Prinsip Maksimum Pontryagin Dalam Masalah Kontrol Optimum Stokastik

Effendi Syahril

-

Departemen Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Institut Pertanian Bogor
Jl. Meranti, Kampus IPB Darmaga, Bogor, 16680 Indonesia

ABSTRAK

Kontrol Optimum Stokastik merupakan cabang matematika yang relatif baru perkembangannya. Terdapat dua pendekatan untuk menentukan solusi masalah kontrol optimum stokastik, yaitu prinsip maksimum Pontryagin dan program dinamis Bellman. Tulisan ini menyajikan prinsip maksimum untuk masalah kontrol optimum stokastik dan aplikasinya dalam masalah portofolio dan konsumsi. Merton(1971) menyelesaikan masalah konsumsi dan portofolio dengan menggunakan pendekatan program dinamis. Dengan hasil yang diperoleh oleh Merton sebagai patokan, masalah konsumsi dan portofolio diselesaikan dengan pendekatan prinsip maksimum.

Kata Kunci. Prinsip Maksimum Stokastik, peubah adjoint, masalah konsumsi dan portofolio.

1 Pendahuluan

Teori kontrol optimum stokastik merupakan cabang ilmu matematika yang masih relatif baru apabila dibandingkan dengan teori kontrol optimum deterministik. Studi tentang kontrol optimum stokastik ini baru berjalan dalam beberapa dekade terakhir. Namun demikian, penggunaan kontrol optimum stokastik sangat menarik. Aplikasi kontrol optimum stokastik sangat luas, antara lain pada bidang-bidang teknik/rekayasa, pengendalian satelit, keuangan, ekonomi, masalah produksi dan

inventori, dan masalah konsumsi sumber daya alam, seperti yang dapat dilihat dalam Benes, Shepp dan Witsenhausen (1980), Bensoussan, Hurst dan Naslund (1974), Bensoussan, Kleindorfer dan Tapiero (1980), Merton (1971), Sethi dan Thompson (1981). Pada umumnya, aplikasi kontrol optimum tersebut menggunakan pendekatan program dinamis. Sedangkan penggunaan prinsip maksimum dapat dilihat pada Haussmann (1981).

Masalah kontrol optimum stokastik yang menjadi perhatian dalam tulisan ini adalah dalam bentuk berikut ini : Ingin diminimumkan fungsi ongkos/biaya

$$J(u(t)) = E(\int_0^T f(x(t), u(t), t)dt + S(x(T))) \quad (1)$$

dengan kendala dalam bentuk persamaan diferensial stokastik atau persamaan diferensial Itô

$$\begin{aligned} dx(t) &= \alpha(x(t), u(t), t)dt + \sigma(x(t), u(t), t)dB(t) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \quad (2)$$

dengan $u(t)$ adalah fungsi peubah kontrol yang nilainya terdapat dalam himpunan bagian tertutup R^m , peubah $x(t)$ merupakan trajektori, $B(t)$ adalah gerak Brown standar, E melambangkan nilai harapan, serta f, S, α dan σ adalah fungsi-fungsi yang diberikan. Dalam persamaan diferensial Itô, fungsi α dan fungsi σ berturut-turut disebut sebagai koefisien drift dan koefisien difusi.

Tulisan ini memiliki 2 tujuan. Tujuan pertama adalah untuk menyajikan prinsip maksimum yang memiliki peranan penting dalam kontrol optimum- stokastik. Prinsip maksimum dalam masalah kontrol optimum stokastik telah ditelaah, seperti yang dilaporkan dalam beberapa makalah, misalnya dalam Kushner (1972), Haussmann (1981), (1986), Bensoussan (1982a) dan Bensoussan, et. al. (1974). Namun demikian, dalam tulisan tersebut, peubah kontrol hanya terdapat dalam koefisien drift. Sehingga, teknik prinsip maksimum ini tidak dapat digunakan untuk, misalnya masalah konsumsi dan portofolio, seperti yang dikembangkan oleh Merton (1971). Untungnya, dalam tulisan mereka yang sangat menarik, Bensoussan (1982b), Elliott (1990) dan Peng (1990) merumuskan prinsip maksimum untuk masalah kontrol optimum stokastik apabila kontrol juga terdapat dalam koefisien difusi. Bensoussan (1982b) memfokuskan pembahasan pada masalah kontrol optimum stokastik untuk masalah dengan himpunan kontrol *admissible* merupakan himpunan konveks. Akan tetapi, perhitungan Bensoussan ini terlalu rumit karena melibatkan integran stokastik yang tidak diketahui. Elliott (1990) membuat perhitungan menjadi lebih sederhana dengan menggunakan hasil-hasil pada sifat diferensiabel solusi persamaan diferensial stokastik yang bergantung pada parameter. Sementara Peng (1990) membahas masalah kontrol optimum stokastik untuk himpunan kontrol *admissible* yang tidak harus dalam bentuk konveks.

