PEMBINAAN OLIMPIADE MATEMATIKA BAGI GURU-GURU SMP KABUPATEN MADIUN

BIDANG MATEMATIKA SMP

Disusun Oleh:

Mohammad Tohir

Guru SMP Negeri 2 Jember
dan

Mahasiswa S2 Pascasarjana Universitas Jember

**MGMP MATEMATIKA SMP KABUPATEN MADIUN
TAHUN 2016**

**PEMBINAAN OLIMPIADE MATEMATIKA
BAGI GURU-GURU MATEMATIKA SMP KABUPATEN MADIUN
TAHUN 2016**

A. Lingkup Materi

Lingkup materi berikut ini berdasarkan Silabus OSN SMP Tahun 2016, dimana cakupan materinya mengacu pada kurikulum 2006, KTSP, dan Kurikulum 2013 serta silabus olimpiade internasional. Adapun lingkup materinya sebagai berikut:

No.	Materi	Lingkup Materi
1.	Bilangan	<ol style="list-style-type: none">Operasi bilangan bulatSifat-sifat bilangan berpangkat
2.	Aljabar	<ol style="list-style-type: none">Himpunan<ol style="list-style-type: none">Pengertian dan notasi himpunanOperasi himpunanRelasi dan fungsi<ol style="list-style-type: none">Pengertian relasi dan fungsiGrafik fungsiOperasi fungsi linear dan kuadratFungsi kuadrat dan sifat-sifatnyaPerbandingan senilai dan berbalik nilaiOperasi aljabar melibatkan bilangan rasional, bilangan berpangkat, bilangan berbentuk akarPersamaan dan pertidaksamaan<ol style="list-style-type: none">Persamaan linera satu dan dua peubahPertidaksamaan linera satu dan dua peubahPersamaan kuadrat satu peubahSistem persamaan linear dua peubahBarisan dan deret<ol style="list-style-type: none">Pola barisan bilanganBarisan dan deret AritmetikaBarisan dan deret Geometri
3.	Geometri	<ol style="list-style-type: none">Garis dan sudut<ol style="list-style-type: none">Kedudukan dua garis

No.	Materi	Lingkup Materi
		<ul style="list-style-type: none"> b. Sifat-sifat garis 2. Bangun datar <ul style="list-style-type: none"> a. Sifat-sifat bangun datar b. Keliling dan luas permukaan bangun datar c. Kesebangunan dan kekongruenan 3. Teorema Phytagoras 4. Transformasi <ul style="list-style-type: none"> a. Refleksi b. Translasi c. Rotasi d. Dilatasi 5. Bangun ruang Luas permukaan, volume, dan jaring-jaring kubus, balok, tabung, prisma, kerucut, limas dan bola
4.	Statistika dan Peluang	<ul style="list-style-type: none"> 1. Penyajian dan penafsiran data <ul style="list-style-type: none"> a. Rata-rata, median, modus data tunggal, dan penafsirannya. b. Penyajian data dalam bentuk tabel, diagram, grafik, dan penafsirannya. 2. Peluang kejadian <ul style="list-style-type: none"> a. Percobaan dan ruang sampel b. Peluang suatu kejadian 3. Aturan pencacahan <ul style="list-style-type: none"> a. Aturan penjumlahan dan aturan perkalian b. Permutasi dan kombinasi
5.	Kapita Selekt	<ul style="list-style-type: none"> 1. Pemecahan masalah yang berkaitan dengan bilangan bulat 2. Pemecahan masalah yang berkaitan dengan aljabar 3. Pemecahan masalah yang berkaitan dengan statistika dan peluang 4. Pemecahan masalah yang berkaitan dengan beberapa materi

B. Langkah Awal Menuju Olimpiade Matematika Menurut Para Pakar

- a) Menurut Dodson (1971) dan Hollander (1974), Prasyarat yang harus dimiliki dan dikembangkan oleh Siswa/Peserta Olimpiade matematika adalah:
 1. Kemampuan mengerti konsep dan istilah matematika
 2. Kemampuan untuk mencatat kesamaan, perbedaan, dan analogi
 3. Kemampuan untuk mengidentifikasi elemen terpenting dan memilih prosedur yang benar
 4. Kemampuan untuk mengetahui hal yang tidak berkaitan
 5. Kemampuan untuk menaksir dan menganalisis
 6. Kemampuan untuk memvisualisasi dan menginterpretasi kuantitas atau ruang
 7. Kemampuan untuk memperumum berdasarkan beberapa contoh
 8. Kemampuan untuk berganti metode yang telah diketahui
 9. Mempunyai kepercayaan diri yang cukup dan merasa senang terhadap materinya
 10. Harus aktif mencari materi olimpiade dari berbagai sumber (buku-buku referensi dan internet)
- b) Menurut Polya ada 4 langkah yang perlu dilakukan dalam menyelesaikan Soal
 1. Memahami soal yang ada
 - (a) Apakah kita mengetahui arti semua kata yang digunakan? Kalau tidak, carilah di indeks, kamus, definisi dan lain sebagainya
 - (b) Apakah kita mengetahui yang dicari atau ditanya?
 - (c) Apakah kita mampu menyajikan soal dengan menggunakan kata-kata sendiri?
 - (d) Apakah soal dapat disajikan dengan cara lain?
 - (e) Apakah kita dapat menggambar sesuatu yang dapat digunakan sebagai bantuan?
 - (f) Apakah informasinya cukup untuk dapat menyelesaikan soal?
 - (g) Apakah informasinya berlebihan?
 - (h) Apakah ada yang perlu dicari sebelum mencari jawab dari soal?
 2. Menyusun Strategi
 - (a) Kita akan membahas berbagai strategi yang ada, tetapi jangan ragu-ragu untuk mencoba salah satu dari strategi untuk digunakan dalam menyelesaikan soal yang dihadapi
 - (b) Pada umumnya, strategi yang berhasil diketemukan setelah beberapa kali mencoba strategi yang gagal. Kegagalan adalah satu langkah kecil untuk mencapai tujuan yang kita inginkan.
 3. Melakukan Strategi yang telah dipilih
Langkah ini lebih mudah dibandingkan menyusun strategi. Disini hanya diperlukan kesabaran dan kehati-hatian untuk menjalankan.
 4. Melihat kembali pekerjaan yang telah kita lakukan.
Selanjutnya kalau perlu menyusun strategi baru yang lebih baik atau menuliskan jawaban yang lebih baik

C. Karakteristik Soal Olimpiade Matematika

1. Soal-soal unik yang membutuhkan pemikiran kreatif, logika, serta analisa mendalam.
2. Tidak dapat dipecahkan hanya dengan menggunakan rumus semata.
3. Dibutuhkan waktu yang lebih lama untuk menyelesaikannya, jika dibandingkan soal-soal rutin

D. Kunci Sukses Olimpiade Matematika

1. Saran Untuk Siswa

- a) Berlatih, berlatih, berlatih!
Berlatih secara konsisten, disiplin, dan berkesinambungan.
- b) Mempelajari materi Matematika diluar kurikulum sekolah.
- c) Berlatihlah soal dengan 'menu' seimbang!
Yaitu soal-soal bilangan, geometri, aljabar, kombinatorik, dan eksplorasi.
- d) Hindari melihat jawaban sebelum mencoba mengerjakan suatu soal
- e) Jangan menghafal jawaban/penyelesaian soal.
- f) Berlatih menuliskan jawaban dengan sistematis.
- g) Berusaha untuk menyelesaikan soal dengan cara lain
- h) Setelah diperoleh jawaban, cobalah untuk melihat kembali kemungkinan lain, mengungkapkan dengan bahasa sendiri, kemudian mencari penyelesaian yang lebih baik
- i) Sering mengikuti Kompetisi Matematika
- j) Jangan mudah menyerah!

2. Saran Untuk Guru

- a) Ajari murid dengan berbagai strategi untuk berbagai soal
- b) Berikan waktu yang cukup pada siswa untuk mencoba soal
- c) Ajaklah siswa untuk menyelesaikan soal dengan cara lain
- d) Setelah diperoleh jawaban, ajaklah siswa untuk melihat kembali kemungkinan lain, mengungkapkan dengan bahasa sendiri, kemudian mencari penyelesaian yang lebih baik
- e) Jika kita menghadapi materi yang sulit bukan berarti kita hindari tetapi sebaiknya gunakan waktu yang cukup untuk mengulang dan mengerjakan soal yang lebih banyak. Mulailah dengan mengerjakan soal serupa, dan kemudian soal-soal yang lebih menantang.
- f) Fleksibilitas dalam pemecahan masalah (problem solving) merupakan perilaku belajar yang baik.

E. Strategi dalam Menyelesaikan Masalah Pada Soal Olimpiade Matematika

Langkah awal yang harus dimiliki dan dikembangkan oleh peserta olimpiade dalam menyelesaikan soal diantaranya adalah **memahami soal** yaitu tahu apa yang diketahui. Kemudian **memikirkan strategi** yang dilanjutkan dengan **melaksanakan strategi** tersebut dan **mengulangi untuk memikirkan strategi kedua** jika strategi pertama gagal. Setelah berhasil **periksa kembali jawaban** tersebut. Sedangkan rincian tentang strategi dalam menyelesaikan masalah pada soal olimpiade matematika dapat diuraikan berikut ini:

a) Membuat daftar yang teratur (terorganisasi)

Strategi ini sangat bermanfaat untuk membuat semua kemungkinan yang ada dan tersedia banyak pilihan.

Dengan daftar yang terorganisir dengan rapi, kita tidak akan melupakan satu kemungkinan dan juga tidak akan mengulang satu kemungkinan yang telah ada.

Contoh 1.2:

Perhatikan gambar berikut.

--	--	--	--	--

Tentukan banyaknya segiempat yang terbentuk pada gambar tersebut!

Pembahasan:

Langkah pertama kita beri simbol pada tiap-tiap kotak, yaitu sebagai berikut:

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>
----------	----------	----------	----------	----------

Kemudian kita cari satu demi satu berdasarkan simbol yang telah dibuat.

