Restauración de Imágenes mediante Ecuaciones Diferenciales Parciales

Omar Becerra

*Departamento de Ciencias Matemáticas
Universidad EAFIT
Medellín, Colombia*

OABECERRAS@EAFIT.EDU.CO

Daniel Otero

*Departamento de Ciencias Matemáticas
Universidad EAFIT
Medellín, Colombia*

DOTEROG@EAFIT.EDU.CO

Rafael Mateus

*Departamento de Ciencias Matemáticas
Universidad EAFIT
Medellín, Colombia*

RMATEUSC@EAFIT.EDU.CO

Abstract

El proceso de “inpainting” se refiere al proceso de rellenar los datos que faltan en una región dañada de una imagen con el objeto de reconstruir las partes faltantes de tal manera que la región pintada no pueda ser detectada por un observador causal. De este concepto nace la necesidad de encontrar un algoritmo de pintado que repare automáticamente la zona dañada mediante la interpolación de la imagen. En este trabajo se abordará una técnica basada en el concepto de ecuación diferencial parcial de difusión del calor, en la cual aplicaremos métodos de diferencias finitas para reparar las imágenes descrito por Juan Gabriel et al. (2013) y Aubert and Kornprobst (2006), además de evaluar el rendimiento en comparaciones con diferentes esquemas.

Palabras Clave: Diferencias Finitas, Métodos Numéricos, Ecuaciones Diferenciales Parciales, procesamiento de imágenes, visión por computador.

1. Introducción

La restauración de imágenes digitales o “inpainting” busca mejorar la calidad de una imagen, compensando o eliminando las distorsiones producidas por el deterioro de la misma o por daños producido por la cámara utilizada, la sobre exposición y daños causado de manera intencional. La restauración de imágenes digitales recibió su nombre “inpainting” del trabajo pionero en el tema de Bertalmio et al. (2000) el cual fue presentado en *27th Annual Conference on Computer Graphics and Inter-*

active Techniques. Posteriormente, presentó el trabajo como su tesis de doctorado (Bertalmío, 2001), donde describe el primer algoritmo automático de pintura para imágenes digitales, que utilizó un modelo EDP discreto que fue motivado por la obra de los conservadores de arte (Schönlieb, 2015).

En la eliminación de imperfecciones ocasionadas en el proceso de captura de una imagen, donde suele haber efectos indeseados conocidos como ruido, se suele modelar el tipo de daño ocasionado construyendo una transformación inversa utilizada para corregir el daño generado. Una restauración ideal solamente puede ser realizada si el proceso de deterioro se puede describir matemáticamente mediante una función que toma un punto de la imagen y le asigna un valor numérico, a esta terna se le denomina *píxel*. Si consideramos estos, una imagen puede ser representada como una cuadrícula uniforme o una matriz, de tal manera que cada cuadro representa un *píxel* y al graficar todos los píxeles se obtendría una imagen, como se representa a continuación.

$$\begin{bmatrix} P_{1,1} & P_{1,2} & \dots & P_{1,n} \\ P_{2,1} & P_{2,2} & \dots & P_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{m,1} & P_{m,2} & \dots & P_{m,n} \end{bmatrix}$$

Cuando la imagen se encuentra a color, la representación descrita no es suficiente, ya que una matriz no basta para mostrar todos los colores. Por lo tanto, es necesario interpretar la imagen mediante tres matrices, las cuales representan la intensidad de tres colores (rojo(R), verde(G) y azul(B)). Cabe destacar que las matrices R, G, B , son de filas y columnas, pues la imagen asociada a ellas contiene píxeles.

La información de cada píxel, se encuentra restringida al formato en que se halle la imagen; por ejemplo, en el caso de una imagen en formato *JPG*, cada píxel puede almacenar 8 bits de información numérica, por lo tanto, está en capacidad de tomar 2^8 posibles valores, de donde se obtiene que la información de los píxeles varía entre 0, que se puede considerar como la mínima intensidad y 255 para la máxima intensidad, a continuación presentamos como se presentaría una imagen a color en matrices.

$$\begin{bmatrix} R_{1,1} & R_{1,2} & \dots & R_{1,n} \\ R_{2,1} & R_{2,2} & \dots & R_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{m,1} & R_{m,2} & \dots & R_{m,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{1,1} & G_{1,2} & \dots & G_{1,n} \\ G_{2,1} & G_{2,2} & \dots & G_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{m,1} & G_{m,2} & \dots & G_{m,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & \dots & B_{1,n} \\ B_{2,1} & B_{2,2} & \dots & B_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{m,1} & B_{m,2} & \dots & B_{m,n} \end{bmatrix}$$

Con esto ya podemos definir una imagen como un tensor que contiene información numérica que varía de entre 0 y 255, la cuales en conjunto constituyen una representación de la matemática de una imagen.