62 Tujuan kedua tulisan ini adalah menyajikan aplikasi prinsip maksimum pada masalah
 63 khusus, yaitu masalah konsumsi dan portofolio. Merton (1971) merupakan orang
 64 pertama yang menentukan solusi dari masalah ini. Teknik kontrol optimum yang
 65 digunakan oleh Merton adalah pendekatan program dinamis. Dengan menurunkan
 66 persyaratan keoptimalan, Merton berhasil menentukan solusi masalah konsumsi
 67 dan portofolio tersebut secara eksplisit. Dengan menggunakan solusi yang diper-
 68 oleh Merton sebagai patokan, akan ditentukan solusi masalah konsumsi dan porto-
 69 folio dengan menggunakan prinsip maksimum.
 70 Sistematika penulisan selanjutnya adalah sebagai berikut. Dalam bagian kedua
 71 disajikan prinsip maksimum stokastik. Pada bagian ketiga disajikan masalah kon-
 72 sumpsi dan portofolio serta solusinya seperti yang dikembangkan oleh Merton. Se-
 73 lanjutnya dalam bagian keempat digunakan prinsip maksimum untuk menyele-
 74 saikan masalah konsumsi dan portofolio Merton. Pada bagian terakhir, diberikan
 75 kesimpulan dan diskusi tentang hasil-hasil pada prinsip maksimum.

76 **2 Prinsip Maksimum Stokastik**

77 Masalah kontrol optimum stokastik yang akan menjadi pokok bahasan adalah
 78 dalam bentuk berikut ini :
 79 Minimumkan fungsi biaya

$$J[u(t)] = E \left\{ \int_0^T f[x(t), u(t), t] dt + S[x(T)] \right\} \quad (3)$$

80 dengan kendala dalam bentuk persamaan diferensial stokastik

$$\begin{aligned}
 dx(t) &= \alpha(x(t), u(t), t)dt + \sigma(x(t), u(t), t)dB(t) \\
 x(0) &= x_0
 \end{aligned} \quad (4)$$

81 Dalam masalah kontrol optimum stokastik di atas, $u(t)$ merupakan peubah kon-
 82 trol yang nilainya terdapat dalam himpunan bagian dari R^m , yang bersifat ter-
 83 tutup dan konveks, sedangkan $x(t)$ merupakan trajektori atau peubah keadaan
 84 (state) dari sistem, $B(t)$ adalah gerak Brown dalam bentuk standar, operator E
 85 merepresentasikan nilai harapan matematika, dan f , S , α , dan σ merupakan
 86 fungsi-fungsi yang diberikan. Dalam bagian ini akan disajikan syarat perlu untuk
 87 adanya kontrol optimum, yang dikenal dengan prinsip maksimum. Juga dibicara-
 88 kan ketersediaan syarat cukup untuk kontrol supaya menjadi kontrol optimum.
 89 Terdapat banyak kajian yang berkaitan dengan penurunan syarat perlu untuk
 90 adanya kontrol optimum. Beberapa diantaranya adalah kajian dari Kushner (1972),
 91 Bensoussan (1982), Bensoussan, et.al (1974), Haussmann (1986), Elliott (1990)
 92 dan Peng (1990). Untuk masalah kontrol optimum stokastik dengan koefisien

93 difusi konstanta, Bensoussan, et.al (1974) menurunkan prinsip maksimum meng-
 94 gunakan pendekatan program dinamis. Penurunan ini, menghasilkan himpunan
 95 kontrol yang *admissible* berupa himpunan konveks, yang berujung pada syarat
 96 cukup untuk kontrol optimum. Sementara itu, untuk masalah kontrol optimum
 97 stokastik dengan koefisien difusi hanya bergantung pada waktu t dan peubah state
 98 $x(t)$, penurunan syarat perlu dapat ditemukan dalam Kushner (1972), Hausmann
 99 (1986) dan juga dalam Bensoussann (1982). Kajian Hausmann (1986) menun-
 100 jukkan bahwa dengan persyaratan tertentu, seperti himpunan kontrol yang *admis-*
 101 *sible* berupa himpunan konveks, prinsip maksimum juga merupakan syarat cukup
 102 untuk kontrol optimum.

103 Untuk masalah kontrol optimum stokastik dengan bagian difusi dibolehkan bergan-
 104 tung pada peubah kontrol, penurunan prinsip maksimum diinvestigasi oleh Ben-
 105 soussann (1982), Elliott (1990) dan Peng (1990). Bensoussann dan Elliott mem-
 106 fokuskan pembahasan mereka pada masalah kontrol optimum stokastik dengan
 107 himpunan kontrol *admissible* berupa himpunan konveks. Pada kenyataannya, El-
 108 liott membuat penyederhanaan perhitungan Bensoussann. Sementara itu Peng
 109 (1990) membahas prinsip maksimum untuk masalah kontrol optimum stokastik
 110 yang lebih umum, yaitu untuk masalah kontrol dengan himpunan kontrol yang
 111 admissibel tidak harus berupa himpunan konveks.

112 Dari pembahasan di atas dapat disimpulkan bahwa banyak cara untuk menurunkan
 113 prinsip maksimum, misalnya melalui prinsip keoptimalan Bellman. Penurunan
 114 dalam tulisan ini mengikuti pendekatan yang digunakan oleh Bensoussann. Alasan
 115 utama adalah karena kajian Bensoussann merupakan referensi yang sudah baku.
 116 Selain itu, penyajian Bensoussann relatif mudah diikuti, dan yang lebih penting
 117 lagi, metode Bensoussann memenuhi kriteria aplikasi masalah yang akan dibahas
 118 dalam tulisan ini.

