Open Journal of Mathematics and Physics | Volume 3, Article 218, ISSN: 2674-5747
https://doi.org/10.31219/osf.io/sq68x | published: 14 Mar 2021 | https://ojmp.org

[white paper]
Diamond Open Access [aguardando revisão pelos pares]

H é um subgrupo aditivo de $\mathbb{Z}$ se e somente se existe $m\mathbb{Z}$

Colaboração Matemática Aberta[1]

31 de Março de 2021

Resumo

Mostramos, passo a passo, que H é um subgrupo de Z se e somente se existe um m tal que H = {km|k em Z}.

palavras-chave: subgrupo, teoria de grupos, álgebra abstrata

A versão mais atualizada deste artigo está disponível em
https://osf.io/sq68x/download

Introdução

1. [1–11]

2. Em (1), está uma seleção de *excelentes livros*, **introdutórios** [1–4] e **avançados** [5–11], para os interessados em se aprofundar nas técnicas de demonstrações [1, 2] em diversas áreas da matemática [2–11].

[1]Todos os autores com suas afiliações aparecem no final deste artigo.

Notação

3. $i \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$
4. $A \subseteq B$ significa "A é **subconjunto** de B".
5. $A \subset B$ significa "A é **subconjunto próprio** de B".
6. $(\mathbb{Z}, +) :\equiv$ **grupo** *aditivo*
7. $H \leq \mathbb{Z}$ significa que H é um **subgrupo** de $\mathbb{Z}$.
8. $H = \{km \mid k \in \mathbb{Z}\} = m\mathbb{Z}$, com $m \in H$.

Teorema

9. $$((H, +) \leq (\mathbb{Z}, +)) \leftrightarrow (\exists m \in H)$$
10. [12]

Demonstração do Teorema (9)

11. $(\rightarrow)$
12. Precisamos mostrar que $H = \{km \mid k \in \mathbb{Z}\}$, provando $H \subseteq \{km \mid k \in \mathbb{Z}\}$ e $\{km \mid k \in \mathbb{Z}\} \subset H$.
13. Note que $\{km \mid k \in \mathbb{Z}\}$ é o conjunto dos múltiplos de m.
14. Primeiro, vamos provar que $\{km \mid k \in \mathbb{Z}\} \subseteq H$.
15. Suponha que $H \leq \mathbb{Z}$, isto é, H é um subgrupo de $\mathbb{Z}$.
16. Seja, por hipótese, $0 \neq m \in H$.
17. De (15), H é um grupo.

18. De (17), o elemento neutro $0 \in H$.

19. De (17), H é fechado, como $m \in H$, então $m + m = 2m \in H$, $m + 2m = 3m \in H$, $m + 3m = 4m \in H$, ...

20. De (17), todos os elementos de H têm inversa (simétrico).

21. De (19) e (20), $-m \in H$, $-2m \in H$, $-3m \in H$, ...

22. De (18), (19) e (21), $\{km \mid k \in \mathbb{Z}\} \subseteq H$.

23. Agora, vamos provar que $H \subseteq \{km \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

24. Sejam $h_1, h_2 \in H$.

25. De (15), $H \subseteq \mathbb{Z}$.

26. De (25), podemos escrever $h_1 = k_1 m$ e $h_2 = k_2 m$, com $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

27. De (17), $h_1 + h_2 \in H$, então $(k_1 + k_2)m = k_3 m = h_3 \in H$, com $k_3 \in \mathbb{Z}$.

28. Portanto, $H \subseteq \{km \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

29. De (22) e (28), $H = \{km \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

30. $(\leftarrow)$

31. Suponha que $\exists m \in H = \{km \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

32. De (31), $H \subseteq \mathbb{Z}$.

33. De (9) e (31), o próximo passo é mostrar que H satisfaz os axiomas de um grupo aditivo (associatividade, identidade, inversa).

34. (36) mostra que a adição é fechada em H, isto é,

$$+ : H \times H \to H.$$

35. (37) e (38) mostram a <u>associatividade</u>, <u>identidade</u> (elemento neutro) e <u>inversa</u> (simétrico) de H.

36. De (31), $k_1m + k_2m = (k_1 + k_2)m = k_3m \in H$ com $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$.

37. Como a operação da adição é associativa em $\mathbb{Z}$, logo ela é associativa em H, que é um subconjunto de $\mathbb{Z}$.