El presente trabajo esta estructurado de la siguiente manera, primero se realiza una

sección donde se explicara el método propuesto y los conceptos en los que se basa para su construcción, posteriormente se mostraran algunos resultados interesantes, encontrados al someter los algoritmos a algunas pruebas, además de comparar el rendimiento de cada uno de ellos, por ultimo se realizara un discusión de los resultados encontrados, además de discutir puntos que no se abordaron en el artículo de Juan Gabriel et al. (2013) y el libro Aubert and Kornprobst (2006) de donde se baso este trabajo, y se consideramos que deben ser tenidos en cuenta cuando se trabaja en este tipo de problemas, además de la principales conclusiones que se lograron obtener de este trabajo.

2. Método propuesto

Como se mencionó, la descripción matemática de una imagen se puede llevar a cabo mediante el uso de matrices. Esta representación hace mas fácil encontrar y detectar regiones dañadas y pensar en una posible reparación de las mismas. Para poder realizar dichas reparaciones es necesario identificar primero cuáles son las regiones que necesitan ser retocadas.

Como en muchos otros métodos de procesamiento de imágenes, es necesario identificar características de manera invariante con el nivel de iluminación de ésta, por lo cual, se recurre a utilizar técnicas de identificación de bordes. La ventaja de utilizar este método para reconocer áreas dañadas es que están contruidos alrededor de la identificación del contraste, lo cual es concebido como la diferencia de intensidad en una imagen. Esto ayudo a trazar las fronteras de las características de una imagen de una manera más precisa.

Los bordes de una imagen digital los podemos definir como la posición en la cual se da un cambio de paso, por lo que la implementación de esquemas basados en diferenciación de diferentes ordenes resulta lógica. Estas herramientas, llamadas kernels o máscaras, son construidas bajo la idea de que el cambio se intensidad en un punto puede ser calculada utilizando la diferenciación de puntos adyacentes. El objetivo de los kernels es hallar la dirección y la magnitud en la cual se produce un cambio de intensidad. Debido a esto, se construyen máscaras que recorren la imagen en dirección vertical y horizontal, y la información extraída en cada proceso es utilizada para calcular el ángulo del contraste y su norma. Esto se puede ver en la siguiente expresión, donde Mx y My son los resultados del cálculo en cada uno de los píxeles de la imagen:

$$M = \sqrt{Mx(x, y)^2 + My(x, y)^2} \quad (1)$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{My(x, y)}{Mx(x, y)} \right) \quad (2)$$

Algunos de los kernels de primer orden más famosos son el de Roberts, Prewitt y Sobel. Las máscaras de segundo orden más nombradas son el Laplaciano y el operador de Marr-Hildreth.

El algoritmo de Canny para la detección de bordes es uno de los más utilizados en el área de visión de máquina debido a su buen rendimiento, eficiencia computacional y su naturaleza ajustable, donde los parámetros para la suavidad de detección de bordes puede ser definidos por el usuario. El operador fue diseñado con base en tres objetivos concretos:

1. Detección óptima, no detecciones falsas.
2. Buena localización, con distancia mínima entre la posición detectada y la real.
3. Respuesta única, eliminando la posibilidad de múltiples respuestas para un mismo borde.