119 2.1 Perumusan Masalah

120 Misalkan (Ω, F, P) merupakan ruang peluang yang dilengkapi dengan filtrasi F^t .
 121 Misalkan $B(t)$ merupakan gerak Brown standar yang nilainya terdapat di R^n . Kita
 122 asumsikan bahwa

$$F^t = \{ B(s) : 0 \leq s \leq t \} \quad (5)$$

123 adalah σ -aljabar yang dibangun oleh $B(t)$.

124 Perhatikan sistem kontrol stokastik

$$\begin{aligned} dx(t) &= \alpha(x(t), u(t), t)dt + \sigma(x(t), u(t), t)dB(t) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \quad (6)$$

125 dan asumsikan fungsi α dan σ keduanya fungsi kontinu dan terturunkan terhadap
 126 x dan u , dan juga asumsikan $\alpha_x, \alpha_u, \sigma_x, \sigma_u$ merupakan fungsi-fungsi terbatas.

127 Misalkan $L_F^2(0, t) = \{u(t) \in L^2(\Omega, F^t, P; R^m)\}$ merupakan ruang bagian Hilbert
 128 dari L^2 . Misalkan U_{ad} berupa himpunan bagian dari R^m , dan U_{ad} adalah himpunan
 129 tak hampa, tertutup, dan konveks. Definisikan himpunan semua kontrol yang
 130 *admissible*

$$U = \{u \in L_F^2(0, T) : u(t) \in U_{ad}, a.e., a.s.\}$$

131 **Catatan :** *a.e.* merupakan singkatan untuk *almost every where*, sedangkan *a.s.*
 132 merupakan singkatan untuk *almost surely*.

133 **Remark 2.1** Himpunan kontrol *admissible* U adalah himpunan konveks dan ter-
 134 tutup dan $U \subset L_F^2(0, T)$.

135 **Remark 2.2** Karena asumsi bahwa $\alpha(x, u, t)$ dan $\sigma(x, u, t)$ kontinu dan tertu-
 136 runannya serta turunannya terhadap x dan u terbatas, maka untuk sebarang kontrol
 137 *admissible* $u \in U$, persamaan diferensial stokastik sistem kontrol persamaan (6)
 138 dapat ditentukan solusinya.

139 Misalkan diasumsikan $f(x, u, t)$ berupa fungsi kontinu dan terturunkan serta tu-
 140 runannya terhadap x dan u terbatas. Juga diasumsikan bahwa fungsi S meru-
 141 pakan fungsi kontinu dan terturunkan serta turunan terhadap x terbatas. Masalah
 142 kontrol optimum stokastik dapat dituliskan menjadi masalah meminimumkan fung-
 143 sional biaya diantara kontrol *admissible* U

$$J[u(t)] = E \left\{ \int_0^T f(x(t), u(t), t) dt + S(x(T)) \right\} \quad (7)$$

144 terhadap kendala

$$dx(t) = \alpha(x(t), u(t), t) dt + \sigma(x(t), u(t), t) dB(t) \quad (8)$$

$$x(0) = x_0 \quad (9)$$

145 **Remark 2.3** Walaupun masalahnya berupa meminimumkan biaya, teknik dalam
 146 literatur tetap disebut prinsip maksimum.

147 **Notasi :** Notasi berikut akan digunakan dalam pembahasan selanjutnya :

- 148 1. Operator '*' menyatakan transpos
- 149 2. Operator $\langle ., . \rangle$ menyatakan hasil kali dalam atau *inner product*

2.2 Prinsip Maksimum Stokastik

Pada bagian ini disajikan syarat perlu untuk kontrol optimum stokastik, yang dikenal dengan Prinsip Maksimum Stokastik. Teorema berikut ini muncul pertama kali dalam Peng(1990).

Theorem 2.4 (*Prinsip Maksimum Stokastik*)

Diberikan masalah kontrol optimum stokastik yang meminimumkan fungsional objektif persamaan (7) terhadap kendala persamaan (9) dan semua asumsi seperti sebelumnya dipenuhi. Misalkan $u(t)$ suatu kontrol optimum, dan $x(t)$ merupakan trayektori optimal yang berkaitan dengan kontrol optimum seperti yang didefinisikan oleh persamaan (9). Peubah $p(t)$ menyatakan peubah adjoint yang didefinisikan oleh persamaan

$$\begin{aligned} -dp &= [(\alpha_x^* p + f_x) - \langle \sigma_x^*, K \rangle] + K dB(t) \\ p(T) &= S_x(x(T)) \end{aligned} \quad (10)$$

dengan K didefinisikan oleh

$$K(t) = \sigma_x^*(t)p(t) - \Psi^*(t)G(t) \quad (11)$$

dan matriks Ψ memenuhi persamaan diferensial

$$\begin{aligned} d\Psi &= -\langle \Psi \sigma_x, dB \rangle + [\langle \Psi \sigma_x, \sigma_x \rangle - \Psi \alpha_x] dt \\ \Psi(0) &= I, \end{aligned} \quad (12)$$

dengan I merupakan matriks identitas, sedangkan G memenuhi persamaan integral

$$E^{F^t} \{A\} = E\{A\} + \int_0^t G(s) dB(s), \quad (13)$$

dengan

$$A = Q^*(T)S_x(x(T)) + \int_0^T Q^*(s)f_x(x(s), u(s), s)ds \quad (14)$$

dan matriks Q memenuhi

$$\begin{aligned} dQ &= \alpha_x Q dt + \langle \sigma_x Q, dB \rangle \\ Q(0) &= I. \end{aligned} \quad (15)$$

Definisikan fungsi Hamilton dengan

$$H(x, u, t; p, K) = p \cdot \alpha(x, u, t) + f(x, u, t) - \text{tr} K \sigma^*(x, u, t) \quad (16)$$

maka diperoleh

$$\frac{\partial H}{\partial v}(x(t), u(t), t; p(t), K(t)) \cdot (v - u(t)) \geq 0, a.e.t, a.s., \forall v \in U. \quad (17)$$

169 **Bukti :** Bukti teorema ini dapat dilihat dalam Syahril (1991).

