[white paper]

Diamond Open Access

[awaiting peer review]

O gato Toddy: acordado ou dormindo?

Colaboração Quântica Aberta¹

19 de Setembro de 2022

Resumo

Apresentamos uma adaptação do gato de Schroedinger tanto na forma de um circuito quântico como em sua contraparte analítica, com o objetivo de introduzir a computação quântica no ensino médio.

palavras-chave: superposição, circuitos e portas lógicas, computação quântica

A versão mais atualizada deste artigo está disponível em

<https://osf.io/n5mp3/download>
<https://zenodo.org/record/5546102>

Dedicamos este artigo à vida e ao gato Toddy, aquele que molhava sua patinha na água e, virando-a, trazia um pouco de água até sua boca, saciando sua sede de beber na fonte do conhecimento e da evolução.

¹Todos os autores com suas afiliações aparecem no final deste artigo.

Preâmbulo

1. Neste *white paper* [1, 2], mostramos o princípio de *superposição quântica* por meio de uma adaptação do famigerado gato de Schroedinger [3], e transposto na forma de um **Algoritmo de Resolução**, seguindo a licença [4].
2. Um **Algoritmo de Resolução** é um material de cunho didático-pedagógico, que está entre a *resolução completa* e o *gabarito* de um problema.

Introdução

3. A principal vantagem da computação quântica (sobre a clássica) é que ela permite realizar uma quantidade colossal de cálculos de forma paralela.

Notação (noções iniciais)

4. $:=$ significa que o que está à esquerda é definido pelo que está à direita.
5. O símbolo $| \rangle$ é chamado **ket**.
6. $|\psi\rangle :=$ função de onda (estado) do sistema quântico
7. $|0\rangle :=$ estado *zero* de um qubit
8. $|1\rangle :=$ estado *um* de um qubit
9. $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle :=$ estados de um sistema com dois qubits
10. $|01\rangle :=$ estado *zero* do primeiro qubit e estado *um* do segundo qubit (note que cada posição dentro do ket representa uma partícula diferente)

Portas lógicas e circuitos quânticos

11. Um circuito quântico é formado por uma ou mais portas lógicas quânticas.
12. Uma porta lógica atua em um objeto quântico, modificando seu estado.
13. Para o experimento proposto aqui, veremos apenas a porta quântica denominada CNOT.

Qubit

14. A palavra **qubit** vem do inglês *quantum bit* que, em português, significa **bit quântico**.
15. O **qubit** é um **objeto quântico**, podendo representar, por exemplo, a *polarização de um fóton* ou o *spin do elétron*.
16. O **spin** pode ser visto como *a unidade mínima de carga elétrica circulante que produz campo magnético* [5–7].
17. Basicamente, o que é importante lembrar acerca do **qubit** é que ele está em uma **superposição quântica** de *dois estados*.
18. Expressamos o **qubit** por meio da equação

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle.$$

19. $a, b \in \mathbb{C}$ com $|a|^2 + |b|^2 = 1$.
20. Note que $|a|^2$ é a probabilidade do sistema $|\psi\rangle$ colapsar no estado $|0\rangle$ e $|b|^2$ é a probabilidade de $|\psi\rangle$ colapsar em $|1\rangle$.
21. (19) significa que a e b são números complexos.
22. Os qubits são representados, também, por meio de matrizes.

23.

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

24.

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dois qubits na forma matricial

25. Lembre-se que $|q_0q_1\rangle = |01\rangle$ significa que o qubit q_0 está no estado $|0\rangle$, enquanto que o qubit q_1 está no estado $|1\rangle$.

26. Considere os seguintes estados de um sistema com dois qubits representados por meio de matrizes coluna.

27.

$$|00\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

28.

$$|01\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

29.

$$|10\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

30.

$$|11\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Porta quântica CNOT

31. A porta quântica CNOT é representada pela matriz

$$\text{CNOT} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

32. A letra C vem de “controle”.

33. Vamos ver, a seguir, como a porta lógica quântica CNOT altera os sistemas de dois qubits $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$ e $|11\rangle$.