El primer objetivo puede ser concebido como la reducción de la sensibilidad del método ante el ruido. Canny fue el primero en demostrar que la utilización de filtros gaussianos es óptima para la detección de bordes. El segundo y el tercer criterio es conseguido a partir de un proceso llamado supresión de no-máximos. Este se encarga de retener únicamente los píxeles que corresponden al pico del borde, lo cual termina en afinamiento del borde identificado, graficando una única respuesta por borde en el lugar correcto (Nixon and Aguado, 2002). Por último, con el objetivo de reducir el ruido aún más, se realiza un proceso llamado histéresis. Aquí se busca incluir o descartar ciertos bordes de acuerdo a dos parámetros de sensibilidad. Dichos parámetros definirán los límites de inclusión, donde, si el valor de un borde se encuentra por debajo del límite inferior este es descartado inmediatamente, y si es mayor al límite superior este es incluido automáticamente (Nixon and Aguado, 2002). También, dentro del umbral se incluye un criterio que hace que un borde se incluya de manera completa, aún si una parte de esta se encuentra por fuera del límite superior. Los pasos de implementación del algoritmo son los siguientes:

1. Uso de un filtro gaussiano.
2. Uso del operador de Sobel.
3. Uso de la supresión de no-máximos.
4. Evaluación con respecto a límites definidos para la histéresis.

Los bordes se representan gráficamente mediante el uso del color blanco en la regiones donde hay mayor cambio de intensidad, mientras el resto de la imagen, con color negro; esta técnica es conocida como binarización. En particular, si el borde representa una región cerrada, se podrá concluir que corresponde a una región con un daño de

algún tipo o una pérdida total de información.

Para realizar la restauración en este estudio usaremos en filtro de Canny, debido a que es el más utilizado para el propósito de recuperar zonas dañadas. A partir de esta idea el método aplicado sobre las zonas dañadas esta basado en la ecuación del calor, descrita en 1822, por Joseph Fourier. La ecuación del calor usualmente es representada de manera simple en el análisis de imágenes de la siguiente manera.

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial t} &= \alpha \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) & (t, x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial N}(t, x, y) &= 0 & \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega \\ v(0, x, y) &= f(x, y)\end{aligned}$$

Donde α es una constante positiva que representa la constante de conductividad térmica, x y y son las variables espaciales y t es la variable temporal. Esta idea puede se aplicada a nuestro caso de estudio a través de la discretización y análisis con diferencias finitas las cuales son usadas ampliamente en el procesamiento de imágenes debido a la estructura digital de una imagen como un conjunto de píxeles distribuidos uniformemente.

Debido a que la intensidad de cada color en una imagen RGB o la intensidad de escala de grises en una imagen podría servir como la temperatura o el material susceptible de difusión con el fin de rellenar los huecos de la imagen. Así, la intensidad del color del área que rodea el agujero, la parte que se va a quitar o reconstruir podría usarse para difundirse en el agujero. Por lo tanto, los píxeles circundantes podrían actuar como valores límite, es decir, lo cual permitirá la imposición de condiciones de contorno de Neumann a la ecuación de Laplace como se evidencia en la Figura 1.

Figura 1: Descripción gráfica de la relación entre la ecuación del calor y el “inpainting” (Bertalmío, 2001)

En general, en la literatura de *Computer Vision* se elige $h = 1$, lo que significa que el tamaño de píxel se elige como la unidad de referencia. Llamaremos a las posiciones

(ih, jh) píxeles. Denotaremos por $v_{i,j}^n$ de la solución discreta en la posición (ih, jh) en el tiempo n . Para encontrar el esquema de diferencias asociado con la ecuación de calor, utilizamos expansiones de Taylor expandidas sobre el índice (n, ih, jh) . Naturalmente, el método más simple es considerar por separado la discretización de cada derivada de segundo orden en x, y , realizando esto obtenemos:

$$\frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n}{\Delta t} = \alpha \left[\frac{v_{i-1,j}^n - 2v_{i,j}^n + v_{i+1,j}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{v_{i,j-1}^n - 2v_{i,j}^n + v_{i,j+1}^n}{(\Delta y)^2} \right]$$

Dado que no hay razón para elegirlo de manera diferente, el espaciado de la cuadrícula en las direcciones x y y se suele tomar:

$$\Delta x = \Delta y = h$$

Teniendo esto en mente llegamos a la siguiente representación de la ecuación del calor

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} - \alpha \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) &= \frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n}{\Delta t} \\ &- \alpha \left[\frac{v_{i-1,j}^n - 2v_{i,j}^n + v_{i+1,j}^n}{h^2} + \frac{v_{i,j-1}^n - 2v_{i,j}^n + v_{i,j+1}^n}{h^2} \right] + \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(h^2) \end{aligned}$$