170 **Remark 2.5** *Persamaan adjoint (10) bergantung pada peubah stokastik yang tidak*
 171 *diketahui G yang didefinisikan oleh persamaan (13). Persamaan integrasi (13)*
 172 *ditemukan oleh Kunita-Watanabe, seperti yang dilaporkan oleh Peng(1990). San-*
 173 *gat sulit untuk menentukan solusi persamaan adjoint (10).*

174 Untuk menghindari kesulitan tersebut, Elliott (1990) menemukan representasi
 175 yang sangat elegan untuk peubah adjoint p . Menurut Elliott(1990), peubah adjoint
 176 haruslah memenuhi persamaan

$$\begin{aligned} p_t(t) &+ p_x(t)g(t) + l_x(t) + p(t)g_x(t) \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n p_{xx}(t)\sigma^{(i)}(t) \times \sigma^{(i)}(t) = 0, \\ p(T) &= h_x(x(T)). \end{aligned} \quad (18)$$

177 Fungsi Hamilton yang bersesuaian diberikan oleh

$$H(x, v, t, p) = pg(x, v, t) + l(x, v, t) + \sum_{i=1}^n p_x(t)\sigma^{(i)}(x, u, t)\sigma^{(i)}(x, v, t), \quad (19)$$

178 dan prinsip maksimum diberikan oleh

$$\frac{\partial H}{\partial v}(x(t), u(t), t, p \cdot (v - u(t))) \geq 0 \quad (20)$$

179 a.e. t , hampir pasti untuk semua $v \in U$.

180 3 Masalah Portofolio dan Konsumsi

181 Dalam model pemilihan portofolio dan konsumsi, Merton (1971) merumuskan per-
 182 samaan kekayaan dalam bentuk persamaan diferensial stokastik. Persamaan ini
 183 dikenal dengan nama persamaan *budget*. Merton (1971) mengasumsikan harga aset
 184 memiliki distribusi log normal, sehingga cukup dilihat hanya 2 aset saja, yaitu aset
 185 bebas resiko dan aset beresiko. Harga setiap aset bebas resiko, dilambangkan oleh
 186 $P_1(t)$, berkembang mengikuti persamaan diferensial biasa

$$dP_1(t) = rP_1(t)dt \quad (21)$$

187 dengan r menyatakan *rate of return* atau tingkat imbal hasil, sedangkan harga aset
 188 beresiko, dilambangkan oleh $P_2(t)$, berkembang mengikuti persamaan diferensial
 189 stokastik

$$dP_2(t) = \alpha P_2(t)dt + \sigma P_2(t)dB(t), \quad (22)$$

190 dengan α melambangkan rata-rata perubahan harga per satuan waktu, dan
 191 σ melambangkan variansi dari perubahan harga per satuan waktu. Parameter
 192 r, α, σ adalah konstanta dan $\{B(t) : t \geq 0\}$ merepresentasikan gerak Brown
 193 bernilai real.

194 Misalkan $W(t)$, $t \geq 0$ menyatakan kekayaan pada waktu t dari pemodal yang
 195 menginvestasikan kekayaannya pada kedua tipe aset di atas. Misalkan $u_1(t)$ meny-
 196 atakan proporsi kekayaan yang diinvestasikan pada aset beresiko pada waktu t ,
 197 dan $u_2(t)$ menyatakan tingkat konsumsi pada waktu t . Maka persamaan *budget*
 198 atau kekayaan pemodal tersebut adalah

$$\begin{aligned} dW(t) &= [1 - u_1(t)]W(t)r dt + u_1(t)W(t)[\alpha dt + \sigma dB(t)] \\ &\quad - u_2(t)dt \\ W(0) &= W_0, \end{aligned} \quad (23)$$

199 dengan $W_0 > 0$ menyatakan jumlah kekayaan awal. Kontrol yang digunakan
 200 dalam masalah ini adalah kontrol 2-dimensi, $u(t) = (u_1(t), u_2(t))$, dengan batasan
 201 $0 \leq u_1(t) \leq 1$, dan $u_2(t) \geq 0$.

202 Masalah pemilihan portofolio dan konsumsi optimum bagi pemodal yang hidup
 203 sampai tahun ke- T dirumuskan sebagai berikut

$$J[u(t), t] = \max E \left\{ \int_0^T U[u_2(t), t] dt + S[W(T), T] \right\} \quad (24)$$

204 dengan kendala persamaan (23), dan fungsi utilitas U diasumsikan berupa fungsi
 205 konkaf (cembung) dalam u_2 , dan fungsi warisan S diasumsikan bersifat konkaf
 206 dalam W .