1. Segiempat yang terdiri dari 1 bagian adalah *a*, *b*, *c*, *d*, dan *e* ada sebanyak 5
2. Segiempat yang terdiri dari 2 bagian adalah *ab*, *bc*, *cd*, dan *de* ada sebanyak 4
3. Segiempat yang terdiri dari 3 bagian adalah *abc*, *bcd*, dan *cde* ada sebanyak 3
4. Segiempat yang terdiri dari 4 bagian adalah *abcd*, dan *bcde* ada sebanyak 2
5. Segiempat yang terdiri dari 5 bagian adalah *abcde* ada sebanyak 1

Jadi, banyak segiempat yang terbentuk adalah sebanyak $= 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$

Contoh 1.2:

Banyak bilangan bulat berbeda yang merupakan penjumlahan dari tiga bilangan berbeda dalam $\{5, 9, 13, 17, \dots, 41\}$ adalah (Sumber: Soal OSP SMP 2009)

Pembahasan:

Daftar seluruh anggota himpunan bilangan yang boleh dijumlahkan jika kita tulis seluruhnya adalah **$\{5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37, 41\}$**

Penjumlahan tiga bilangan yang memenuhi diantaranya adalah:

Model penjumlahan 3 bilangan yang memenuhi	Langkah 1: menggantikan bilangan terakhir dengan sebelah kanannya sampai terakhir	Langkah 2: menggantikan bilangan 9 pada bentuk langkah 1 paling akhir dengan bilangan sebelah kanannya sampai bilangan 37	Langkah 3: menggantikan bilangan 5 pada bentuk langkah 2 paling akhir dengan bilangan sebelah kanannya sampai bilangan 33
	$5 + 9 + 13 = 27$ $5 + 9 + 17 = 31$ $5 + 9 + 21 = 35$ $5 + 9 + 25 = 39$ $5 + 9 + 29 = 43$ $5 + 9 + 33 = 47$ $5 + 9 + 37 = 51$ $5 + 9 + 41 = 55$	$5 + 13 + 41 = 59$ $5 + 17 + 41 = 63$ $5 + 21 + 41 = 67$ $5 + 25 + 41 = 71$ $5 + 29 + 41 = 75$ $5 + 33 + 41 = 79$ $5 + 37 + 41 = 83$	$9 + 37 + 41 = 87$ $13 + 37 + 41 = 91$ $17 + 37 + 41 = 95$ $21 + 37 + 41 = 99$ $25 + 37 + 41 = 103$ $29 + 37 + 41 = 107$ $33 + 37 + 41 = 111$
	Ada 8 bilangan	Ada 7 bilangan	Ada 7 bilangan

“Untuk model penjumlahan yang lainnya dari penjumlahan tiga bilangan tersebut hasilnya akan ada yang sama dengan salah satu hasil jumlah pada tabel di atas”.

Dengan demikian, banyak bilangan yang berbeda dari hasil penjumlahan tiga bilangan dari suku barisan diatas ada $8 + 7 + 7 = 22$ bilangan.

b) Menerka dan menguji kembali

Dalam menyelesaikan sebuah masalah Matematika, boleh saja untuk mencoba menebak jawaban masalah tersebut.

Tebakan yang dibuat haruslah cukup beralasan. Setelah menebak, kita periksa syarat yang ada. Jika tebakkan kita salah, perbaiki dan uji kembali

Contoh 2.1:

Di atas meja ada 20 keping campuran uang logam seratus dan dua ratus. Nilai total uang tersebut adalah Rp3.200,00. Ada berapa keping uang logam seratus dan berapa keping uang logam dua ratus?

Pembahasan:

Kita mulai dengan mencoba 10 keping Rp200,00 dan 10 keping Rp100,00. Nilai total Rp 3.000,00, jadi tebakkan kita keliru dan harus diperbaiki.

Rp.200	Rp.100	Total Nilai
10	10	Rp.3000
11	9	Rp.3100
12	8	Rp.3200

Dari tabel di atas, terlihat bahwa ternyata ada 12 keping uang logam Rp200,00 dan 8 keping uang logam Rp100,00.

Contoh 2.2:

Anto mempunyai 20 lembar seribuan, 4 lembar lima ribuan dan 2 lembar sepuluh ribuan. Jika x , y , dan z adalah banyaknya seribuan, lima ribuan, dan sepuluh ribuan, maka banyak cara berbeda sehingga jumlahnya dua puluh ribu adalah ...

(Sumber: Soal OSK SMP 2010)

- A. 6
- B. 7
- C. 8
- D. 9
- E. 10

Pembahasan:

Perhatikan tabel berikut ini

Cara Ke-	Banyaknya Uang seribuan (x)	Banyaknya Uang Lima ribuan (y)	Banyaknya Uang Sepuluh ribuan (z)	Jumlah Uang
1	20	0	0	20.000
2	0	4	0	20.000
3	0	0	2	20.000
4	15	1	0	20.000
5	10	2	0	20.000
6	10	0	1	20.000
7	5	3	0	20.000
8	5	1	1	20.000
9	0	2	1	20.000

Jadi, banyak cara berbeda sehingga jumlahnya dua puluh ribu adalah ada 9 cara

c) Menemukan pola

Strategi ini memerlukan kejelian untuk melihat adanya keteraturan dalam sebuah barisan bilangan ataupun gambar.

Dalam pola barisan bilangan, bilangan yang pertama biasa disebut suku pertama, bilangan kedua disebut suku kedua, bilangan ke- n disebut suku ke- n , dan seterusnya.

Contoh 3.1:

Bila $x + \frac{1}{x} = 1$, carilah nilai dari $x^{10} + \frac{1}{x^{10}}$!

Pembahasan:

Mencari pola untuk menentukan hasil dari jawaban pada soal tersebut, yaitu Ingin kembali pada faktorisasi bentuk aljabar $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

Jika $a = x$ dan $b = \frac{1}{x}$, maka didapat $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^2 + 2(x)\left(\frac{1}{x}\right)$

$$\text{atau } x^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 2(x)\left(\frac{1}{x}\right)$$

Dengan demikian, cara menjawab soal diatas dapat dilakukan sebagai berikut :

$$(i) \quad x + \frac{1}{x} = 1$$

$$(ii) \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2(x)\left(\frac{1}{x}\right) = (1)(1) - 2 = 1 - 2 = -1$$

$$(iii) \quad x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right) = (-1)(1) - 1 = -1 - 1 = -2$$

$$(iv) \quad x^5 + \frac{1}{x^5} = \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right) = (-2)(-1) - 1 = 2 - 1 = 1$$

$$(v) \quad x^{10} + \frac{1}{x^{10}} = \left(x^5 + \frac{1}{x^5}\right)\left(x^5 + \frac{1}{x^5}\right) - 2\left(x^5\right)\left(\frac{1}{x^5}\right) = (1)(1) - 2 = 1 - 2 = -1$$

Jadi, nilai dari $x^{10} + \frac{1}{x^{10}} = -1$

Contoh 3.2:

Misalkan f adalah fungsi yang memenuhi $f(n) = f(n-1) + \frac{n}{2017}$, dimana untuk setiap n bilangan asli dan $f(0) = 1008$. maka tentukan nilai $f(2017)$

Pembahasan:

$$f(n) = f(n-1) + \frac{n}{2017}$$

$$\text{untuk } n = 1, f(1) = f(0) + \frac{1}{2017} = 1008 + \frac{1}{2017}$$

$$\text{untuk } n = 2, f(2) = f(1) + \frac{2}{2017} = 1008 + \frac{1}{2017} + \frac{2}{2017}$$

$$\text{untuk } n = 3, f(3) = f(2) + \frac{3}{2017} = 1008 + \frac{1}{2017} + \frac{2}{2017} + \frac{3}{2017}$$

dan seterusnya...

$$\begin{aligned} \text{maka untuk } n = 2017, f(2017) &= f(2016) + \frac{2017}{2017} \\ &= 1008 + \frac{1}{2017} + \frac{2}{2017} + \dots + \frac{2017}{2017} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{sedangkan untuk barisan } 1 + 2 + 3 + \dots + 2016 + 2017 &= \frac{2017}{2}(1 + 2017) \\ &= 2017(1009) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{sehingga } f(2017) &= 1008 + \frac{1}{2017}(2017 \times 1009) \\ &= 1008 + 1009 \\ &= 2017 \end{aligned}$$

Jadi, nilai $f(2017) = 2017$

d) Melakukan percobaan atau cara coba-coba

Dalam Olimpiade Matematika SMP yang sesungguhnya, menggunakan alat bantu nyata praktis tidak diperlukan.

Namun jika sedang berlatih, ada baiknya menggunakan alat bantu untuk menyelesaikan masalah.

Melakukan percobaan berkali-kali hingga berhasil menemukan jawabannya.

Contoh 4.1:

Perhatikan gambar di samping ini.

Pindahkan dua batang korek api sehingga terbentuk empat persegi yang kongruen.

Pembahasan:

Perhatikan ilustrasi gambar berikut.

Pada batang korek api (1) Pindahkan/geser satu langkah kebawah

Pada batang korek api (2) Pindahkan/geser satu langkah kekanan lalu rentangkan

Akan tampak seperti berikut

Contoh 4.2:

Bagaimana dengan soal pada gambar berikut.

Buanglah empat batang korek api sehingga terbentuk empat segitiga yang kongruen.

Pembahasan:

Perhatikan ilustrasi gambar berikut.

Buanglah/ambillah batang korek api yang dilingkari merah. Akan tampak seperti berikut

Contoh 4.3:

Suatu fungsi ditentukan dengan rumus

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{untuk } x \text{ genap} \\ 2x - 1, & \text{untuk } x \text{ ganjil} \end{cases}$$

Jika a adalah bilangan asli, maka nilai yang tidak mungkin untuk $f(a)$ adalah

- A. 21
- B. 39
- C. 61
- D. 77

(Sumber: Soal OSK SMP 2016)

Pembahasan:

Berdasarkan informasi dari soal, maka perlu kita gunakan cara coba-coba untuk mempersingkat waktu, yakni dengan menguji satu-persatu nilai $f(a)$ yang terdapat pada pilihan berikut.

No.	$f(a)$	$f(a) = 2a + 1$, untuk a genap	$f(a) = 2a - 1$, untuk a ganjil	Keterangan
1.	21	$21 = 2a + 1$ $2a = 20$ $a = 10$	-	Benar untuk nilai a genap
2.	39	$39 = 2a + 1$ $2a = 38$ $a = 19$ (19 untuk $f(a)$ ganjil)	$39 = 2a - 1$ $2a = 40$ $a = 20$ (20 untuk $f(a)$ genap)	Tidak ada nilai yang memenuhi untuk $f(a) = 39$
3.	61	$61 = 2a + 1$ $2a = 60$ $a = 30$	-	Benar untuk nilai a genap
4.	77	$77 = 2a + 1$ $2a = 76$ $a = 38$	-	Benar untuk nilai a genap

(untuk mengetahui nilai $f(a)$, boleh mencari satu-persatu dengan mensubstitusikan bilangan asli tersebut ke rumus fungsi yang telah ditentukan)

Jadi, nilai yang tidak mungkin untuk $f(a)$ adalah 39

e) Membuat ilustrasi gambar

Menggambar sesuai dengan keterangan yang terdapat dalam soal dapat memunculkan informasi tersembunyi di dalam soal.

Dalam menggambar untuk memecahkan soal, yang terpenting adalah ketepatan dan bukannya keindahan!

Contoh 5.1:

Diberikan segitiga lancip ABC dengan L sebagai lingkaran luarnya. Dari titik A dibuat garis tinggi pada ruas garis BC sehingga memotong lingkaran L di titik X . Dengan cara serupa, dibuat garis tinggi dari titik B dan titik C sehingga memotong lingkaran L , berturut-turut di titik Y dan titik Z . Apakah panjang busur $AY =$ panjang busur AZ ?

(Sumber: Soal OSN SMP 2015)

Pembahasan:

Perhatikan ilustrasi gambar berikut!

(a)

Gambarnya bisa juga seperti di samping kanan ini

(b)

Perhatikan gambar (a) dan (b)!

Berdasarkan informasi dari soal, kedua gambar tersebut dapat dibenarkan menurut kondisi soal, karena kedua segitiga pada gambar tersebut adalah segitiga lancip.