38. De (31), $H = \{km \mid k \in \mathbb{Z}\}$; como $k \in \mathbb{Z}$, $0 \in \mathbb{Z}$, então

    (a) $0 \in H$ e $0 + km = km + 0 = km \in H$,

    (b) $\exists k' = -k$ tal que $k'm + km = km + k'm = 0$.

39. Portanto, H é um grupo.

40. De (32) e (39), $H \leq \mathbb{Z}$.

Considerações Finais

41. Todos os números inteiros são múltiplos dos números inteiros.

42. (41) é uma informação fundamental para compreender o teorema (9) em um nível mais profundo.

Ciência Aberta

O **arquivo latex** para este artigo, juntamente com outros *arquivos suplementares*, estão disponíveis em [13]. Seja coautor(a) deste artigo, envie sua contribuição para `mplobo@uft.edu.br`.

Consentimento

43. Os autores **concordam** com [14].

Como citar este artigo?

44. [15]

Referências

[1] Velleman, Daniel J. *How to prove it: A structured approach*. Cambridge University Press, 2019.
https://books.google.com/books?vid=ISBN0521861241

[2] Warner, Steve. *Pure Mathematics for Beginners*. GET 800, 2018.
https://books.google.com/books?vid=dcWrvAEACAAJ

[3] Warner, Steve. *Abstract Algebra for Beginners*. GET 800, 2018.
https://books.google.com/books?id=UFleyAEACAAJ

[4] Warner, Steve. *Topology for Beginners*. GET 800, 2019.
https://books.google.com/books?id=pNAvxQEACAAJ

[5] Dummit, David Steven, and Richard M. Foote. *Abstract Algebra*. Vol. 3. Hoboken: Wiley, 2004.
https://books.google.com/books?id=znzJygAACAAJ

[6] Rotman, Joseph J. *A first course in abstract algebra*. Pearson College Division, 2000.
https://books.google.com/books?id=ctEZAQAAIAAJ

[7] Munkres, James R. *Topology*, 2nd ed. Prentice Hall, 2000.
https://books.google.com/books?id=XjoZAQAAIAAJ

[8] Cain, Alan J. *Nine Chapters on the Semigroup Art*. AJC Porto & Lisbon, 2020. http://www-groups.mcs.st-and.ac.uk/alanc

[9] Stillwell, John. *Roads to Infinity: The mathematics of truth and proof*. CRC Press, 2010.
https://books.google.com/books?id=XvPRBQAAQBAJ

[10] Leary, Christopher C., and Lars Kristiansen. *A friendly introduction to mathematical logic*, 2nd edition, 2015.
https://knightscholar.geneseo.edu/geneseo-authors/6/

[11] Nagel, Ernest, James R. Newman, and Douglas R. Hofstadter. *Gödel's Proof*. NYU Press, 2001.
https://books.google.com/books?vid=-sQ5Z-lxqnIC

[12] Domingues, Hygino H., Iezzi, Gelson. *Álgebra Moderna*, 4a edição reformulada. Atual Editora, 2003.
https://books.google.com/books?vid=e9JiDwAAQBAJ

[13] Lobo, Matheus P. "Open Journal of Mathematics and Physics (OJMP)." *OSF*, 21 Apr. 2020.
https://doi.org/10.17605/osf.io/6hzyp

[14] Lobo, Matheus P. "Simple Guidelines for Authors: Open Journal of Mathematics and Physics." *OSF Preprints*, 15 Nov. 2019.
https://doi.org/10.31219/osf.io/fk836

[15] Lobo, Matheus P. "H É Um Subgrupo Aditivo De Z Se E Somente Se Existe Mz." *OSF Preprints*, 12 Mar. 2021.
https://doi.org/10.31219/osf.io/sq68x

Colaboração Matemática Aberta

Matheus Pereira Lobo (autor principal, mplobo@uft.edu.br)[1,2]
https://orcid.org/0000-0003-4554-1372

Pedro José Florencio da Silva[1]
Fernanda Vasconcelos Cavalcante[1]
Juliana Barcelos Pereira[1]

[1]Universidade Federal do Tocantins (Brasil)
[2]Universidade Aberta (UAb, Portugal)