207 Misal diasumsikan fungsi utilitas untuk pemodal $U[u_2(t), t]$ dapat dituliskan dalam
 208 bentuk

$$U[u_2(t), t] = \exp(-\rho t) V[u_2(t)]$$

209 dengan $\rho > 0$ merupakan tingkat diskonto, fungsi V merupakan anggota fungsi-
 210 fungsi utilitas yang memiliki *risk-aversion* bersifat positif dan hiperbola dalam
 211 konsumsi. Fungsi V ini dapat dituliskan dalam bentuk

$$V[u_2(t)] = \frac{1-q}{q} \left[\frac{bu_2(t)}{1-q} + n \right]^q, \quad (25)$$

212 dengan batasan $q \neq 1$, $b > 0$, $\frac{bu_2(t)}{1-q} + n > 0$, $n = 1$ jika $q = -\infty$. Sehingga,
 213 dengan asumsi fungsi warisan $S = 0$, masalah pemilihan portofolio dan konsumsi
 214 optimum menjadi

$$J[u(t), t] = \max E \left\{ \int_0^T \exp(-\rho t) V[u_2(t)] dt \right\} \quad (26)$$

215 dengan kendala persamaan (23).

216 Menggunakan metode program dinamis stokastik, Merton (1971) menurunkan per-
217 syaratan keoptimalan

$$\begin{aligned} J_t + \left[\frac{(1-q)n}{b} + rW \right] J_W - \frac{(\alpha-r)^2}{2\sigma^2} \frac{J_W^2}{J_{WW}} \\ + \frac{(1-q)^2}{q} \exp(-\rho t) \left[\frac{\exp(\rho t) J_W}{b} \right]^{\frac{q}{1-q}} = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

218 dengan persyaratan $J(W, T) = 0$, dan fungsi $J(W, t)$ merupakan fungsi deter-
219 ministik. Suatu solusi dari persamaan diferensial parsial ordo dua (27) adalah

$$\begin{aligned} J(W, t) = & \frac{sb^q}{q} \exp(-\rho t) \left[\frac{s[1 - \exp(\frac{-(\rho-qv)(T-t)}{s})]}{-qv} \right]^s \\ & \times \left[\frac{W}{s} + \frac{n}{br} [1 - \exp(-r(T-t))] \right]^q \end{aligned} \quad (28)$$

220 dengan $s = 1 - q$, dan $v = r + \frac{(\alpha-r)^2}{2s\sigma^2}$.

221 Persamaan untuk portofolio dan konsumsi optimum adalah

$$u_2(t) = \frac{1-q}{b} \left(\frac{\exp(\rho t) J_W}{b} \right)^{\frac{1}{q-1}} - \frac{(1-q)n}{b} \quad (29)$$

$$u_1(t) = -\frac{(\alpha-r)}{\sigma^2} \frac{J_W}{J_{WW}W}. \quad (30)$$

222 Dari persamaan (28), (29) dan (30), portofolio dan konsumsi optimum dapat
223 dituliskan dalam bentuk eksplisit

$$u_2(t) = \frac{(\rho - qv)(W(t) + \frac{sn}{br}(1 - \exp([r(t-T)]))}{s(1 - \exp(\frac{(\rho-qv)(t-T)}{s}))} - \frac{sn}{b} \quad (31)$$

$$u_1(t) = \frac{\alpha - r}{s\sigma^2} + \frac{n(\alpha - r)}{br\sigma^2 W(t)} (1 - \exp(r(t-T))). \quad (32)$$

224 **Remark 3.1** Karakteristik utama dalam persamaan (31) adalah fungsi konsumsi
225 merupakan fungsi linier dari fungsi kekayaan, dan dalam persamaan (32) adalah
226 fungsi investasi berbanding terbalik dengan fungsi kekayaan.

227 **Remark 3.2** Fleming and Rishel (1975) menyelesaikan masalah portofolio dan
228 konsumsi untuk fungsi utilitas $U[u_2(t), t] = u_2^s$, $0 < s < 1$. Solusi optimum yang
229 diperoleh adalah $u_1^*(t)$ merupakan konstanta dan $u_2^*(t)$ merupakan fungsi linier
230 dalam kekayaan $W(t)$.

231 4 Aplikasi Prinsip Maksimum Stokastik Pada Model 232 Merton

233 Untuk aplikasi prinsip maksimum pada masalah Merton, dituliskan kembali masalah-
234 nya dalam bentuk berikut ini :

$$J[u(.)] = E\left\{\int_0^T -\frac{1-q}{q} \exp(-\rho t) \left[\frac{bu_2(t)}{1-q} + n\right]^q dt\right\} \quad (33)$$

235 dengan kendala persamaan kekayaan

$$\begin{aligned} dW(t) &= [rW(t) + (\alpha - r)W(t)u_1(t) - u_2(t)]dt \\ &\quad + \sigma W(t)u_1(t)dB(t) \\ W(0) &= W_0 \end{aligned} \quad (34)$$

236 Misalkan $u^*(t) = (u_1^*(t), u_2^*(t))$ sebagai kontrol optimum, dan $\hat{W}(t)$ merupakan
237 trajektori optimum yang berkaitan yang didefinisikan oleh

$$\begin{aligned} d\hat{W}(t) &= [r\hat{W}(t) + (\alpha - r)\hat{W}(t)u_1^*(t) - u_2^*(t)]dt \\ &\quad + \sigma \hat{W}(t)u_1^*(t)dB(t) \end{aligned} \quad (35)$$

$$\hat{W}(0) = W_0. \quad (36)$$

238 Peubah adjoint $p(t)$ merupakan solusi dari

$$\begin{aligned} -dp(t) &= [(r + (\alpha - r)u_1^*(t)p(t) - \sigma u_1^*(t), K >]dt + KdB(t) \\ p(T) &= 0. \end{aligned} \quad (37)$$