34. Vale ressaltar que a porta CNOT atua em um sistema com exatamente dois qubits. Por quê?

CNOT $|00\rangle$

35. Substituindo a matriz CNOT, (31), no sistema com dois qubits, (27),

$$\text{CNOT}|00\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

36. Assim,

$$\text{CNOT}|00\rangle = |00\rangle.$$

CNOT $|01\rangle$

37. Substitua a matriz do item (31) em (28) e mostre que

$$\text{CNOT}|01\rangle = |01\rangle.$$

CNOT $|10\rangle$

38. Substitua (31) em (29) e mostre que

$$\text{CNOT}|10\rangle = |11\rangle.$$

CNOT $|11\rangle$

39. Substitua (31) em (30) e mostre que

$$\text{CNOT} |11\rangle = |10\rangle .$$

Interpretando os resultados

40. De (36), (37), (38) e (39), temos os seguintes resultados:

(a) $\text{CNOT} |00\rangle = |00\rangle,$

(b) $\text{CNOT} |01\rangle = |01\rangle,$

(c) $\text{CNOT} |10\rangle = |11\rangle,$

(d) $\text{CNOT} |11\rangle = |10\rangle.$

41. O que a porta CNOT faz com o *primeiro qubit* em um **sistema com dois qubits**? E com o *segundo*? Qual é o qubit de controle e por quê? Explique detalhadamente.

Preparando o sistema

42. Este é um experimento mental.
43. Suponha que um gato esteja em uma sala, conforme ilustrado na Fig. 1.

Figura 1: O gato Toddy está em uma *superposição quântica* dos estados **acordado** e **dormindo**. Trata-se de uma extrapolação clássica do chamado “problema da medida”. Fonte da imagem: [8, 9].

44. Na parede, há uma caixa azul contendo um átomo que pode decair ou não.
45. Caso o átomo decaia, uma manivela é acionada, liberando um martelo, que quebra o vidro contendo um sonífero potente, que faz o gato dormir.
46. Caso o átomo não decaia, o gato permanece acordado.

Matematizando o gato

47. O experimento mental da seção anterior pode ser representado por meio de **três qubits** (q_0 , q_1 e q_2).
48. $q_0 :=$ *átomo decai* ou *não decai*

49. $q_1 :=$ **sonífero** *é liberado* ou *não é liberado*
50. $q_2 :=$ **gato** *acordado* ou *dormindo*
51. $|0\rangle :=$ o átomo *não decai*, o sonífero *não é liberado*, o gato *está acordado*
52. $|1\rangle :=$ o átomo *decai*, o sonífero *é liberado*, o gato *está dormindo*
53. De acordo com as definições apresentadas, considere os três qubits no seguinte estado

$$|q_0\rangle = |q_1\rangle = |q_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle).$$

O circuito

54. O circuito quântico contendo o experimento mental descrito na seção anterior está ilustrado na Fig. 2.
55. A leitura do circuito é feita da esquerda para a direita.
56. No início (à esquerda) de cada linha horizontal está o *input*, isto é, o estado inicial de cada qubit.

Figura 2: Sistema com três qubits que descreve a criação do gato Toddy.

57. As linhas horizontais representam os qubits q_0 , q_1 e q_2 .

58. O símbolo contendo a linha vertical que conecta duas linhas horizontais significa a porta CNOT.

Sistema com três qubits

59. Note que a Fig. 2 descreve um *sistema com três qubits*.
60. A primeira porta CNOT está aplicada apenas nos qubits q_0 e q_1 .
61. A segunda porta CNOT, por sua vez, está aplicada nos qubits q_1 e q_2 .
62. Note que a segunda CNOT atua em $|q_1\rangle$ e $|q_2\rangle$ somente após a atuação da primeira porta CNOT.
63. Em equação, isso significa que o estado do sistema com três qubits da Fig. 2 é dado por

$$|\psi\rangle = \text{CNOT}_{q_1q_2} (\text{CNOT}_{q_0q_1} |q_0q_1\rangle) |q_2\rangle.$$

64. O estado inicial do **átomo** é dado por

$$|q_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle),$$

isto é, ele está em superposição de *decaído* e *não decaído*.

65. O estado inicial do **sonífero** é $|q_1\rangle = |0\rangle$ (não liberado).
66. O estado inicial do **gato** é $|q_2\rangle = |0\rangle$ (acordado).