Pada gambar (a) titik potong dari ketiga garis tingginya terdapat pada titik P

Sedangkan pada gambar (b) titik potong dari ketiga garis tinggi terdapat pada satu titik dengan titik C

Perhatikan gambar (b)!

1) Besar $\angle AOC$ atau $\angle AOY = 90^\circ$, sehingga panjang busur AC atau $AY = \frac{1}{2} \times$
Keliling lingkaran

2) Besar $\angle AOZ = 90^\circ$, sehingga panjang busur $AZ = \frac{1}{2} \times$ Keliling lingkaran

Jadi, benar bahwa panjang busur $AY =$ panjang busur AZ

Contoh 5.2:

Tentukan jumlah sudut dari:

$$\angle KMB + \angle KAB + \angle KDB + \angle KIB + \angle KUB + \angle KNB$$

pada gambar berikut!

Pembahasan:

Perhatikan ilustrasi gambar berikut.

Berdasarkan ilustrasi gambar di atas, maka

$$\text{besar } \angle KNZ = 45^\circ$$

$$\begin{aligned} \text{besar } \angle KNZ &= \angle KMB + \angle KAB + \angle KDB + \angle KIB + \angle KUB + \angle KNB \\ &= \angle YNZ + \angle XNY + \angle WNX + \angle VNW + \angle BNV + \angle KNB \end{aligned}$$

Jadi, hasil dari $\angle KMB + \angle KAB + \angle KDB + \angle KIB + \angle KUB + \angle KNB = 45^\circ$

f) Menyelesaikan soal yang lebih sederhana

Untuk menyelesaikan soal-soal yang rumit, kadang-kadang perlu menggunakan pendekatan yang lebih sederhana.

Contoh 6.1:

Tohir menggambar 100 garis lurus yang saling berpotongan pada suatu kertas. Ada berapa banyak titik potong maksimum yang dapat dibuat oleh Tohir?

Pembahasan:

Untuk mengetahui banyak titik maksimal yang dihasilkan oleh 6 garis yang berpotongan, perhatikan uraian berikut.

Dan seterusnya didapat pola sebagai berikut

$$2 \Rightarrow 1 = (2 \times 1) \times \frac{1}{2}$$

$$3 \Rightarrow 3 = (3 \times 2) \times \frac{1}{2}$$

$$4 \Rightarrow 6 = (4 \times 3) \times \frac{1}{2}$$

$$5 \Rightarrow 10 = (5 \times 4) \times \frac{1}{2}$$

$$6 \Rightarrow 15 = (6 \times 5) \times \frac{1}{2}$$

...

$$n \Rightarrow [n \times (n-1)] \times \frac{1}{2} \quad \text{atau} \quad \frac{1}{2}(n)(n-1)$$

**Jadi, banyak titik maksimal yang dapat dibuat oleh Tohir dari 100 garis adalah
sebanyak $= (100 \times 99) \times \frac{1}{2} = 4950$ titik potong**

Contoh 6.2:

Berapa banyak hasil penjumlahan berbeda yang dapat diperoleh dengan cara menjumlahkan setiap dua bilangan bulat berbeda yang dipilih dari dua puluh lima bilangan bulat berurutan -12, -11, -10, ..., -1, 0, 1, ..., 10, 11, 12

Pembahasan:

Untuk menjawab ini, ada baiknya kita mencari pola

Jika ada 3 bilangan, misalnya -1, 0, 1, $\Rightarrow$ maka bilangan yang terbentuk adalah -1 + 0 = -1, -1 + 1 = 0, dan 0 + 1 = 1.

Jadi ada 3 bilangan hasil penjumlahannya

Jika ada 5 bilangan, misalnya -2, -1, 0, 1, 2, $\Rightarrow$ maka bilangan yang terbentuk adalah

$$-2 + -1 = -3;$$

$$-2 + 0 = -2;$$

$$-2 + 1 = -1 + 0 = -1;$$

$$-2 + 2 = -1 + 1 = 0;$$

$$-1 + 2 = 0 + 1 = 1;$$

$$0 + 2 = 2$$

$$1 + 2 = 3$$

Jadi, ada sebanyak 7 bilangan hasil penjumlahan

Jika ada 7 bilangan, misalnya -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 $\Rightarrow$ dengan yang sama didapat sebanyak 11

Dengan cara yang sama juga, diperoleh aturan jika terdapat sebanyak n bilangan, maka jumlah berbeda dari dua bilangan berbeda akan ada sebanyak $2n - 3$.

Dengan demikian, karena bilangan -12, -11, -10, ..., -1, 0, 1, ..., 10, 11, 12 ada sebanyak 25 bilangan, maka banyak hasil penjumlahan dua bilangan berbeda pada bilangan-bilangan tersebut adalah 47.

Jadi, banyak bilangan yang berbeda dari hasil penjumlahan dua bilangan berbeda yang dimaksud adalah sebanyak 47 bilangan

g) Bekerja melangkah mundur

Dalam memecahkan suatu masalah, ada kalanya, kita harus “bekerja mundur”, mulai dari hasil akhir, lalu bergerak mundur ke keadaan awal.

Contoh 7.1:

As'ari mengalikan suatu bilangan dengan 5. Hasilnya ia tambahkan dengan 10, lalu hasilnya ia bagi dengan 9. Bilangan akhir yang ia dapat adalah 5. Berapa bilangan As'ari mula-mula?

Pembahasan:

Kita mulai dengan 5. Kalikan 5 dengan 9, menjadi 45. Kemudian kurangkan 45 dengan 10, menjadi 35. Terakhir, bagi 35 dengan 5, hasilnya 7.

Jadi, bilangan mula-mula adalah 7.

Kita cek ulang:

$$7 \times 5 = 35$$

$$35 + 10 = 45$$

$$45 : 9 = 5.$$

Contoh 7.2:

Sebuah $\triangle ABC$ dicerminkan terhadap sumbu Y , kemudian dicerminkan lagi terhadap garis $y = 3$ sehingga hasil pencerminannya adalah $\triangle A'B'C'$. Jika koordinat titik-titik $A'(8,0)$, $B'(8,-4)$, dan $C'(4,0)$, maka koordinat titik-titik A , B , dan C berturut-turut adalah (sumber: soal OSK 2015)

Pembahasan:

Untuk menjawab dari permasalahan yang terdapat pada soal, kita lakukan pencerminan berjalan mundur, yakni sebagai berikut

Titik-titik $A'(8,0)$, $B'(8,-4)$, dan $C'(4,0)$ dicerminkan terlebih dulu pada garis $y = 3$, yaitu menjadi $A_2(8,0+3+3)$, $\Rightarrow A_2(8,6)$

$$B_2[8,-4+(4+3)+(4+3)], \quad \Rightarrow B_2(8,10)$$

$$C_2(4,0+3+3) \quad \Rightarrow C_2(4,6)$$

Kemudian, Titik-titik $A_2(8,6)$, $B_2(8,10)$, dan $C_2(4,6)$ dicerminkan terlebih dulu pada sumbu y, yaitu menjadi $A[8 - (4+4) \times 2, 6]$, $\Rightarrow A(-8,6)$
 $B[8 - (4+4) \times 2, 10]$, $\Rightarrow B(-8,10)$
 $C[4 - (4+4), 6]$ $\Rightarrow C(-4,6)$

Ilustrasi gambarnya sebagai berikut:

Jadi, koordinat titik-titik A, B, dan C berturut-turut adalah $(-8,6)$, $(-8,10)$, dan $(-4,6)$

- h) Mengeliminasi (Penghapusan) yang tidak memenuhi syarat

Pada soal-soal Olimpiade Matematika kerap kali mesti diselesaikan dengan mengeliminasi berbagai kemungkinan yang ada

Contoh 8.1:

Ada berapa banyak bilangan dua angka yang habis dibagi 3 dan selisih angka-angka penyusunnya sama dengan dua.

Pembahasan:

Daftarkan bilangan 2 angka yang selisih angka penyusunnya sama dengan 2.

13	20	24	31	35	42	46	53
57	64	68	75	79	86	97	

Eliminasi bilangan-bilangan (dari daftar tersebut) yang tidak habis dibagi 3.

<u>13</u>	<u>20</u>	24	<u>31</u>	<u>35</u>	42	<u>46</u>	<u>53</u>
57	<u>64</u>	<u>68</u>	75	<u>79</u>	<u>86</u>	<u>97</u>	

Sehingga, kita peroleh bilangan-bilangan 2 angka yang habis dibagi 3 dan selisih angka-angka penyusunnya sama dengan 2.

24	42	57	75
----	----	----	----

Jadi, ada 4 adalah bilangan yang memenuhi semua syarat dalam soal.

Contoh 8.2:

Ketika Bu Siti pulang ke rumah, dia baru mengetahui bahwa pot bunga di depan rumah pecah. Bu Siti mengumpulkan keempat anaknya dan menanyakan siapa yang memecahkan pot bunga tersebut. Berikut pernyataan keempat anaknya.

Tina : Saya tidak melakukannya.

Andi : Saya tidak melakukannya dan Tina juga tidak melakukannya.

Mira : Saya tidak melakukannya dan Andi juga tidak melakukannya.

Sari : Tina tidak melakukannya dan Andi tidak melakukannya.

Beberapa waktu kemudian Bu Siti mengetahui bahwa hanya ada satu anaknya yang berkata bohong. Siapakah yang memecahkan pot bunga Bu Siti?

(Sumber: Soal Pre Test OSNG Kota Malang 2016)

Pembahasan:

Misal x = Tidak Melaksanakan

V = Melaksanakan

Hanya satu anak yang bohong (negasi dari yang diucapkan)

Berarti yang lain jujur (sesuai dengan yang diucapkan)

	Tina	Andi	Mira	Sari	Keterangan
Tina bohong	$V \ \& \ x$ (TM)	x			Menurut Andi, Tina x
Andi bohong	V	$V \ \& \ x$ (TM)	x		Menurut Mira, Tina x
Mira bohong	x	x	V	?	Tidak bisa Memutuskan Sari
Sari bohong	x	x	x	V	Hanya Sari yang melakukan

Jadi, Sari yang memecahkan pot bunga Bu Siti

- i) Memperhatikan hal khusus yang unik

Dalam menyelesaikan soal, seringkali kita tidak dapat langsung melihat yang sangat umum.

Mulai dari hal yang khusus kita akan memperoleh hasil.

Kemudian harapannya kita dapat melanjutkan pada bagian yang lebih rumit.

Contoh 9.1:

Ada 8 koin yang bentuk dan ukurannya sama. Namun salah satu dari koin itu palsu dan beratnya lebih ringan daripada koin yang asli. Tersedia sebuah timbangan dua lengan. Berapa kali paling sedikit penimbangan harus dilakukan untuk mengetahui mana yang merupakan koin palsu?