239 Menggunakan persamaan (16), diperoleh fungsi Hamilton

$$\begin{aligned} H(\hat{W}, u^*, t; p, K) &= [(r + (\alpha - r)u_1)\hat{W} - u^*]p \\ &\quad - \frac{(1-q)}{q} \exp(-\rho t) \left(\frac{bu_2^*}{1-q} + n\right)^q - \text{tr} K \sigma \hat{W} u_1^*. \end{aligned} \quad (38)$$

240 Dengan mengaplikasikan prinsip maksimum persamaan (17) pada fungsi Hamilton
241 persamaan (38), dan dengan membuat turunan H terhadap u_1 sama dengan nol,
242 menghasilkan

$$K = \frac{(\alpha - r)}{\sigma} p. \quad (39)$$

243 Turunan fungsi H terhadap u_2 sama dengan nol memberikan

$$p + b \exp(-\rho t) \left(\frac{bu_2^*}{1-q} + n\right)^{q-1} = 0. \quad (40)$$

244 Fleming dan Rishel (1975) dan Haussmann (1986) menunjukkan bahwa ada kontrol
 245 optimum dalam bentuk umpan balik. Berdasarkan ini, ingin dicari fungsi adjoint
 246 $p(t)$ demikian rupa sehingga dipenuhi

$$p(t) = -\frac{\partial L}{\partial W} \quad (41)$$

247 dengan $L(W, t)$ melambangkan fungsi deterministik yang tidak diketahui. Dengan
 248 menggunakan formula Itô pada persamaan (41) akan diperoleh

$$dp = -\left[\frac{\partial^2 L}{\partial t \partial W} + \frac{\partial^2 L}{\partial W^2} d\hat{W} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 L}{\partial W^3} d\hat{W}^2\right] \quad (42)$$

249 Dengan memanfaatkan $d\hat{W}$ seperti dalam persamaan (35), dan diaplikasikan pada
 250 persamaan (42), menghasilkan

$$\begin{aligned} dp &= -\left[\frac{\partial^2 L}{\partial t \partial W} + (r\hat{W} + (\alpha - r)\hat{W}u_1^* - u_2^*)\frac{\partial^2 L}{\partial W^2}\right. \\ &\quad \left.+ \frac{1}{2}\hat{W}^2 u_1^* \frac{\partial^3 L}{\partial W^3}\right]dt - \sigma\hat{W}u_1^* \frac{\partial^2 L}{\partial W^2} dB(t). \end{aligned} \quad (43)$$

251 Langkah selanjutnya, dengan mensubstitusi K yang didefinisikan dalam persa-
 252 maan (39) kedalam persamaan (37), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} -dp &= rpd t + \frac{\alpha - r}{\sigma} p dB(t) \\ p(T) &= 0. \end{aligned} \quad (44)$$

253 Dengan identifikasi persamaan (43) dan persamaan (44), koefisien $dB(t)$ mem-
 254 berikan

$$\hat{W}u_1^* \frac{\partial^2 L}{\partial W^2} = \frac{\alpha - r}{\sigma} p. \quad (45)$$

255 Karena menurut persamaan (41) $p(t) = -\frac{\partial L}{\partial W}$, maka didapat

$$u_1^* = -\frac{\partial L / \partial W}{\partial^2 L / \partial W^2} \frac{1}{W} \frac{(\alpha - r)}{\sigma^2}. \quad (46)$$

256 Dari persamaan (40) dan persamaan (41) diperoleh

$$u_2^* = -\frac{1-q}{b}n + \frac{1-q}{b}\left[\frac{\exp(\rho t)}{b} \frac{\partial L}{\partial W}\right]^{\frac{1}{q-1}}. \quad (47)$$

257 Dengan cara yang sama, identifikasi persamaan (43) dan persamaan (44), koefisien
 258 dt menghasilkan

$$-r \frac{\partial L}{\partial W} = \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial W} + [r\hat{W} + (\alpha - r)\hat{W}u_1^* - u_2^*] \frac{\partial^2 L}{\partial W^2} + \frac{1}{2} \sigma^2 \hat{W}^2 u_1^{*2} \frac{\partial^3 L}{\partial W^3}. \quad (48)$$

259 Dengan memanfaatkan nilai u_1^* dan nilai u_2^* , dan tanpa kehilangan sifat keumuman,
 260 maka dapat ditunjukkan bahwa

$$\begin{aligned} L_t + [r\hat{W} + \frac{(1-q)}{b}n]L_W - \frac{(\alpha-r)^2}{2\sigma^2} \frac{L_W^2}{L_{WW}} - \frac{(1-q)}{b} \\ + [\frac{\exp(\rho t)}{b}L_W]^{\frac{1}{(q-1)}} L_W \frac{1-q}{q} \exp(-\rho t) [\frac{\exp(\rho t)}{b}L_W]^{\frac{q}{q-1}} = 0. \end{aligned} \quad (49)$$

261 Persamaan ini tidak lain adalah persyaratan keoptimalan seperti persamaan (27)
 262 yang diturunkan dengan prinsip program dinamis stokastik. Dengan menggunakan
 263 solusi yang diberikan dalam persamaan (28) untuk persamaan (49), maka dapat
 264 ditemukan solusi untuk masalah portofolio dan konsumsi. Solusinya diberikan oleh
 265 persamaan (31) dan persamaan (32).

