinisikan dua sudut antara dua matriks berukuran sama [1]. Mengingat ruang hasil
19 kali dalam berdimensi hingga merupakan ruang Hilbert, memotivasi kemungkinan perumusan
20 apakah sudut antara dua operator linear di ruang Hilbert memiliki sifat tersebut. Tulisan ini
21 membahas kasus khusus yang menyangkut dua operator kompak dengan rang hingga.

22 Organisasi. Tulisan singkat ini disusun atas tiga bagian, pertama meninjau kembali hasil
23 terdahulu, pada bagian kedua merupakan hasil utama, dan diakhiri dengan simpulan serta
24 kerja lanjutan.

25 $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ ruang Hilbert.

26 $C_1, C_2 : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$, operator linear.

27 2. HASIL TERDAHULU: SUDUT ANTARA DUA MATRIKS[1]

28 $A, B \in R^{m,n} : \text{Matriks berukuran } m \times n.$

29 **2.1. Rumus Sudut Antara Dua Subruang ([2],[3],315).** Misalkan $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ adalah ru-
 30 ang hasil kali dalam berdimensi 2 atau lebih, $U = \text{span}\{u_1, u_2, \dots, u_p\}$ dan $V = \text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_q\}$
 31 adalah 2 subruang di X dimana $1 \leq p \leq q < \infty$. Misalkan pula bahwa $\{u_1, u_2, \dots, u_p\}$
 32 dan $\{v_1, v_2, \dots, v_q\}$ adalah ortonormal, maka θ adalah sudut antara subruang U dan V , yang
 33 diberikan sebagai berikut.

$$\cos^2(\theta) = \det(MM^T) \quad (1)$$

34 dengan

$$M := [\langle u_i, v_k \rangle] = [u_i^T * v_k], \quad (2)$$

35 adalah matriks berukuran $p \times q$, dan $M^T = [v_k^T * u_i]$. Perhatikan bahwa, untuk kasus $p = q$,
 36 rumus sudut menjadi:

$$\cos(\theta) = |\det(M)| \quad (3)$$

37 **2.2. Dekomposisi Nilai Singular (*Singular Value Decomposition, SVD*)[4].** Dekomposisi
 38 nilai singular dari matriks A dan B , adalah [4] :

$$A = U_A S_A V_A^T, U_A \in R^{m,p}, S_A \in R^{p,p}, V_A^T \in R^{p,n},$$

39

$$B = U_B S_B V_B^T, U_B \in R^{m,q}, S_B \in R^{q,q}, V_B^T \in R^{q,n}$$

40 dengan U_A, U_B, V_A , dan V_B , merupakan matriks ortonormal. Sedangkan matriks S_A , dan S_B ,
 41 merupakan matrik diagonal dengan entri diagonalnya merupakan nilai singular dari A dan B .
 42 Perhatikan bahwa U_A, U_B secara berturut-turut merupakan basis ortonormal ruang kolom dari A
 43 dan B . Demikian pula dengan V_A, V_B secara berturut-turut merupakan basis ortonormal ruang
 44 baris dari A dan B . Selanjutnya, kita katakan dekomposisi SVD.

45 **2.3. Pasang Sudut antara dua matriks berukuran sama.**

46 **2.3.1. Sudut berdasarkan representasi sudut ruang kolom.** Tuliskan:

$$U_{UA} := U_A, V_{UB} = U_B.$$

47 Misalkan $U_{UA} = [u_1 u_2 \dots u_p]$ dan $V_{UB} = [v_1 v_2 \dots v_q]$. Sudut antara A dan B dapat
 48 dihitung :

$$M = [U_{UA}^T V_{UB}]$$

$$\cos^2(\theta) = \det(M * M^T) \quad (4)$$

50 **2.3.2. Sudut berdasarkan representasi ruang baris.** Ambil:

$$U_{VA} := V_A, V_{VB} = V_B.$$

51 Misalkan $U_{VA} = [u_1 u_2 \dots u_p]$ dan $V_{VB} = [v_1 v_2 \dots v_q]$. Sudut antara U_{VA} dan V_{VB} dapat
 52 dihitung :

$$M = [U_{VA}^T V_{VB}]$$

$$\cos^2(\phi) = \det(M * M^T) \quad (5)$$

54 3. HASIL UTAMA

55 Misalkan $C_1, C_2 : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$, merupakan operator Kompak dengan rang hingga, yaitu
 56 $\dim \text{Range}(C_i) < \infty$.