Si consideramos la variable t como el número de iteraciones a aplicar y que cada componente de la matriz representa un pixel, se puede considerar los valores $\Delta t = \Delta x = \Delta y = 1$, obteniendo así la fórmula explícita:

$$v_{i,j}^{n+1} = \alpha[v_{i-1,j}^n + v_{i+1,j}^n - 4v_{i,j}^n + v_{i,j-1}^n + v_{i,j+1}^n] + v_{i,j}^n \quad (3)$$

Para poder hacer un relleno en las zonas dañadas es necesario también definir condiciones de frontera. Recordemos que en las zonas cerradas que sean identificadas como zonas dañadas los valores de los píxeles adyacentes serán utilizados para determinar los valores de los píxeles en el interior de la región. Como se puede ver en la EDP del calor planteada previamente, es necesario definir condiciones de Neumann y definir una función que servirá como condición inicial. La función que corresponde a la condición inicial es discretizada también, y será representada por medio de los valores de los píxeles localizados en la frontera. En nuestro caso, la condición de Neumann puede ser representada mediante un proceso simétrico. Esto sigue la idea de que si se necesita el valor de un píxel fuera de la región, entonces este tomará el valor del píxel simétrico a su posición con respecto a las fronteras.

Continuando con los esquemas de diferenciación, una propiedad deseada en los esquemas implementados en el procesamiento de imágenes es que estos sean invariantes ante la rotación. Esto significa que la capacidad de identificación de cambios de intensidad no se ve afectada por la rotación de los ángulos en los cuales estos cambios ocurren. Esta es una propiedad deseada en muchos campos del procesamiento

de imágenes ya que es uno de los criterios que garantiza que el esquema extraiga las características deseadas de manera exitosa. El esquema de diferenciación implementado anteriormente no posee esta propiedad, sin embargo, en Aubert and Kornprobst (2006) se proponen una serie de esquemas invariantes ante las rotaciones de diferentes ordenes.

$$\left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{i,j} \approx \delta_x v_{i,j} = \frac{v_{i+1,j} - v_{i-1,j}}{2h}$$

El esquema previamente propuesto es efectivamente invariante ante las rotaciones, no obstante, este aún no aprovecha la naturaleza 2D de las imágenes. Estos se puede arreglar mediante el uso de máscaras mas grandes. Se dice que entre más grande sea el kernel utilizado menos sensible al ruido será este, sin embargo, se debe tener en cuenta que al implementar esquemas de dimensiones superiores su precisión es compensado con un costo computacional considerable y ciertas dificultades de trabajo en las esquinas de la imagen. Los siguientes dos esquemas usan máscaras 3x3, las cuales son las más mencionadas en la literatura.

$$\begin{aligned} \Delta v|_{i,j} &= \lambda \frac{v_{i+1,j} + v_{i-1,j} + v_{i,j+1} + v_{i,j-1} - 4v_{i,j}}{h^2} \\ &+ (1 - \lambda) \frac{v_{i+1,j+1} + v_{i-1,j+1} + v_{i+1,j-1} + v_{i-1,j-1} - 4v_{i,j}}{2h^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{i,j} &\approx \lambda \frac{v_{i+1,j} - v_{i-1,j}}{2h} \\ &+ \frac{(1 - \lambda)}{2} \left(\frac{v_{i+1,j+1} - v_{i-1,j+1}}{2h} + \frac{v_{i+1,j-1} - v_{i-1,j-1}}{2h} \right) \end{aligned}$$

Aubert and Kornprobst (2006) en su estudio afirma que esta discretización no tiene en cuenta la naturaleza 2-D del problema. En su artículo él plantea reescribir el laplaciano de la siguiente manera

$$\text{div}(b\Delta v) = \frac{\partial}{\partial x} \left(b \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(b \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

si nosotros usamos una aproximación de diferencias finitas centradas, llegamos a

$$\begin{aligned} \text{div}(b\Delta v)|_{i,j} &= \delta_x(b_{i,j}\delta_x v_{i,j}) + \delta_y(b_{i,j}\delta_y v_{i,j}) \\ &= \frac{1}{4h^2} [b_{i+1,j}v_{i+2,j}^n + b_{i-1,j}v_{i-2,j}^n + b_{i,j+1}v_{i,j+2}^n + b_{i,j-1}v_{i,j-2}^n \\ &\quad - (b_{i+1,j} + b_{i-1,j} + b_{i,j+1} + b_{i,j-1})v_{i,j}^n] \end{aligned}$$