266 **Remark 4.1** *Untuk masalah khusus ini, prinsip maksimum tidak memberikan*
 267 *bentuk tertutup untuk kontrol u_1^* , karena fungsi Hamilton merupakan fungsi lin-*
 268 *ier dalam u_1^* . Sebaliknya, karena fungsi Hamilton bukan fungsi linier dalam u_2^* ,*
 269 *maka prinsip maksimum menghasilkan fungsi kontrol optimum u_2^* dalam bentuk*
 270 *tertutup.*

271 **Remark 4.2** *Untuk memperoleh u_1^* digunakan teknik lain. Teknik ini berdasarkan*
 272 *pada kenyataan bahwa kontrol optimum dapat dituliskan dalam bentuk tertutup,*
 273 *seperti yang dinyatakan oleh Fleming and Rishel (1975). Teknik yang digunakan*
 274 *diawali dengan asumsi bahwa fungsi adjoint merupakan fungsi turunan dari fungsi*
 275 *deterministik yang belum diketahui. Teknik ini berujung pada penentuan kriteria*
 276 *keoptimalan seperti yang dihasilkan oleh teknik program dinamis stokastik.*

277 Dengan mengaplikasikan hasil yang diperoleh Elliott (1990), yaitu persamaan (18)
 278 dan persamaan (19) terhadap masalah portofolio dan konsumsi sebagaimana yang
 279 dikembangkan oleh Merton, maka diperoleh proses adjoint p yang memenuhi

$$\begin{aligned} p_t + [r + (\alpha - r)u_1^*]p + [r\hat{W} + (\alpha - r)\hat{W}u_1^* - u_2^*]p_W \\ + \frac{1}{2}\sigma^2\hat{W}^2u_1^{*2}p_{WW} = 0, \end{aligned} \quad (50)$$

$$p(T) = 0. \quad (51)$$

280 Fungsi Hamilton diberikan dalam bentuk

281

$$\begin{aligned} H(W, u, t, p) = -\frac{1-q}{q} \exp(-\rho t) [\frac{bu_2(t)}{1-q} + n]^q + [r\hat{W} \\ + (\alpha - r)\hat{W}u_1 - u_2]p + \sigma^2\hat{W}^2u_1^2p_W. \end{aligned} \quad (52)$$

282 Pada gilirannya, fungsi Hamilton memberikan kontrol optimum

$$u_1^*(t) = -\frac{(\alpha - r)p(t)}{2\sigma^2\hat{W}p_W} \quad (53)$$

$$u_2^*(t) = -\frac{1-q}{b}n + \frac{1-q}{b}[-\exp(\rho t)p(t)]^{\frac{1}{q-1}}. \quad (54)$$

283

284 5 Kesimpulan dan Diskusi

285 Telah disajikan syarat perlu, yang disebut dengan prinsip maksimum, untuk masalah
 286 kontrol optimum stokastik dengan fungsi kontrol terdapat dalam koefisien drift
 287 maupun koefisien difusi. Masalah kontrol optimum stokastik yang dibahas meru-
 288 pakan masalah kontrol optimum dengan kontrol *admissible* berupa himpunan kon-
 289 veks. Kunci utama dalam prinsip maksimum dalam masalah kontrol optimum
 290 stokastik adalah peubah adjoint. Penyajian peubah adjoint dalam tulisan ini, dan
 291 juga penyajian prinsip maksimum, mengikuti penyajian yang diberikan oleh Ben-
 292 soussan (1982). Penyajian Bensoussan mengenai peubah adjoint, demikian rupa
 293 sehingga peubah adjoint memenuhi persamaan diferensial Itô. Akan tetapi, penya-
 294 jian Bensoussan ini memunculkan kesulitan dalam penghitungan, karena persa-
 295 maan diferensial yang dipenuhi melibatkan penghitungan fungsi integran stokastik
 296 yang tidak diketahui. Nyatanya, kesulitan penghitungan yang muncul karena Ben-
 297 soussan menggunakan hasil martingale yang ditemukan oleh Kunita-Watanabe.
 298 Dengan demikian, karena kerumitan yang timbul, aplikasi prinsip maksimum, pal-
 299 ing tidak untuk masalah portofolio dan konsumsi optimum, tidak lebih baik dari
 300 teknik program dinamis stokastik.

301 Dalam tulisannya yang sangat menarik, Elliott (1990) berhasil mengatasi keru-
 302 mitan penghitungan Bensoussan mengenai peubah adjoint dengan cara menggu-
 303 nakan sifat dapat diturunkannya (*differentiability*) persamaan diferensial stokas-
 304 tik. Penyederhanaan yang dilakukan Elliott terutama bergantung pada penya-
 305 jian fungsi integran stokastiknya Bensoussan. Ternyata, penyajian peubah adjoint
 306 memenuhi persamaan diferensial parsial yang bersifat bukan stokastik.