Pembahasan:

- Caranya adalah ambil 6 koin dari 8 koin yang ada, sehingga sisa 2 koin.
- Lakukan penimbangan pertama terhadap 6 koin yang diambil dengan cara meletakkan 3 koin di lengan kiri dan 3 koin lagi di lengan kanan.
- Kemungkinan yang terjadi adalah:

- Jika hasilnya seimbang maka koin palsu pasti ada diantara 2 koin sisa yang tidak diambil. Untuk mengetahuinya lakukan penimbangan kedua terhadap 2 koin tersebut. Yang paling ringan itulah yang palsu.
- Jika hasilnya tidak seimbang maka koin palsu pasti ada diantara 3 koin yang lebih ringan timbangannya. Untuk mengetahuinya lakukan penimbangan kedua terhadap 2 koin dari 3 koin tersebut.
 - Jika hasilnya seimbang maka yang palsu adalah sisa 1 koin yang tidak ditimbang.
 - Jika hasilnya tidak seimbang maka yang paling ringan adalah koin yang palsu.

Jadi, Paling sedikit melakukan 2 kali penimbangan

Contoh 9.2:

Siswa kelas VII.3 dibagi menjadi lima kelompok: A, B, C, D, dan E. Setiap kelompok melakukan lima percobaan IPA selama lima minggu. Setiap minggu masing-masing kelompok melakukan satu percobaan yang berbeda dengan percobaan yang dilakukan oleh kelompok lain. Tentukan paling sedikit dua jadwal percobaan yang mungkin pada minggu kelima, berdasarkan informasi berikut.

- Pada minggu pertama, Kelompok D mengerjakan Percobaan 4.
- Pada minggu kedua, Kelompok C mengerjakan Percobaan 5.
- Pada minggu ketiga, Kelompok E mengerjakan Percobaan 5.

Pada minggu keempat, Kelompok A mengerjakan Percobaan 4 dan Kelompok D mengerjakan Percobaan 2.

(Sumber: Soal OSN SMP 2015)

Pembahasan:

Perhatikan berikut:

Minggu Ke-	Kelompok A	Kelompok B	Kelompok C	Kelompok D	Kelompok E	Keterangan
I				4		Percobaan yang mungkin pada cell yang kosong adalah 1, 2, 3, 5
II			5			1, 2, 3, 4
III					5	1, 2, 3, 4
IV	4			2		1, 3, 5
V						1, 2, 3, 5
	1, 2, 3, 5	1, 2, 3, 4, 5	1, 2, 3, 4	1, 3, 5	1, 2, 3, 4	

Untuk mengisi cell A1! Bila baris pada minggu ke-I diisi oleh 5, maka kemungkinan kolom A tinggal 1, 2, 3

Untuk mengisi cell D2! Bila baris pada minggu ke-II diisi oleh 1, maka kemungkinan kolom D tinggal 3, 5

Dan seterusnya, sehingga didapat pada tabel 1 berikut ini:

Minggu Ke-	Kelompok A	Kelompok B	Kelompok C	Kelompok D	Kelompok E
I	5	2	3	4	1
II	2	3	5	1	4
III	1	4	2	3	5
IV	4	5	1	2	3
V	3	1	4	5	2

Sehingga jadwal percobaan yang mungkin pada minggu kelima pada tabel 1 adalah

Kelompok A $\Rightarrow$ Percobaan 3

Kelompok B $\Rightarrow$ Percobaan 1

Kelompok C $\Rightarrow$ Percobaan 4

Kelompok D $\Rightarrow$ Percobaan 5

Kelompok E $\Rightarrow$ Percobaan 2

Dengan cara yang sama, akan didapat pengaturan jadwal seperti pada Tabel 2 berikut ini:

Minggu Ke-	Kelompok A	Kelompok B	Kelompok C	Kelompok D	Kelompok E
I	5	3	2	4	1
II	1	4	5	3	2
III	3	2	4	1	5
IV	4	5	1	2	3
V	2	1	3	5	4

Sehingga jadwal percobaan yang mungkin pada minggu kelima pada tabel 1 adalah

Kelompok A $\Rightarrow$ Percobaan 2

Kelompok B $\Rightarrow$ Percobaan 1

Kelompok C $\Rightarrow$ Percobaan 3

Kelompok D $\Rightarrow$ Percobaan 5

Kelompok E $\Rightarrow$ Percobaan 4

Jadi, dua jadwal percobaan yang mungkin pada minggu kelima, berdasarkan informasi adalah

Jadwal untuk percobaan minggu ke-V	Kelompok A	Kelompok B	Kelompok C	Kelompok D	Kelompok E
Jadwal 1	3	1	4	5	2
Jadwal 2	2	1	3	5	4

j) Membagi kasus per kasus

Dalam penyelesaian suatu masalah, biasanya lebih mudah jika kita bagi kasus per kasus.

Contoh 10.1:

Di dalam suatu keranjang terdapat 12 apel Malang, dua diantaranya diketahui busuk. Jika diambil 3 apel secara acak (random), maka peluang tepat satu di antaranya busuk adalah ...

a. $\frac{9}{22}$

- b. $\frac{5}{11}$
c. $\frac{4}{11}$
d. $\frac{9}{44}$
e. $\frac{5}{22}$

(Sumber: Soal OSK SMP 2013)

Pembahasan:

Banyaknya apel = 12

Banyaknya apel busuk (K) = 2

Banyaknya apel baik (B) = 10

Peluang tepat satu di antaranya busuk kemungkinannya:

$$\text{Kasus I : } P(\text{BBK}) = \frac{10}{12} \times \frac{9}{11} \times \frac{2}{10} = \frac{9}{66} = \frac{3}{22}$$

$$\text{Kasus II : } P(\text{BKB}) = \frac{10}{12} \times \frac{2}{11} \times \frac{9}{10} = \frac{3}{22}$$

$$\text{Kasus III : } P(\text{KBB}) = \frac{2}{12} \times \frac{10}{11} \times \frac{9}{10} = \frac{3}{22}$$

ada 3 kasus yang terjadi

Jadi, Peluang tepat satu di antaranya busuk adalah $= 3 \times \frac{3}{22} = \frac{9}{22}$

Contoh 10.2:

Pak Tohir meminjam buku diperpustakaan SMP 2013 Mojokerto yang terdiri dari 100 halaman. Buku tersebut dibuka beberapa kali oleh Pak Tohir untuk dibaca. Menariknya halaman buku yang dibuka oleh Pak Tohir salah satu nomor halamannya selalu bilangan prima sedangkan nomor halaman yang satunya bukan bilangan prima dan ternyata apabila kedua nomor halaman tersebut dijumlahkan selalu hasilnya bilangan prima. Berapa kali buku tersebut yang mungkin dibuka oleh Pak Tohir? Jelaskan.

Pembahasan:

Menurut informasi dari soal, maka hal ini terdapat 2 kasus, yaitu untuk halaman pertama 1-2 dan Untuk halaman pertama 2-3

Kemudian, daftar bilangan prima kurang dari 200

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29
31	37	41	43	47	53	59	61	67	71
73	79	83	89	97	101	103	107	109	113
127	131	137	139	149	151	157	163	167	173
179	181	191	193	197	199				

- a) Untuk halaman pertama 1-2. Nomor lembar yang sebelah kiri selalu ganjil dan ambillah yang termasuk bilangan prima dan hasil penjumlahannya bilangan prima Pilihlah bilangan prima berdasarkan pola tersebut, yakni sebagai berikut:
Contoh $1 + 2 = 3$ (termasuk)

- 3, 7, 11, 23, 47, 59, 83, 107, 167, dan 179 ada sebanyak 10 kali
- b) Untuk halaman pertama 2-3. Nomor lembar yang sebelah kanan selalu ganjil selalu ganjil dan ambillah yang termasuk bilangan prima dan hasil penjumlahannya bilangan prima
Pilihlah bilangan prima berdasarkan pola tersebut, yakni sebagai berikut:
Contoh $2 + 3 = 5$ (tidak termasuk)
13, 37, 61, 73, 157, dan 193 ada sebanyak 6 kali

Jadi, yang mungkin dibuka oleh Pak Tohir sebanyak $10+6 = 16$ kali

k) Pembuktian dengan Kontradiksi

Jika diberikan suatu pernyataan maka kita dapat membuktikan bahwa pernyataan tersebut tidak benar cukup dengan memperlihatkan satu contoh penyangkal.
Pembuktian semacam ini disebut pembuktian dengan kontradiksi

Contoh 11.1:

Elok mempunyai 54 ekor kelinci. Ia ingin memasukkan kelinci-kelinci tersebut ke dalam sepuluh kandang. Namun ia ingin agar banyaknya kelinci dalam setiap kandang berbeda jumlahnya dan tidak ada kandang yang kosong. Mungkinkah ia melakukan hal ini?

Pembahasan:

Andaikan ia dapat memenuhi keinginannya. Kita beri nomor kandang-kandang tersebut, dari nomor 1 sampai dengan nomor 10. Kandang nomor 1 memuat satu ekor kelinci, kandang nomor 2 memuat 2 ekor kelinci, dan seterusnya.

Maka banyaknya kelinci yang ia butuhkan adalah 55 ekor. Ini adalah jumlah minimum yang ia butuhkan agar banyaknya kelinci dalam setiap kandang berbeda. Padahal ia hanya memiliki 54 ekor kelinci. Maka ia tidak dapat memenuhi keinginannya!

Contoh 11.2:

Diketahui a dan b adalah bilangan bulat positif dengan $a > b > 2$.

Apakah $\frac{2^a + 1}{2^b - 1}$ merupakan bilangan bulat? Tulis alasan Anda.

(Sumber: Soal OSN SMP 2016)

Pembahasan:

Diketahui a dan b adalah bilangan bulat positif dengan $a > b > 2$. Dari pernyataan ini ada 2 kemungkinan nilai a yang didapat, yaitu $a = bn$ atau $a = bn + c$, sehingga didapat

$$\begin{aligned} \text{(i) Untuk } a = bn \quad : \quad \frac{2^a + 1}{2^b - 1} &\Rightarrow \frac{2^{bn} + 1}{2^b - 1} = \frac{2^{bn} - 1 + 2}{2^b - 1} \\ &= \frac{2^{bn} - 1}{2^b - 1} + \frac{2}{2^b - 1} \end{aligned}$$

Agar dihasilkan bilangan bulat maka $2^b - 1$ haruslah pembagi bulat dari $2^{bn} - 1$ dan 2.

Menurut sifat pemfaktoran bentuk aljabar bahwa $2^{bn} - 1$ habis dibagi oleh $2^b - 1$, karena $2^{bn} - 1 = (2^b - 1)(2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \dots + 2^2 + 2 + 1)$.

Akan tetapi untuk bilangan 2 tidak habis dibagi oleh $2^b - 1$, karena syaratnya $b > 2$

Dengan demikian, $\frac{2^a + 1}{2^b - 1}$ bukan merupakan bilangan bulat.

$$\begin{aligned}
 \text{(ii) Untuk } a = bn + c : \quad \frac{2^a + 1}{2^b - 1} &\Rightarrow \frac{2^{bn+c} + 1}{2^b - 1} = \frac{2^c \times 2^{bn} + 1}{2^b - 1} \\
 &= \frac{2^c \times 2^{bn} + 1 + 2^c - 2^c}{2^b - 1} \\
 &= \frac{2^c \times 2^{bn} - 2^c + 2^c + 1}{2^b - 1} \\
 &= \frac{2^c(2^{bn} - 1) + 2^c + 1}{2^b - 1} \\
 &= \frac{2^c(2^{bn} - 1)}{2^b - 1} + \frac{2^c + 1}{2^b - 1}
 \end{aligned}$$

Agar dihasilkan bilangan bulat maka $2^b - 1$ haruslah pembagi bulat dari $2^c(2^{bn} - 1)$ dan $(2^b + 1)$.