Si bien esta forma es una aproximación de el divergente, para simplificar consideraremos un b constante, con lo que nos quedaría la siguiente expresión:

$$\operatorname{div}(b\Delta v)|_{i,j} = b \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) = \frac{b}{4h^2} [v_{i+2,j}^n + v_{i-2,j}^n + v_{i,j+2}^n + v_{i,j-2}^n - 4v_{i,j}^n] \quad (4)$$

Con estas dos representaciones se aplicará las dos variantes de la ecuación del calor, para realizar el proceso de difusión de información de los píxeles que rodean las regiones de daño para así repararla sobre nuestra representación matricial de la imagen.

3. Resultados

La idea de restauración de imágenes es que donde los píxeles deteriorados de la imagen presentan pérdida de información estos pueden estar rodeados de píxeles de los cuales se pueden recuperar información en perfecto estado y ayuden a predecir la intensidad que tenía la zona deteriorada.

La idea de este método es detectar bordes y binarizar la imagen, con el fin de identificar regiones en las que se presenta pérdida de información, rellenar las regiones de daño y aplicar la ecuación del calor, la cual en este caso simula como se dispersa el color en la región de la imagen dañada. El proceso de restauración, se realiza en las regiones de daño, primero se rellena cada píxel de la región dañada con la información de los píxeles contiguos que no están en el área. Después de realizar esto, se toma la información de los píxeles vecinos, incluso, aquellos dentro de la región de daño y que fueron rellenados con la información de los píxeles contiguos no afectados, esto con el fin de dar mejor uniformidad al color en las regiones de daños. La Figura 2 representa el paso a paso de como se realiza el proceso de recuperación de zonas afectadas, en este caso a la imagen se le realizó una contaminación en zonas estratégicas para considerar la mayoría de los casos que se pueden presentar en una imagen.

3.1 Resultados de los diferentes algoritmos

En la Figura 3 presentamos un ejemplo de los resultados de las implementaciones de la ecuación clásica del calor (Eq. 3), y la propuesta diseñada por Aubert and Kornprobst (2006) (Eq. 4) y la reparación de imágenes a través de las ecuaciones de Navier-Stokes la cuales se tratan de un conjunto de ecuaciones en derivadas parciales no lineales que describen el movimiento de un fluido. Las cuales han demostrado en varias investigaciones realizadas tener un mejor desempeño en la reparación de zonas perdidas por daño.

Figura 2: Descripción gráfica del proceso de *inpainting*

Figura 3: Resultado de las imágenes aplicando los diferentes métodos

Ahora para realizar la comparación de los métodos medimos el error en norma L^2 de las imágenes de color para cada iteración dando como resultado la Tabla 1. Para comprobar que los resultados se decidió realizar una prueba con una imagen

Iteración	Ecuación de Calor	Ecuación de calor propuesta por Lee
1	2060	4580
2	1741	3745
3	1454	3035
4	1199	2433
5	977	1918
6	788	1480
7	633	1102
8	514	807
9	430	589
10	382	459

Tabla 1: Errores de los métodos propuestos basados en la ecuación del calor

en escala de grises para verificar que el comportamiento de los métodos conservada la generalidad de los resultados, tanto en situaciones de color como en imágenes en escala de grises.

Iteración	Ecuación de Calor	Ecuación de calor propuesta por Lee
1	8992	6922
2	8053	6697
3	7242	6429
4	6558	6189
5	6002	5963
6	5574	5749
7	5273	5541
8	5131	5374
9	5062	5212
10	5064	5055

Tabla 2: Errores de los métodos propuestos basados en la ecuación del calor para la imagen en escala grises

En la Tabla 2 presentamos la comparación del error de los métodos en norma L^2 de las imágenes de en escala de grises para cada iteración.

