[white paper]

Diamond Open Access

Uma prova de que e^r é irracional

Colaboração Matemática Aberta¹

18 de Dezembro de 2020

Resumo

Trazemos uma demonstração de que o número e^r é irracional para qualquer $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

palavras-chave: irracional, Euler, números

A versão mais atualizada deste artigo está disponível em

<https://osf.io/qjza3/download>

Como ser coautor(a) deste artigo?

1. Envie-nos suas observações e responda às seguintes perguntas.
2. Quais discussões você adicionaria a este artigo?
3. Você encontrou algum erro ou argumento inconsistente? Dê uma justificativa detalhada.

¹Todos os autores com suas afiliações aparecem no final deste artigo.

Introdução

4. Apresentamos um apoio para melhor compreender a demonstração do teorema (18) [1].

5. Sejam $x, y \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$.

6. Considere

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

para todo $n, p \in \mathbb{N}$ [2].

7. O binômio de Newton é dado por [2]

$$(x + y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y^1 + \dots + \binom{n}{n}y^n.$$

Lema

8. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função

$$f(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}.$$

Para algum $n > 1$ fixo, tem-se que

(a) A função $f(x)$ é um polinômio da forma

$$f(x) = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{2n} c_i x^i,$$

onde os coeficientes c_i são inteiros.

(b) Para $0 < x < 1$, temos $0 < f(x) < \frac{1}{n!}$.

(c) As derivadas $f^{(k)}(0)$ e $f^{(k)}(1)$ são inteiros para todo $k \geq 0$, onde $f^{(0)}(x) = f(x)$.

Demonstração do Lema

Prova de (8.a)

9. Pela função de (8), temos:

$$f(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!} = \frac{x^n}{n!}(1-x)^n.$$

10. Aplicando (7) em (9),

$$\begin{aligned} \frac{x^n}{n!}(1-x)^n &= \frac{x^n}{n!} \cdot \left[\binom{n}{0} - \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 - \dots + \binom{n}{n}x^n \right] \\ &= \frac{1}{n!} \cdot \left[\binom{n}{0}x^n - \binom{n}{1}x^{n+1} + \binom{n}{2}x^{n+2} - \dots + \binom{n}{n}(-1)^n x^{2n} \right] \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{i=n}^{2n} c_i x^i, \quad \text{onde } c_i = (-1)^{i-n} \binom{n}{i-n}. \end{aligned}$$

Prova de (8.b)

11. Para $x \in (0, 1)$, temos:

$$0 < f(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!} < \frac{(1-x)^n}{n!} < \frac{1}{n!}.$$

12. De (11),

$$0 < f(x) < \frac{1}{n!}.$$

Prova de (8.c)

13. De (8.a), $f^{(k)}(x) = 0$ para $x = 0$ ou $x = 1$ para $k < n$.

14. Se $n \leq k \leq 2n$, temos que $f^{(k)}(x) = \frac{k!}{n!} c_k$ para $x = 0$, que é um inteiro.

15. Note que $f(x) = f(1-x)$, daí temos que

$$f^{(k)}(x) = f^{(k)}(1-x) = (-1)^k f^{(k)}(1-x),$$

para todo x .

16. Assim,

$$f^{(k)}(1) = (-1)^k f^{(k)}(1-1) = (-1)^k f^{(k)}(0) = (-1)^k \frac{k!}{n!} c_k,$$

que também é inteiro.

17. Portanto, $f^{(k)}(0)$ e $f^{(k)}(1)$ são inteiros para todo $k \geq 0$.

Teorema

18. e^r é irracional para todo $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

Demonstração do Teorema

19. É suficiente mostrar que e^s não pode ser racional para algum $s \in \mathbb{Q}_+^*$.

20. Suponha que

$$e^s = \frac{a}{b}$$

para inteiros $a, b > 0$, e que n seja tão grande que

$$n! > as^{2n+1}.$$

21. Assim,

$$F(x) := s^{2n} f(x) - s^{2n-1} f'(x) + s^{2n-2} f''(x) \mp \dots + f^{(2n)}(x),$$

sendo $f(x)$ a função de (9).

22. A equação de (21) pode ser reescrita como uma soma infinita,

$$F(x) = s^{2n}f(x) - s^{2n-1}f'(x) + s^{2n-2}f''(x) \mp \dots,$$

de modo que a mais alta derivada $f^{(k)}(x) = 0$, com $k > 2n$.

23. A equação de (22) satisfaz a identidade

$$F'(x) = -sF(x) + s^{2n+1}f(x).$$

24. Sabemos que

$$\frac{d}{dx}[e^{sx}F(x)] = se^{sx}F(x) + e^{sx}F'(x).$$

25. De (23) e (24) segue

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[e^{sx}F(x)] &= se^{sx}F(x) + e^{sx}F'(x) \\ &= se^{sx}F(x) + e^{sx}[-sF(x) + s^{2n+1}f(x)] \\ &= se^{sx}F(x) - se^{sx}F(x) + e^{sx}s^{2n+1}f(x) \\ &= e^{sx}s^{2n+1}f(x). \end{aligned}$$

26. De (25) e (20),

$$N := b \int_0^1 s^{2n+1}e^{sx}f(x)dx = b[e^{sx}F(x)]_0^1 = aF(1) - bF(0).$$

27. Por (8.c), $F(0)$ e $F(1)$ são inteiros.

28. De (8.b) e (20), temos:

$$0 < N = b \int_0^1 s^{2n+1}e^{sx}f(x)dx < bs^{2n+1}e^s \frac{1}{n!} = \frac{as^{2n+1}}{n!} < 1.$$

29. Como N é inteiro, temos uma contradição.

30. Portanto, e^r é irracional para todo $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

Considerações Finais

31. Assim, fica provado que para qualquer $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, tem-se que e^r é irracional.

Ciência Aberta

O **arquivo latex** para este artigo, juntamente com outros *arquivos suplementares*, estão disponíveis em [3].

Referências

- [1] Aigner, Martin, et al. *Proofs from the Book*. Berlin: Springer, 2010.
- [2] Morgado, Augusto César, and Paulo Cezar Pinto CARVALHO. *Matemática Discreta*, Editora SBM, Rio de Janeiro, 2014. Coleção do Professor de Matemática.
- [3] Lobo, Matheus P. “Open Journal of Mathematics and Physics (OJMP).” *OSF*, 21 Apr. 2020.
<https://doi.org/10.17605/osf.io/6hzyyp>

Colaboração Matemática Aberta

Davi Santana de Oliveira Silva

(autor principal, davi.silva@uemasul.edu.br)^{1,2}
<https://orcid.org/0000-0001-6836-7704>

Matheus Pereira Lobo(mplobo@uft.edu.br)^{1,3}
<https://orcid.org/0000-0003-4554-1372>

Giordane Lima Santana ^{1,4}
Hans Müller Silva Oliveira ^{1,5}

Francisco Djalma da Silva Paulo ^{1,6}

¹ Universidade Federal do Tocantins (Brasil)

² Escola Municipal Turma da Mônica – EMTM (São Miguel do Tocantins, Tocantins, Brasil)

³ Universidade Aberta (UAb, Portugal)

⁴ Escola Paroquial Luiz Augusto (Araguaína, Tocantins, Brasil)

⁵ Colégio Invictos (Araguaína, Tocantins, Brasil)

⁶ Colégio Militar do Tocantins – unidade 3 (Araguaína, Tocantins, Brasil)