307 Salah satu hasil penting yang ingin dikemukakan disini adalah bahwa terdapat
 308 hubungan antara prinsip maksimum dengan program dinamis. Terdapat dua cara
 309 dalam mempelajari masalah kontrol optimum stokastik : menggunakan prinsip
 310 maksimum yang dikembangkan oleh Pontryagin yang melibatkan proses adjoint
 311 p , dan dengan menggunakan program dinamis yang dikembangkan oleh Bellman

yang melibatkan fungsi nilai V . (Definisi fungsi nilai V dapat ditemukan dalam Fleming and Rishel (1975) dan Zhou (1990)). Secara umum, hubungan yang terdapat antara kedua pendekatan ini bersifat demikian rupa sehingga ada hubungan yang erat antara peubah adjoint p dan fungsi nilai V . (Untuk detilnya dapat dilihat dalam Zhou (1990)). Elliott(1990) menyatakan bahwa hubungan tersebut demikian rupa sehingga $p_x = V_{xx}$.

Daftar Pustaka

- [1] V.E. Benes, L.A. Shepp and Witsenhausen, 1980, Some Solvable Stochastic Control Problems, Stochastics, vol. 4, pp.39-83
- [2] A. Bensoussan, 1982a, Lectures on Stochastic Control, Lecture notes in Mathematics, vol. 972, pp.1-39
- [3] A. Bensoussan, 1982b, Stochastic Control by Functional Analysis Methods, North-Holland, Amsterdam
- [4] A. Bensoussan, 1986, Current Results and Issues in Stochastic Control, Lecture Notes in Control and Information Sciences, vol. 78, pp. 36-88
- [5] A Bensoussan, E.G. Hurst and B. Naslund, 1974, Management Applications of Modern Control Theory, North-Holland, Amsterdam
- [6] A. Bensoussan, P. Kleindorfer and C. Tapiero, eds., 1980, Applied Stochastic Control in Econometrics and Management Science, North-Holland, Amsterdam
- [7] R.J. Elliott, 1990, The Optimal Control of Diffusions, Applied Mathematics and Optimization, vol. 22, pp. 229-240
- [8] R.J. Elliott and M. Kohlmann, 1988, A Short Proof of Martingale Representation Result, Statistics & Probability Letters, 6, pp. 327-329
- [9] W.H. Fleming and R.W. Rishel, 1975, Deterministic and Stochastic Optimal Control, Springer-Verlag, New York
- [10] U.G. Haussmann, 1981 Some Examples of Optimal Stochastic Controls or : The Stochastic Maximum Principle at Work, SIAM Review, vol. 23, No. 3, July, pp. 292-307
- [11] U.G. Haussmann, 1986, A Stochastic Maximum Principle for Optimal Control of Diffusions, Pitman Research Notes in Mathematics Series, vol. 151
- [12] H.J Kushner, 1972, Necessary Conditions for Continuous Parameter Stochastic Optimization Problems, SIAM Journal Control, vol. 10, No. 3, August, pp. 550-564

- 344 [13] R.C. Merton, 1971, Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-
345 Time Model, Journal of Economic Theory, No. 3, December, pp. 373-413
- 346 [14] B. Oksendal, 1985, Stochastic Differential Equations, Springer-Verlag, Berlin
- 347 [15] S. Peng, 1990, A General Stochastic Maximum Principle for Optimal Control Prob-
348 lems, SIAM Journal Control and Optimization, vol. 28, No. 4, July, pp. 966-979
- 349 [16] S.P. Sethi and G.L. Thompson, 1981, Optimal Control Theory : Applications to
350 management Science, Martinus Nijhoff Publishing, Boston
- 351 [17] E. Syahril, 1991, A Maximum Principle in Stochastic Optimal Control, Graduate
352 Diploma Project, Department of Applied Mathematics, The University of Adelaide,
353 Adelaide
- 354 [18] X.Y. Zhou, 1990, The Connection Between the Maximum Principle and Dynamic
355 Programming in Stochastic Control, Stochastics and Stochastics Reports, vol. 31,
356 pp. 1-13

J M A

Jurnal Matematika dan Aplikasinya

Volume 1, No. 2
Desember 2002

Alamat Redaksi :
Departemen Matematika
FMIPA –Institut Pertanian Bogor
Jln. Meranti Kampus IPB Dramaga
Bogor

Phone/Fax: (0251) 625276
E-mail: math@ipb.ac.id

Essay on unified exposition of four major theorems in topology <i>Agah D. Garnadi</i>	1
A hidden Markov model: Dependencies between random variables and its representation <i>Berlian Setiawaty</i>	11
Prinsip maksimum pontryagin dalam masalah kontrol optimum stokastik <i>Effendi Syahril</i>	23
Discriminant functions and their misclassification errors <i>I Wayan Mangku</i>	37
Suatu formulasi Lagrange bagi gerak gelombang internal <i>Jaharuddin</i>	49

Essay on unified exposition of four major theorems in topology <i>Agah D. Garnadi</i>	1
A hidden Markov model: Dependencies between random variables and its representation <i>Berlian Setiawaty</i>	11
Prinsip maksimum pontryagin dalam masalah kontrol optimum stokastik <i>Effendi Syahril</i>	23
Discriminant functions and their misclassification errors <i>I Wayan Mangku</i>	37
Suatu formulasi Lagrange bagi gerak gelombang internal <i>Jaharuddin</i>	49