La implementación del algoritmo de Canny para la detección de bordes y del algoritmo de restauración por medio de la EDP de Navier-Stokes se realizó utilizando

Figura 4: Resultado de las imágenes aplicando los diferentes métodos con imagen en escala de grises

las siguientes librerías de Open CV: Canny Edge Detection y Image Inpainting. Los diferentes esquemas de la ecuación del calor fueron programados desde cero.

4. Discusión

Según los resultados obtenidos podemos afirmar que el filtro juega un papel muy importante en la reparación de la imagen debido a que cuando el filtro no detecta la región dañada esta queda sin reparar. En el artículo (Juan Gabriel et al., 2013) no se hace mucho énfasis en esto, pero en el método propuesto es la parte que juega el papel mas importante en la reparación.

Si no se detectan las áreas afectadas de manera acertada y precisa, por más eficiente que sea la técnica de *inpainting* el resultado no sera aceptable. Por suerte los métodos de detección de bordes han sido estudiados de manera amplia, y en la actualidad existen múltiples algoritmos que desarrollan dicha tarea con alta precisión y flexibilidad. Como fue explicado en secciones previas, el algoritmo de Canny utilizado en el presente trabajo recibe como parámetros un limite inferior y uno superior, que son utilizados como umbral para la inclusión o exclusión de los bordes identificados.

Esto abre las posibilidades del investigador a que pueda acotar de manera particular los bordes de la imagen y obtener resultados excelentes de forma particular. La flexibilidad que ofrece el método acarrea la desventaja de no ser replicable ni automatizable de forma general. Esto también significa que la eficiencia del método depende de la habilidad del usuario de encontrar los parámetros óptimos.

Por otra parte, se puede observar una diferencia en la claridad de los colores de las imágenes (b), (c) y (d). Al examinar detenidamente la imagen (b), se puede afirmar que los colores y la calidad de la fotografía son más claros y nítidos. Esto se lo atribuimos a que el método propuesto en Aubert and Kornprobst (2006) esta construido a partir de la idea de realizar restauración por medio de *denoising*, técnica que repara imágenes a partir de la idea de disminución de ruido. Este método es utilizado en el caso de que el área dañada no sea una en específica, sino que la sección de restauración sea toda la imagen. A pesar de ser un método cuyo objetivo principal no concuerda con el del artículo, es posible afirmar que los resultados que este arroja son buenos. Incluso son visualmente similares a los obtenidos por la ecuación del calor usando el esquema de la ecuación (3).

Así mismo, podemos ver que en la imagen (c) los colores se tornan más oscuros. Esto se debe al esquema de desratización utilizado en el experimento. Recordemos que este esquema es el representado en la ecuación (3). Aquí podemos visualizar que el valor de un píxel en la próxima iteración es calculado mediante la suma del píxel en la iteración actual y una suma ponderada del mismo píxel y sus vecinos. Claramente la imagen después de pasar por el proceso de restauración es más oscura que la original, por lo que podemos decir que la suma que se da en este esquema va acompañada de un signo negativo. En el *Cuadro 1* podemos ver la tabla de errores conforme avanzan las iteraciones. Aquí se puede observar que el método de la ecuación del calor produce un error mucho menor en cada una de las iteraciones, sin embargo, el método propuesto por Aubert and Kornprobst (2006) decrece con pasos mayores. Debido a que las imágenes son contaminadas severamente el costo computacional es bastante alto, por lo que realizar más iteraciones en los experimentos no resulta práctico. No obstante, los resultados producidos por los métodos computan errores lo suficientemente bajos como para considerar aumentar el número de iteraciones realizadas.

Continuando con el análisis de los resultados, es fácil concluir que esta ecuación nos produce el mejor resultado. No se ven rastros de *inpaint* de colores extraños, como los verdes, rojos y amarillos que resaltan en las imágenes (b) y (c) en las patas, el lomo y la oreja del perro. Incluso es capaz de dispersar el los negros en el lomo del perro de manera coherente. Debido a que la ecuación de Navier-Stokes esta basada en la teoría de fluidos incompresibles, esta tiene la capacidad de entender las direcciones en las cuales se propaga la intensidad del color, tratando este como si fuese un fluido (Bertalmio et al., 2001). Esta propiedad le permite a las ecuaciones dispersar

el color de la imagen de manera coherente, retratando de mejor manera los bordes del contraste.