57 Maka diperoleh SVD dari C_1 dan C_2 : [5, 6]

$$C_i = \sum_{k=1}^{\infty} s_k^{(i)} < -, \xi_k^{(i)} > \eta_k^{(i)}, i = 1, 2$$

58 dengan $\{s_k^{(i)}, \xi_k^{(i)}, \eta_k^{(i)}\}$ merupakan sistem singular dari C_i .

59 Karena C_1 dan C_2 keduanya merupakan operator kompak dengan rang-hingga, maka
 60 terdapat $n_i, 0 < n_i < \infty, i = 1, 2$, sehingga dapat dituliskan :

$$C_i = \sum_{k=1}^{n_i} s_k^{(i)} < -, \xi_k^{(i)} > \eta_k^{(i)}.$$

61 Pandang subruang baris (Image subspace) dari masing-masing C_i

$$\text{span}\{\xi_k^{(i)}, i = 1, 2, 0 < n_i < \infty\} = \mathcal{X}^{(i)} \subset \mathcal{X}.$$

62 Karena berdimensi hingga, maka dapat dihitung matriks M di rumus (2) yang berukuran
63 $n_1 \times n_2$. Maka dapat dihitung sudut ϕ berdasarkan rumus 5.

64 Sementara dari subruang kolom (Range subspace) dari masing-masing C_i , diperoleh :

$$\text{span}\{\eta_k^{(i)}, i = 1, 2, 0 < k \leq n_i < \infty\} = \mathcal{Y}^{(i)} \subset \mathcal{Y},$$

65 sehingga dapat dihitung matriks M di rumus (2) yang berukuran $n_1 \times n_2$. Maka dapat dihitung
66 sudut θ berdasarkan rumus 4.

67 **Definisi 3.1.** Sudut θ, ϕ , secara berturutan disebut sudut kiri (subruang kolom) dan sudut
68 kanan(subruang baris) antara dua matriks. Selanjutnya, pasang (θ, ϕ) , disebut pasang sudut
69 antara dua operator kompak dengan rang hingga.

70 4. SIMPULAN

71 Diperlihatkan bahwa sudut antara dua operator Kompak dengan rang hingga, dapat
72 dihitung dengan mudah sesuai rumus yang digunakan untuk menghitung pasang sudut antara
73 dua matriks berukuran sama. Sehingga definisi di ruang Hilbert berdimensi hingga, diperluas
74 ke ruang Hilbert secara umum meskipun terbatas untuk operator Kompak di ruang Hilbert
75 dengan rang hingga.

76 Dari hasil catatan ini, dimungkinkan misalnya untuk diaplikasikan untuk menghitung
77 pasang sudut dari dua operator Hankel dengan rang hingga yang digunakan di bidang kontrol
78 [6]. Selain itu, masih terbuka apakah pasang sudut antara dua operator Kompak secara umum
79 dapat didefinisikan. Kedua topik ini, akan dibahas dikemudian hari.

80 DAFTAR PUSTAKA

- 81 [1] Garnadi, A.D., 2019, Jarak dan Sudut antara dua matriks berdimensi sama, *J. Matematika Integratif*, v15
82 No 1, pp 53-61
83 [2] Gunawan, H., Neswan, O., On Angles Between Subspaces Of Inner Product Spaces. Vol. 11, No. 2. *Indonesian: Math. Society (MIHMI)*, 2005
84 [3] Gunawan, H., Neswan, O., Setya-Budhi W. A Formula for Angles Between Two Subspaces of Inner Product
85 Spaces, *Beitrge Algebra Geom.* Vol. 46(2), 311-320, 2005
86 [4] Leon, S.J., *Aljabar Linear dan Aplikasinya*. Edisi ke-5. A. Bondan, Penerjemah; Erlangga. Terjemahan
87 dari Linear Algebra with Applications, 1998
88 [5] Nair, M Thamban, 2009, *Linear operator equations: Approximation and regularization*, World Scientific
89 [6] Partington, J.R., 1988, *An introduction to Hankel operators*, volume 13, Cambridge University Press