Untuk $2^c(2^{bn} - 1)$ habis dibagi oleh $2^b - 1$, karena

$$2^c \times (2^{bn} - 1) = 2^c \times (2^b - 1)(2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \dots + 2^2 + 2 + 1)$$

Akan tetapi untuk $2^c + 1$ tidak habis dibagi oleh $2^b - 1$, karena sudah dibuktikan seperti pada point (i) di atas.

Dengan demikian, $\frac{2^{bn+c} + 1}{2^b - 1}$ bukan merupakan bilangan bulat.

Jadi, terbukti bahwa $\frac{2^a + 1}{2^b - 1}$ bukan merupakan bilangan bulat

- 1) Menuliskan hal yang tak diketahui dalam bentuk Variabel

Banyak masalah matematika dapat diselesaikan dengan menuliskan hal yang tak diketahui dalam bentuk variabel.

Salah satu keuntungannya seakan akan kita telah memperoleh yang dicari

Contoh 12.1:

Saat ini umur pak Tohir 3 kali umur Udin, jika 10 tahun mendatang jumlah umur mereka 72, berapa umur pak tohir saat udin lahir.

(Sumber: Buku Paket SMP Kurikulum 2013)

Pembahasan:

Misalkan umur Pak Tohir = T dan umur Udin = U

$$T = 3U \quad \dots(1)$$

$$(T + 10) + (U + 10) = 72$$

$$T + U + 20 = 72$$

$$T + U = 52 \quad \dots(2)$$

Berdasarkan persamaan 2) dan 1), didapat

$$T + U = 52 \quad \text{dan} \quad T = 3U \quad \Rightarrow 3U + U = 52$$

$$\Rightarrow 4U = 52$$

$$\Rightarrow U = 13 \quad \text{sehingga } T = 39$$

Dengan demikian, umur pak tohir saat udin lahir = $39 - 13 = 26$

Jadi, umur pak tohir saat udin lahir adalah 26 Tahun

Contoh 12.2:

Diketahui sebuah persegi panjang $ABCD$ dan segitiga samakaki PAQ seperti pada gambar. $\triangle PAQ$ kongruen dengan $\triangle BRQ$. Jika $PA = 10$ cm dan $RC = 2$ cm serta luas dari $\triangle QRS = 40$ cm², maka berapakah panjang DS ?

Pembahasan:

Perhatikan ilustrasi gambar berikut.

Diketahui Luas $\triangle QRS = 40$ cm²
 $a + b = 10$ 1)

Perhatikan segiempat $BCTQ$, $\triangle QRS$, $\triangle QTS$, $\triangle RCS$, dan $\triangle BRQ$

Luas segiempat $BCTQ = \text{Luas } \triangle QRS + \text{Luas } \triangle QTS + \text{Luas } \triangle RCS + \text{Luas } \triangle BRQ$

$$12 \times 10 = 40 + \frac{1}{2} \times a \times 12 + \frac{1}{2} \times b \times 2 + \frac{1}{2} \times 10 \times 10$$

$$120 = 40 + 6a + b + 50$$

$$120 = 90 + 6a + b$$

$$6a + b = 30 \text{ 2)}$$

Dari persamaan 2) dan 1) didapat

$$6a + b = 30$$

$$\underline{a + b = 10 \quad -}$$

$$5a = 20$$

$$a = 4 \quad \text{sehingga } b = 6$$

Dengan demikian, panjang $DS = a + 10 = 4 + 10 = 14$ cm

Jadi, panjang DS adalah 14 cm

m) Menyelesaikan suatu persamaan

Soal persamaan dalam olimpiade merupakan bentuk-bentuk soal tak rutin, dimana dalam menyelesaikannya perlu adanya suatu trik tertentu agar dapat diselesaikan

Contoh 13.1:

Selesaikan sistem persamaan

$$a + b + c = 0$$

$$a + b + d = 1$$

$$a + c + d = 2$$

$$b + c + d = 3$$

(Sumber: BSMP 2016)

Pembahasan:

Mencari strategi untuk menyelesaikan masalah yang terdapat pada soal, yaitu sebagai berikut:

Jumlahkan semua persamaan di atas, akan didapat

$$3(a + b + c + d) = 6$$

$$a + b + c + d = 2$$

Maka $0 + d = 2$ sehingga $d = 2$

$$1 + c = 2 \text{ sehingga } c = 1$$

$$2 + b = 2 \text{ sehingga } b = 0$$

$$3 + a = 2 \text{ sehingga } a = -1$$

Jadi, penyelesaian sistem persamaan tersebut adalah $(a, b, c, d) = (-1, 0, 1, 2)$

Contoh 13.2:

Untuk bilangan-bilangan real a, b , dan c diberikan sistem persamaan

$$a + b = 15$$

$$b + c = 7$$

$$c + d = 8$$

Nilai dari $ad + bc - ab - cd$ adalah

Pembahasan:

$$\begin{aligned} ad + bc - ab - cd &= ad - ab + bc - cd \\ &= a(d - b) - c(d - b) \\ &= (d - b)(a - c) \end{aligned}$$

Perhatikan Sistem persamaan berikut:

$$a + b = 15 \text{(1)}$$

$$b + c = 7 \text{(2)}$$

$$c + d = 8 \text{(3)}$$

Kedua ruas persamaan (3) – (2) diperoleh: $d - b = 8 - 7 = 1$

Kedua ruas persamaan (1) – (2) diperoleh: $a - c = 15 - 7 = 8$

Jadi, $ad + bc - ab - cd = (d - b)(a - c) = 1 \cdot 8 = 8$

n) Menggunakan simetri dan Identitas Aljabar

Identitas aljabar yang sering dipergunakan adalah :

$$1. (a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

$$2. (a + b)(c - d) = ac - ad + bc - bd$$

$$3. (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$4. (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$5. a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$6. a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$$

$$7. (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$\begin{aligned}8. \quad (a-b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\9. \quad a^3 + b^3 &= (a+b)^3 - 3ab(a+b) \\&= (a+b)(a^2 - ab + b^2) \\10. \quad a^3 - b^3 &= (a-b)^3 + 3ab(a-b) \\&= (a-b)(a^2 + ab + b^2)\end{aligned}$$

Contoh 14.1:

Jika $a + b = 1$, dan $a^2 + b^2 = 5$, maka tentukan nilai $a^3 + b^3$!

Pembahasan:

Diketahui : $a + b = 1$, dan $a^2 + b^2 = 5$, maka $a^3 + b^3 = \dots$

$$a = 1 - b$$

$$\begin{aligned}a^2 + b^2 = 5 \quad \Rightarrow \quad (1-b)^2 + b^2 &= 5 \\1 - 2b + b^2 + b^2 &= 5 \\2b^2 - 2b - 4 &= 0 \\b^2 - b - 2 &= 0 \\(b-2)(b+1) &= 0 \\b = 2 \quad \text{atau} \quad b = -1\end{aligned}$$

$$b = 2 \quad \Rightarrow \quad a = 1 - 2 = -1 \quad \Rightarrow \quad (-1)^3 + 2^3 = -1 + 8 = 7$$

$$b = -1 \quad \Rightarrow \quad a = 1 + 1 = 2 \quad \Rightarrow \quad 2^3 + (-1)^3 = 8 - 1 = 7$$

Jadi, nilai $a^3 + b^3 = 7$

Contoh 14.2:

Nilai dari $2016^2 - 2015^2 + 2014^2 - 2013^2 + 2012^2 - \dots - 3^2 + 2^2 - 1^2$ adalah

Pembahasan:

$$2016^2 - 2015^2 + 2014^2 - 2013^2 + 2012^2 - \dots - 3^2 + 2^2 - 1^2 \quad (\text{sebanyak } 2016 \text{ suku})$$

Operasi bilangan diatas berpola: bilangan genap selalu positif dan bilangan ganjilnya selalu negatif

$$\begin{aligned}2016^2 - 2015^2 + 2014^2 - 2013^2 + 2012^2 - \dots + 6^2 - 5^2 + 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2 \\(2016^2 - 2015^2) + (2014^2 - 2013^2) + (2012^2 - 2011^2) + \dots + (6^2 - 5^2) + (4^2 - 3^2) + (2^2 - 1^2)\end{aligned}$$

Dengan menggunakan $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, maka dapat disederhanakan menjadi:
 $(2016 - 2015)(2016 + 2015) + (2014 - 2013)(2014 + 2013) + (2012 - 2011)(2012 + 2011) + \dots + (6 - 5)(6 + 5) + (4 - 3)(4 + 3) + (2 - 1)(2 + 1)$

$$2016 + 2015 + 2014 + 2013 + 2012 + 2011 + \dots + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 \quad (\text{sebanyak } 2016 \text{ suku})$$

Dengan cara Gauss dapat disederhanakan menjadi:

$$\begin{aligned}(2016 + 1) + (2015 + 2) + (2014 + 3) + (2013 + 4) + (2012 + 5) + \dots + (1008 + 1009) \\2017 + 2017 + 2017 + 2017 + 2017 + 2017 + \dots + 2017\end{aligned}$$

Sehingga didapat:

$$2017(1008) = 2033136$$

Jadi, Nilai dari $2016^2 - 2015^2 + 2014^2 - 2013^2 + 2012^2 - \dots - 3^2 + 2^2 - 1^2$ adalah 2033136

o) Menggunakan Manipulasi Aljabar

Suatu soal yang menuntut kita untuk menggunakan konsep faktorisasi aljabar atau bentuk identitas aljabar

Contoh 15.1:

Tentukan semua bilangan bulat positif m, n dengan n bilangan ganjil yang memenuhi
$$\frac{3}{m} + \frac{4}{n} = \frac{1}{10}$$

Pembahasan:

Mencari pola untuk menyelesaikan masalah yang terdapat pada soal, yaitu sebagai berikut:

$$\frac{3}{m} + \frac{4}{n} = \frac{1}{10}$$

$$30n + 10m = mn$$

$$mn - 10m - 30n = 0$$

$$mn - 10m - 30n + 300 = 300 \quad (\text{ruas kiri dan kanan ditambah 300})$$

$$(m - 30)(n - 10) = 300$$

$$(m - 30)(n - 10) = 3 \times 10^2$$

Karena n ganjil maka $n - 10$ juga ganjil.