Por último, es importante mencionar que este proceso funciona mejor en imágenes que se encuentran en escala de grises. Esto se debe a que la complejidad de la dispersión del color se ve reducida a una única dimensión, mientras que las imágenes a color necesitan el procesamiento de tres matrices por separado. Además, la disminución en el rango de intensidades también beneficia la complejidad de las operaciones realizadas.

Ahora, analizando los resultados en la escala de grises podemos ver que el esquema propuesto por Aubert and Kornprobst (2006) obtiene resultados para nada aceptables. Dicha técnica falla cuando se trabaja en tonalidades reducidas de colores. Ahora, a diferencia de los experimentos anteriores, podemos ver que la imagen (b) y (d) obtienen resultados visualmente idénticos. En la tabla de errores podemos visualizar que incluso que el método realizado por ecuación del calor tiene un mejor resultado que el realizado por la Navier-Stokes.

5. Conclusiones

En la elaboración de este trabajo se logró evidenciar las capacidades que tiene la ecuación del calor para realizar inpainting. Si bien este método da buenos resultados logrando reducir considerablemente el daño en la zonas afectadas, no logra en el casos de las imágenes a color la suficiente suavidad para mostrar resultados más realistas. Se evidenció que esta técnica tiene mejores resultados en imágenes en escala de grises. Esto puede ser debido a que construcción de la ecuación del calor favorece en mayor medida esta estructura. En general, el método presenta una forma valida de realizar la recuperación y eliminación de daños. Por otro lado las ecuación de Navier-Stokes logró recuperar de manera satisfactoria la imagen esto debido a que esta ecuación tiene mas en cuenta la naturaleza de los bordes y la uniformidad de los colores, logrando en este caso un resultado con mas suavidad, que presenta una corrección en las zonas dañadas más similar a la real.

Si bien los dos ecuaciones, tanto la del calor como la de Navier-Stokes, presentan resultados muy buenos, el filtro de detección de borde juega un papel sumamente importante a la hora de detectar las zonas de daño. Donde en ocasiones a causa del filtro, no se identificaban zonas de daño y las dos ecuaciones no lograban recuperar la imagen, con lo cual cuando se quiere trabajar en este tipo de problemas es un factor a tener muy en cuenta.

Con los resultados obtenidos, se logró comprobar que las ecuaciones en derivadas parciales, son una herramienta que funciona adecuadamente en la restauración de

imágenes, que además de mostrar resultados confiables, son métodos que computacionalmente son rápidos, y permiten ser aplicados directamente, sin tener que realizar un entrenamiento previo, lo cual resulta en una ventaja respecto a otros métodos.

Referencias

- Gilles Aubert and Pierre Kornprobst. *Mathematical Problems in Image Processing: Partial Differential Equations and the Calculus of Variations*. 01 2006. ISBN 978-0-387-32200-1. doi: 10.1007/978-0-387-44588-5.
- M. Bertalmio, Andrea Bertozzi, and G. Sapiro. Navier-stokes, fluid dynamics, and image and video inpainting. volume 1, pages I–355, 02 2001. ISBN 0-7695-1272-0. doi: 10.1109/CVPR.2001.990497.
- Marcelo Bertalmio, Guillermo Sapiro, Vincent Caselles, and Coloma Ballester. Image inpainting. USA, 2000. ACM Press/Addison-Wesley Publishing Co.
- Marcelo Bertalmío. Processing of flat and non-flat image information on arbitrary manifolds using partial differential equations, 01 2001.
- Triana Juan Gabriel, Romero Liliana Constanza, and Roldan Diego Gerardo. RESTAURACION DIGITAL DE IMAGENES MEDIANTE ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES. *Revista U.D.C.A Actualidad Divulgación Científica*, 16:511 – 518, 12 2013. ISSN 0123-4226.
- Mark S. Nixon and Alberto S. Aguado. *4 - Low-level feature extraction (including edge detection)*. Newnes, Oxford, 2002. ISBN 978-0-08-050625-8. doi: <https://doi.org/10.1016/B978-0-08-050625-8.50008-0>.
- Carola-Bibiane Schönlieb. *Partial Differential Equation Methods for Image Inpainting*. Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics. Cambridge University Press, 2015. doi: 10.1017/CBO9780511734304.