Faktor ganjil dari 300 adalah 1 dan 3

- Jika $n - 10 = 1$ maka $n = 11$
 $m - 30 = 300 \Rightarrow m = 330$
- Jika $n - 10 = 3$ maka $n = 13$
 $m - 30 = 100 \Rightarrow m = 130$

Jadi, Pasangan (m, n) yang memenuhi adalah $(130, 13)$, $(330, 11)$

Contoh 15.2:

Tentukan semua nilai yang mungkin bagi x bilangan real yang memenuhi persamaan berikut:

$$2^x + 3^x - 4^x + 6^x - 9^x = 1$$

(Sumber: Soal OSNG Provinsi 2014)

Pembahasan:

$$2^x + 3^x - 4^x + 6^x - 9^x = 1$$

$$2^x + 3^x - (2^x)^2 + (2^x 3^x) - (3^x)^2 = 1$$

Misalkan : $2^x = a$, dan $3^x = b$, maka

$$a + b - a^2 + ab - b^2 = 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - a - b - ab + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \times [(2a^2 + 2b^2 - 2a - 2b - 2ab + 2)] = \frac{1}{2} \times 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} [(2a^2 + 2b^2 - 2a - 2b - 2ab + 2)] = 0$$

$$\Leftrightarrow [(2a^2 + 2b^2 - 2a - 2b - 2ab + 2)] = 2 \times 0$$

$$\Leftrightarrow (2a^2 + 2b^2 - 2a - 2b - 2ab + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow [(a^2 + b^2 - 2ab) + (a^2 - 2a + 1) + (b^2 - 2b + 1)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (a - b)^2 + (a - 1)^2 + (b - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{sehingga yang memenuhi adalah } a = b, a = 1, \text{ dan } b = 1$$

$$\text{Dengan demikian: } 2^x = a \Leftrightarrow 2^x = 1 \Leftrightarrow 2^x = 2^0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$3^x = b \Leftrightarrow 3^x = 1 \Leftrightarrow 3^x = 3^0 \Leftrightarrow x = 0$$

Jadi, bilangan real x yang memenuhi persamaan adalah $x = 0$

F. Latihan Soal

Soal Latihan Bagian Pertama: Bilangan

1. Suatu bilangan puluhan nilainya sama dengan tiga kali hasil kali digit-digitnya. Hasil kali semua bilangan puluhan yang memenuhi sifat tersebut adalah
2. Misalkan a dan b bilangan bulat sehingga $a(a+b) = 34$. Nilai terkecil dari $a - b$ adalah ...
 A. -17
 B. -32
 C. -34
 D. -67
3. Sebuah bilangan x nilainya sama dengan tiga kali kuadrat bilangan A. Dan nilai bilangan tersebut juga sama dengan tujuh kali kubik bilangan B. Tentukan nilai x !
4. Berapakah banyak angka 0 dari hasil 22222222222222222222 dibagi dengan 222?
5. Jika operasi $*$ terhadap bilangan rasional positif didefinisikan sebagai $a*b = \frac{ab}{a+b}$, maka $3*(3*3) = \dots$
6. Misalkan $a * b$ adalah bilangan bulat untuk setiap bilangan bulat a dan b . Untuk setiap bilangan bulat a dan b , kita memiliki $(a+1) * b - (a-1) * b = 4a$ dan $b * a = -(a * b)$. Jika $1 * 0 = 1$, carilah nilai dari $101 * 100$.
7. Operasi $*$ untuk himpunan bilangan $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ didefinisikan sesuai tabel di bawah ini:

*	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	1	3	5
3	0	3	6	2	5	1	4
4	0	4	1	5	2	6	3
5	0	5	3	1	6	4	2
6	0	6	5	4	3	2	1

Jika untuk setiap bilangan bulat n yang lebih besar dari pada 1 didefinisikan $x^n = x^{n-1} * x$, maka $5^{2015} = \dots$

- A. 0
 - B. 1
 - C. 2
 - D. 3
8. Misalkan A, B, C, D , dan E melambangkan dengan tepat satu-persatu bilangan 0, 1, 2, 4, dan 8 (tidak harus dengan urutan tersebut). Diketahui persamaan-persamaan berikut dipenuhi oleh kelima bilangan di atas;

$$C^D = E; \quad A^A = C; \quad \sqrt{B} = A \times \sqrt{A}$$
 Huruf yang tepat melambangkan bilangan 4 adalah

9. Suatu soal ujian terdiri dari 50 pertanyaan pilihan ganda dengan ketentuan penilain sebagai berikut: setiap jawaban benar diberi skor +4, setiap jawaban salah diberi skor -1, dan setiap soal yang tidak dijawab diberi skor 0. Jika pada ujian tersebut Tulus tidak menjawab beberapa soal dan mendapat total skor 50, maka maksimal banyaknya pertanyaan yang dijawab benar oleh Tulus adalah
10. Pada suatu kompetisi sepakbola antar sekolah berlaku aturan penilaian bagi masingmasing tim sekolah sebagai berikut: jika menang mendapatkan nilai 5, jika kalah mendapat nilai -2, serta pertandingan seri (draw) mendapatkan nilai 0. Setiap tim mendapatkan giliran 20 kali bertanding. Diketahui tim Sekolah Harapan tidak pernah mendapatkan hasil seri dan ternyata hanya mendapat nilai 58, berapa banyak pertandingan yang berhasil dimenangkan oleh tim Sekolah Harapan?
11. Agus dilahirkan pada tanggal 17 Agustus beberapa tahun yang lalu. Pada waktu itu di bulan Agustus terdapat 4 hari Jum'at dan 5 hari Sabtu. Hari apakah kelahiran Agus?
12. Sebuah perusahaan kontraktor akan membangun dua buah gedung kembar. Dalam pemancangan tiang konstruksi beton bertulang pada gedung pertama, disediakan 30 mesin konstruksi. Ternyata pemancangan tiang konstruksi tersebut selesai dalam waktu 15 hari. Dengan 30 mesin konstruksi yang sama, kontraktor ini mulai membangun gedung kedua. Karena adanya suatu kecelakaan yang tidak diduga, pembangunan gedung hanya berjalan 5 hari kemudian terhenti selama 4 hari. Supaya pelaksanaan pekerjaan itu dapat diselesaikan dalam waktu 15 hari (seperti dalam pembangunan gedung pertama), berapa banyak mesin konstruksi harus ditambahkan?
13. Jika $a679b$ adalah bilangan lima angka yang habis dibagi 72, tentukan nilai a dan b .
14. Tentukan bilangan asli terkecil yang memenuhi bahwa semua digit $15n$ adalah 0 atau 8.
15. 2^{2013} dibagi oleh 13, maka sisanya adalah ...
16. Bentuk pecahan sederhana dari $0,285714285714285....$ adalah
17. Nilai x yang memenuhi persamaan $\left(\sqrt[3]{\frac{1}{243}}\right)^{3x} = \left(\frac{3}{3^{x-2}}\right)^2 \sqrt[3]{\frac{1}{9}}$ adalah
 - A. $-5\frac{1}{3}$
 - B. $-1\frac{7}{9}$
 - C. $1\frac{7}{9}$
 - D. $5\frac{1}{3}$
18. Bilangan tiga digit 2A3 jika ditambah dengan 326 akan menghasilkan bilangan tiga digit 5B9. Jika 5B9 habis dibagi 9, maka $A + B =$
 - A. 5
 - B. 6
 - C. 7
 - D. 8
 - E. 9

19. Berapakah bilangan terkecil yang harus dikurangkan dari 9876643219 agar sisanya habis dibagi 15?
20. Jalan Majapahit sejajar dengan jalur kereta api yang membentang lurus. Anton menumpang bus OSN di jalan Majapahit dengan kecepatan konstan (tetap) 40 km/jam . Dari arah berlawanan, bus yang ditumpangi Anton berpapasan dengan kereta api barang yang bergerak dengan kecepatan konstan 20 km/jam . Anton mencatat bahwa bus dan kereta api berpapasan selama seperempat menit dihitung mulai dari lokomotif (bagian paling depan) sampai bagian paling belakang. Panjang kereta api tersebut adalah meter.
21. H adalah himpunan semua bilangan asli n demikian sehingga bentuk $= \frac{n-1}{n-3}$ menghasilkan bilangan bulat kurang dari 1. Banyaknya himpunan bagian tak kosong dari H adalah
22. Banyak bilangan positif n sehingga $\frac{2013}{n^2-3}$ berupa bilangan bulat positif adalah ...
23. Banyak cara untuk menyatakan bilangan 4725 sebagai perkalian dari dua bilangan ganjil yang lebih besar dari 1 adalah
24. Suatu bilangan dikatakan "*berprisque*" jika bilangan tersebut merupakan bilangan asli yang didapat oleh suatu bilangan prima dan suatu bilangan kuadrat sempurna (contoh 3 adalah bilangan *berprisque*, tetapi 5 bukan bilangan *berprisque*). Banyak bilangan *berprisque* yang kurang dari 100 adalah
25. Alamat rumah di Jalan Bahagia semula tidak memiliki nomor, sehingga Pak Pos sering kesulitan untuk mengantarkan surat. Oleh karena itu disepakati untuk menomori rumah-rumah di sana dengan cara sebagai berikut. Salah satu sisi dinomori dengan nomor ganjil berurutan dimulai dengan 3, sedangkan sisi seberangnya adalah genap berurutan dimulai dari 2. Pada deretan rumah bernomor genap, ternyata masih terdapat beberapa kapling kosong. Pada waktu pengurus RT setempat memesan nomor-nomor rumah tersebut, diketahui biaya pembuatan setiap digit adalah Rp 5.000,00 dengan total biaya yang harus dikeluarkan adalah Rp 425.000,00. Biaya pembuatan seluruh nomor rumah sisi genap adalah Rp 55.000,00 lebih murah dibanding sisi ganjil, karena kapling yang masih kosong belum dibuatkan nomor rumah. Apabila kapling kosong nanti sudah dibangun rumah, maka banyaknya rumah di sisi genap dan ganjil adalah sama. Berapakah banyaknya kapling kosong di Jalan Bahagia?

Soal Latihan Bagian Kedua: Aljabar

1. Sederhanakan
$$\frac{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64} - \frac{1}{128} + \dots}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \dots} = \dots$$
2. Diketahui Raihan dan Raisa masing-masing adalah siswa laki-laki dan perempuan kelas IX di suatu sekolah. Mereka sedang mengamati banyaknya siswa di sekolah mereka. Raisa mencatat bahwa $\frac{3}{20}$ dari total siswa di kelas IX adalah laki-laki. Sedangkan menurut catatan Raihan, $\frac{1}{7}$ dari total siswa di kelas IX selain dirinya adalah laki-laki. Banyak siswa laki-laki kelas IX di sekolah mereka adalah
3. Berikut diberikan data siswa kelas VIII SMP Bina Prestasi. Tiga perlima bagian dari seluruh siswa adalah perempuan. Setengah dari siswa laki-laki diketahui pergi ke sekolah naik bus sekolah, sedangkan siswa perempuan hanya seperenamnya yang pergi ke sekolah naik bus sekolah. Diketahui juga bahwa terdapat 147 siswa pergi ke sekolah tidak naik bus sekolah.
Banyak siswa kelas VIII sekolah tersebut adalah
A. 330
B. 245
C. 210
D. 193
4. Jika nilai ulangan siswa kelas VIII terdiri dari bilangan genap berurutan dengan nilai terendah = 2, dan Tertinggi = 98, jangkauan interkuartil dari data tersebut adalah ...
5. Tujuh tahun lalu perbandingan umur Doni dan Dona adalah 2 : 1. Tahun ini perbandingan umur mereka adalah 5 : 3. Berapa perbandingan umur mereka tujuh tahun yang akan datang?
6. Suatu hari perbandingan jumlah uang Netty dan Agit adalah 2 : 1. Sehari kemudian Netty memberikan uangnya sejumlah Rp100.000,00 kepada Agit. Sekarang perbandingan uang Netty dan Agit adalah 1 : 3. Jumlah uang Netty sekarang adalah Rp...
a. 240.000,00
b. 180.000,00
c. 120.000,00
d. 100.000,00
e. 60.000,00
7. Jika bilangan ganjil dikelompokkan seperti berikut: {1}, {3,5}, {7,9,11}, {13,15,17,19}, maka suku tengah dari kelompok ke-11 adalah....
A. 21
B. 31
C. 61
D. 111
E. 121

8. Suatu survey kegemaran olah raga terhadap 100 orang siswa SMP memberikan hasil berikut. Terdapat 56 orang gemar berenang serta 74 gemar bulu tangkis. Berapa jumlah terbanyak yang mungkin dari siswa yang gemar kedua cabang olah raga tersebut?

9. Bilangan asli n terbesar yang memenuhi $\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ kurang dari 2015 adalah ...

10. Selesaikan

$$\frac{1}{1 \times 4} + \frac{1}{4 \times 7} + \frac{1}{7 \times 10} + \dots + \frac{1}{2011 \times 2014}$$

11. Jika diberikan persamaan berikut

$$\frac{1}{1 + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2012} + \sqrt{2013}} = a + b$$

Tentukan nilai $a^2 + b^2$.

12. Diketahui $S_n = \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{n}{(n-1)!}$. Carilah nilai dari $\frac{1 - S_{2013}}{1 - S_{2014}}$

13. Jika $a^2 + b^2 = 6ab$ untuk a dan b bilangan real dan $0 < a < b$, maka tentukan nilai dari $\frac{a+b}{a-b}$.

14. Banyak pasangan (x, y) dengan x dan y bilangan asli yang memenuhi $x^2 = y^2 + 100$ adalah....

A. 0
B. 1
C. 2
D. 3

15. Bilangan 45 dapat dinyatakan sebagai selisih dari bilangan kuadrat, yakni $a^2 - b^2$ dengan a dan b adalah bilangan asli. Semua pasangan bilangan asli a dan b yang memenuhi persamaan $a^2 - b^2$ adalah....

16. Bilangan 63 dapat dinyatakan sebagai selisih dari bilangan kuadrat, yakni $a^2 - b^2$, dengan a dan b adalah bilangan asli. Pasangan bilangan asli a dan b yang memenuhi $a^2 - b^2 = 63$ dengan hasil kali terbesar adalah

17. Nilai dari $\frac{2017 \times (2016^2 - 16) \times 2015}{2020 \times (2016^2 - 1)}$ adalah

A. 2012
B. 2013
C. 2014
D. 2015

18. Banyak bilangan real x yang memenuhi $x^{2016} - x^{2014} = x^{2015} - x^{2013}$ adalah
A. 0
B. 1
C. 2
D. 3
19. Diketahui barisan fungsi $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots$ sedemikian sehingga $f_1(x) = x$ dan $f_{n+1}(x) = \frac{1}{1 - f_n(x)}$ untuk bilangan $n \geq 1$. Nilai dari $f_{2016}(2016) = \dots$
20. Tentukan semua bilangan real x yang memenuhi persamaan berikut :
 $2^x + 3^x - 4^x + 6^x - 9^x = 1$
21. Fungsi f didefinisikan pada bilangan bulat yang memenuhi $f(1) = 2016$ dan $f(1) + f(2) + \dots + f(n) = n^2 f(n)$ untuk semua $n > 1$. Hitunglah nilai $f(2016)$.
22. Di Indonesia, dahulu dikenal pecahan yang disebut “Pecahan Nusantara”. Pecahan Nusantara adalah pecahan $\frac{a}{b}$ demikian sehingga a dan b adalah bilangan-bilangan asli dan $a < b$. Tentukan jumlah semua pecahan nusantara mulai dari pecahan dengan $b = 2$ sampai dengan $b = 1000$.
23. Sebuah fungsi f terdefinisi pada himpunan bilangan asli dan memiliki sifat sebagai berikut:
- $$f(1) = 2, \quad f(x) = \begin{cases} 10f\left(\frac{x}{2}\right) + 4, & x \text{ genap} \\ f(x-1) - 10x + 7, & x \text{ ganjil} \end{cases}$$
- Tentukan nilai $f(10)$
24. Tentukan semua bilangan nyata x yang memenuhi kesamaan berikut.
- $$\sqrt{x + \sqrt{2x - 1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x - 1}} = 1$$
25. Didefinisikan A adalah himpunan semua bilangan asli yang bukan merupakan selisih dua buah bilangan kuadrat, diurutkan dari yang terkecil. Tentukan anggota ke-2016 dari himpunan A .

Soal Latihan Bagian Ketiga: Geometri

1. Diketahui garis L_1 sejajar garis L_2 dan garis L_3 sejajar garis L_4 .

Besar sudut $y - x$ adalah

- A. 0°
B. 10°
C. 30°
D. 50°
2. Diketahui rangkaian persegi yang disusun secara berkesinambungan dan membentuk sudut-sudut sebagaimana pada gambar berikut. Tentukan nilai sudut yang ditandai dengan huruf x .

3. Banyak persegi pada gambar berikut adalah

4. Luas persegi panjang $ABCD$ adalah 112 satuan luas. Titik E dan F berada di diagonal AC seperti pada gambar di bawah ini sedemikian sehingga $3(AE + FC) = 4 EF$. Luas segitiga DEF adalah... satuan luas

5. Pada gambar berikut, segitiga sama sisi terletak di dalam sebuah persegi. Perbandingan luas segitiga dan persegi adalah

6. Perhatikan Gambar 1.

Gambar 1

Jika segitiga TT_1T_x siku-siku sama kaki dan panjang $TT_1 = 8$ cm, maka $TT_1 + T_1T_2 + T_2T_3 + T_3T_4 + T_4T_5 + \dots$ adalah

7. Diketahui $ABCD$ dan $CEGH$ adalah dua persegipanjang kongruen dengan panjang 17 cm, dan lebar 8 cm. Titik F adalah titik potong sisi AD dan EG . Luas segiempat $EFDC$ adalah cm^2 .
- A. 74,00
B. 72,25
C. 68,00
D. 63,75

8. Garis AB dan CD sejajar dan berjarak 4 satuan. Misalkan AD memotong BC di titik P diantara kedua garis. Jika $AB = 4$ dan $CD = 12$, berapa jauh P dari garis CD ?
9. Trapezium $ABCD$ memiliki panjang sisi $CD = 24$ cm dan $AB = 56$ cm. Garis DF sejajar BC dengan F pada AB . Garis CE sejajar AD memotong AB pada E . Jika luas $EFG = 1$ cm^2 dan G titik potong CE dengan DF , tentukan luas $ABCD$!

10. Perhatikan gambar di samping.

Jika panjang sisi pada persegi yang terbesar adalah 1 satuan panjang dan persegi berikutnya diperoleh dengan cara menghubungkan semua titik tengah pada keempat sisinya, maka jumlah luas yang diarsir adalah...

11. Diketahui T adalah titik tengah suatu segi-6 beraturan dengan panjang sisi 1 satuan. Berapakah panjang TE ?

12. Empat titik ditempatkan ditempatkan pada lingkaran berjari-jari $\frac{1}{2}$ satuan . Jika keempat titik tersebut dihubungkan sehingga membentuk persegi panjang, maka luas terbesar (maksimum) yang mungkin bagi persegi panjang tersebut adalah ...
13. Misalkan a dan b menyatakan luas daerah yang diarsir pada gambar dibawah. Kelima lingkaran kecil berjari-jari r . Titik-titik pusat empat lingkaran kecil yang menyinggung lingkaran besar merupakan titik-titik sudut persegi. Jika a sama dengan 10 cm^2 , maka $b = \dots$

14. Diberikan persegi $ABCD$, busur lingkaran berpusat di B dan D digambarkan dari titik A ke C . Garis diagonal BD memotong kedua busur di titik X dan Y . Jika $XY: 12 - 6\sqrt{2}$ cm, maka luas persegi $ABCD$ adalah ... cm^2 .

15. Diberikan suatu persegi panjang yang memuat tiga lingkaran seperti gambar di bawah. Sekeliling persegi panjang menyinggung lingkaran dan semua lingkaran saling bersinggungan. Jika lebar persegipanjang 4 satuan, maka panjangnya adalah Satuan.

16. Pada gambar di bawah ini, A adalah pusat lingkaran, dengan $\angle ABD = 20^\circ$ dan $\angle DCA = 52^\circ$. Berapakah besar $\angle BOC$?

17. Diketahui lingkaran berpusat di O seperti gambar berikut:

Diketahui panjang CD sama dengan jari-jari lingkaran dan $\angle OCA = 30^\circ$. Tentukan perbandingan luas lingkaran dengan luas segitiga AOC .

18. Diberikan bangun datar segitiga siku-siku, lingkaran dan persegi panjang dengan informasi sebagai berikut:
- Panjang sisi segitiga siku-siku adalah bilangan bulat positif
 - Salah satu sisinya lebih pendek 18 cm dari sisi miringnya
 - Sisi miring segitiga siku-siku sama dengan jari-jari lingkaran
 - Luas lingkaran adalah $625 \pi \text{ cm}^2$
 - Panjang dan lebar persegipanjang sama dengan sisi-sisi yang saling tegak lurus pada segitiga
- Berapakah total luas ketiga bangun datar dengan kriteria tersebut di atas?

19. Hitunglah luas daerah dari tiga daerah setengah lingkaran yang beririsan seperti tampak pada gambar berikut.

20. Empat kubus identik dengan panjang rusuk 5 cm disusun menjadi suatu bangun ruang dengan cara menempelkan sisi-sisinya. Banyak bangun ruang berbeda yang terbentuk adalah...
- A. 10
B. 8
C. 6
D. 5
E. 3
21. Setiap sisi suatu kubus dituliskan sebuah bilangan asli. Setiap titik sudutnya diberi nilai yang merupakan hasil kali dari tiga bilangan pada tiga sisi yang berpotongan di titik sudut tersebut. Jika jumlah semua bilangan pada titik-titik sudut tersebut sama dengan 1001, tentukan jumlah semua bilangan yang dituliskan pada sisi-sisi kubus tersebut.
22. Jika diketahui panjang rusuk kubus $ABCD.EFGH$ adalah 1 satuan, maka jarak titik E ke bidang datar AFH adalah ... satuan
- A. $\frac{1}{2}$
B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
C. $\frac{1}{3}$
D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$
E. $\frac{\sqrt{3}}{4}$
23. Sebuah kerucut dibuat dari bagian juring lingkaran yang ditandai pada gambar berikut. Volume kerucut tersebut adalah ... cm^3 . Catatan: Bilangan akar dan konstanta π tidak perlu dihitung sebagai bilangan decimal atau pecahan.

24. Sebuah silinder memiliki tinggi 5 cm dan volume 20 cm^3 . Luas permukaan bola terbesar yang mungkin diletakkan ke dalam silinder tersebut adalah
25. Gambar berikut adalah sebuah ember dengan $\frac{3}{4}$ bagiannya berisi air. Jika diameter ember bagian atas 42 cm dan diameter bagian bawah 28 cm serta tinggi ember 28 cm, maka volume air adalah ... cm^3 .

Soal Latihan Bagian Keempat: Statistika dan Peluang

1. Diketahui sekelompok data memiliki sifat-sifat berikut:
- Terdiri dari 5 data bilangan bulat positif dengan rata-rata = 7
 - Median = modus = 9
- Jika jangkauan didefinisikan sebagai selisih data terbesar dengan data terkecil, maka jangkauan terbesar yang mungkin adalah ...
- 11
 - 12
 - 13
 - 14
 - 15

2. Rata-rata nilai dari 28 siswa adalah 80. Setelah ditambah nilai siswa A dan B, rata-ratanya menjadi 78. Jika nilai A tiga kali nilai B, maka selisih antara nilai A dan B adalah....
- 15
 - 25
 - 50
 - 75

3. Perhatikan diagram batang berikut.

Pernyataan berikut yang salah adalah

- Modus pada gambar A < Modus pada gambar B
 - Median pada gambar A < Median pada gambar B
 - Quartil 1 pada gambar A < Quartil 1 pada gambar B
 - Rata – rata pada gambar A = Rata – rata pada gambar B
4. Suatu survey dilakukan terhadap 100 siswa peserta OSN tingkat kabupaten/kota berkaitan dengan frekuensi pengiriman sms pada suatu hari. Hasil yang diperoleh sebagai berikut.

Jumlah sms	Persentase
1 – 10	5%
11 – 20	10%
21 – 30	15%
31 – 40	20%
41 atau lebih	25%

Sisanya dilaporkan tidak mengirim sms. Jika dipilih seorang siswa secara acak, maka peluang siswa tersebut mengirim sms tidak lebih dari 30 kali adalah ...

- 0,55
- 0,30
- 0,25
- 0,15

5. Suatu perusahaan menjual dua jenis produk A dan B. Rasio hasil penjualan produk A dan B dari tahun 2012 sampai dengan 2015 disajikan pada gambar berikut.

Diketahui banyak penjualan produk A selama 4 tahun adalah sebagai berikut.

Tahun	2012	2013	2014	2015
Produk A	1200	2400	2400	3600

Rata-rata banyak penjualan produk B dalam 4 tahun yang sama adalah

- A. 1000
B. 1340
C. 1350
D. 1500
6. Terdapat lima bilangan bulat positif dengan rata-rata 40 dan jangkauan 10. Nilai maksimum yang mungkin untuk bilangan terbesar dari lima bilangan tersebut adalah
A. 50
B. 49
C. 48
D. 45
7. Di kelas VIII terdapat 11 siswa. Pada saat ulangan Matematika, ada satu orang siswa yang sakit sehingga harus mengikuti ulangan susulan. Nilai 10 siswa yang mengikuti ulangan pada waktunya adalah 20, 10, 40, 80, 50, 60, 40, 70, 90, dan 30. Jika nilai siswa yang mengikuti ulangan susulan diperhitungkan, maka rata-rata nilai yang diperoleh sama dengan median. Nilai terbesar yang mungkin diperoleh siswa yang mengikuti ujian susulan adalah
8. Lima siswa A, B, C, D, E berada pada satu kelompok dalam lomba lari estafet. Jika A tidak bisa berlari pertama dan D tidak bisa berlari terakhir, berapa banyak susunan yang mungkin terjadi?
9. Setiap kartu ATM diketahui memiliki kode rahasia (PIN) yang terdiri dari 4 digit angka. Sebuah bank mensyaratkan kode rahasia terdiri dari angka tak nol yang tidak harus saling berbeda, tetapi angka penyusun tersebut harus berjumlah 10. Ada berapa banyak kode rahasia berbeda yang memenuhi syarat tersebut?

10. Lima angka yakni 1, 2, 3, 4, dan 5 dapat disusun semuanya tanpa pengulangan menjadi 120 bilangan berbeda. Jika bilangan–bilangan tersebut diurutkan dari yang terkecil ke yang terbesar, maka bilangan yang menempati urutan ke-75 adalah
11. Didalam pertandingan sepakbola antar SMP, dari setiap sekolah dipilih 15 pemain dari kelas VII, VIII dan IX. Dari kelas VII dipilih 3 pemain, dari kelas VIII dipilih 4 pemain dan dari kelas IX dipilih 8 pemain.
 - a. Diantara pemain-pemain tersebut dipilih 2 orang dari kelas berbeda sebagai penjaga gawang. Tentukan banyaknya cara didalam memilih penjaga gawang!
 - b. Diantara pemain-pemain tersebut dipilih 2 orang dari kelas berbeda, satu orang sebagai kapten kesebelasan dan satu orang sebagai penjaga gawang. Tentukan banyaknya cara didalam memilih penjaga gawang!
12. Ada 5 pemuda dan 3 pemuda duduk mengelilingi meja bundar, tentukan banyaknya cara duduk jika
 - a. duduk bebas.
 - b. tidak ada pemuda duduk berdampingan.
13. Ada berapa banyak cara memilih secara acak 2 bola merah, 3 bola putih dan 1 bola kuning dari dalam kotak yang berisi 5 bola merah, 4 bola putih, 3 bola kuning dan 4 bola hijau ?
14. Tentukan banyaknya solusi bilangan bulat tak negatif dari persamaan berikut:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7!$$

15. Suatu antrian pembelian tiket masuk pertandingan sepak bola terdiri dari 2012 orang. Jika diantara 2 pria paling sedikit terdapat 3 wanita, maka banyaknya pria pada antrian tersebut paling banyak adalah ...
 - A. 501
 - B. 502
 - C. 503
 - D. 504
 - E. 505
16. Lima orang anak akan naik mobil dengan kapasitas enam tempat duduk, yakni dua di depan termasuk pengemudi (Sopir), dua di tengah, dan dua di belakang. Jika hanya ada dua orang yang bisa mengemudi, banyak cara mengatur tempat duduk mereka adalah ...
 - A. 120
 - B. 200
 - C. 220
 - D. 240
 - E. 280
17. Delapan buku yang berbeda akan dibagikan kepada tiga orang siswa A, B, dan C sehingga berturut-turut mereka menerima 4 buku, 2 buku, dan 2 buku. Banyak cara pembagian buku tersebut adalah
18. Suatu tim perwakilan sekolah terdiri dari 3 siswa dipilih secara acak dari 5 siswa laki-laki dan 5 siswa perempuan. Peluang bahwa tim tersebut terdiri dari paling tidak 2 siswa perempuan adalah ...

19. Empat orang siswa makan siang di suatu kantin. Di kantin tersebut masih tersedia 3 porsi nasi goreng, 20 porsi nasi pecel, dan 25 porsi nasi rawon, 19 gelas jus alpukat, 17 gelas jeruk panas, dan 15 gelas jus sirsak. Mereka ingin memesan 4 porsi makanan dan 3 gelas minuman. Tentukan banyak pilihan komposisi makanan dan minuman yang mungkin mereka pesan.
20. Sebuah kotak berisi 3 kelereng merah, 4 kelereng hijau dan 5 kelereng biru. Jika dari dalam kotak diambil 3 buah kelereng, maka berapa peluang :
- semua kelereng yang terambil berwarna merah
 - semuanya biru
 - 2 buah berwarna merah dan 1 berwarna hijau
 - 1 berwarna merah, 1 hijau dan 1 biru
21. Suatu percobaan dilakukan dengan ketentuan sebagai berikut :
- Pertama kali dilakukan pelemparan sekeping mata uang
 - Jika dalam pelemparan mata uang muncul sisi gambar, percobaan dilanjutkan dengan pelemparan mata uang. Sedangkan jika muncul sisi angka, percobaan dilanjutkan dengan sebuah dadu bersisi enam.
 - Jika sampai dengan pelemparan mata uang untuk ketiga kalinya selalu muncul gambar, percobaan dihentikan.
 - Jika dalam pelemparan dadu muncul angka genap, pelemparan dihentikan.
 - Jika dalam pelemparan dadu muncul angka ganjil, pelemparan diulang sekali dan selanjutnya pelemparan dihentikan apapun angka yang muncul.
- Peluang bahwa dalam percobaan tersebut tidak pernah terjadi pelemparan dadu adalah....
- 1
 - $\frac{1}{2}$
 - $\frac{1}{16}$
 - $\frac{1}{64}$
22. Sebuah mata uang dan sebuah dadu dilantunkan bersama-sama. Bila diketahui mata uang muncul angka, maka peluang munculnya mata dadu lebih dari 2 adalah ...
- $\frac{1}{6}$
 - $\frac{1}{4}$
 - $\frac{3}{8}$
 - $\frac{2}{3}$
 - $\frac{5}{8}$
23. Lima permen identik (berbentuk sama), satu rasa apel, dua rasa jeruk dan dua rasa jahe akan dibagikan kepada lima sekawan Anto, Bono, Carli, Dede dan Edo, sehingga masing-masing mendapat satu permen. Peluang Anto mendapat permen rasa jahe adalah ...

24. Dari sebuah tumpukan kartu bridge, diambil dua kartu satu persatu tanpa pengembalian. Berapakah peluang kartu pertama yang terambil adalah kartu As dan kartu kedua adalah kartu King ?

25. Sebuah dadu unik memiliki angka-angka pada sisi-sisinya sebagai berikut:

2; 2; 4; 5; 6; 7. Jika dadu tersebut dilemparkan 2 kali, berapa peluang muncul angka kedua lebih kecil dari angka pertama?

DAFTAR PUSTAKA

- Engel, Arthur. 1998. *Problem-Solving Strategies*. Springer-Verlag, New York.
- As'ari, Sisworo, dan Susanto H., 2006. *Napak Tilas Olimpiade Sains Nasional : Matematika SMP*. Universitas Negeri Malang Press.
- Budhi, Wono Setya. 2006. *Langkah Awal Menuju ke Olimpiade Matematika*. Ricardo, Jakarta.
- Hasan S., Ridwan. 2010. *Bahan Pelatihan Guru Pembina Olimpiade Matematika Internasional*”, Al Hikmah Math Olympiad Forum 2010. KPM Indonesia. Surabaya
- Xu Jaigu. 2010. *Mathematical Olympiad Series*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. Singapore
- Hermanto, Eddy. 2011. *Diklat Pembinaan Olimpiade Matematika Dasar*. SMA Negeri 5 Bengkulu.
- Arif, Saiful. 2011. *Bahan Pelatihan Olimpiade MGMP Matematika Kota Malang*. MGMP Kota Malang
- Dahlia dkk. 2016. *Bahan Pembinaan OSN Guru Matematika SMP Kota Malang*. Dinas Pendidikan Kota Malang
- Tohir, Mohammad. 2016. *Pembinaan Olimpiade Matematika SMP/MTs*. SMP Negeri 2 Jember.
- Tohir, Mohammad. 2013. *Kumpulan Soal dan Pembahasan Olimpiade Matematika SMP*: <http://olimattohir.blogspot.co.id/2013/06/olimpiade-matematika.html>, diunduh tanggal 10 Juni 2016.