Resumindo a CNOT

67. De (36), (37), (38) e (39), temos os seguintes resultados:

(a) $\text{CNOT} |00\rangle = |00\rangle,$

(b) $\text{CNOT} |01\rangle = |01\rangle,$

$$(c) \text{ CNOT } |10\rangle = |11\rangle,$$

$$(d) \text{ CNOT } |11\rangle = |10\rangle.$$

68. Em palavras,

(i) se o primeiro qubit estiver no estado $|0\rangle$, a porta CNOT *não altera* o estado do segundo qubit;

(ii) se o primeiro qubit estiver no estado $|1\rangle$, a porta CNOT *altera* o estado do segundo qubit.

69. A porta CNOT atua nos estados $|00\rangle$ e $|01\rangle$ como uma matriz identidade.

Calculando a porta CNOT nos qubits q_0 e q_1

70. Nosso objetivo, nesse momento, é calcular $|\psi\rangle$ que aparece em (63).

71. Primeiro, calculamos $\text{CNOT}_{q_0q_1} |q_0q_1\rangle$.

72. Substituindo, em (71), o estado inicial do átomo $|q_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$, dado em (64), e o estado inicial do sonífero, $|q_1\rangle = |0\rangle$, dado em (65),

$$\text{CNOT}_{q_0q_1} |q_0q_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{CNOT}(|0\rangle + |1\rangle) |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{CNOT}(|00\rangle + |10\rangle).$$

73.

$$\text{CNOT}_{q_0q_1} |q_0q_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{CNOT} |00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \text{CNOT} |10\rangle.$$

74. Utilizando (67) em (73),

$$\text{CNOT}_{q_0q_1} |q_0q_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |11\rangle.$$

Calculando a porta CNOT nos qubits q_1 e q_2 (resultado da seção anterior)

75. O próximo passo é substituir (74) em (63).

76.

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{CNOT}_{q_1 q_2} (|00\rangle + |11\rangle) |q_2\rangle.$$

77. Substituindo, em (76), o estado inicial do gato, $|q_2\rangle = |0\rangle$, dado em (66),

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{CNOT}_{q_1 q_2} (|00\rangle + |11\rangle) |0\rangle.$$

78. Fazendo a distributiva do produto tensorial em (77),

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{CNOT}_{q_1 q_2} (|000\rangle + |110\rangle).$$

79. Como $\text{CNOT}_{q_1 q_2}$ só atua nos qubits $|q_1\rangle$ e $|q_2\rangle$, temos que

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle \text{CNOT} |00\rangle + |1\rangle \text{CNOT} |10\rangle).$$

80. Utilize (67) em (79) e mostre que

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|000\rangle + |111\rangle).$$

Qual é o significado de $|\psi\rangle$?

81. Em resumo, mostramos que

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|000\rangle + |111\rangle).$$

82. A equação em (81) representa a **superposição quântica** (via emaranhamento) entre o átomo (q_0), a alavanca (q_1) e o sonífero (q_2).

83. O emaranhamento é um caso particular de *superposição quântica*.

84. Lembre-se que o ket em (81) está escrito na forma $|q_0q_1q_2\rangle$, sendo que a primeira posição é referente ao qubit q_0 , a segunda referente a q_1 e a terceira, a q_2 .

85. Então, temos os seguintes resultados.

86. $|000\rangle :=$ estado em que o átomo (q_0) *não decai*, a alavanca *não é acionada* (q_1) e o gato está *acordado* (q_2).

87. $|111\rangle :=$ estado em que o átomo (q_0) *decai*, a alavanca *é acionada* (q_1) e o gato está *dormindo* (q_2).

88. Para saber se o **gato** está *acordado* ou *dormindo*, é preciso abrir a porta que, fisicamente, significa **medir o sistema**.

89. Se o resultado da medição mostrar $|q_0\rangle = |0\rangle$, então temos a situação descrita em (86).

90. Se o resultado da medição mostrar $|q_0\rangle = |1\rangle$, então temos a situação (87).

Considerações Finais

91. Calculamos as transformações da porta quântica CNOT em um sistema com **três qubits** para simular o gato *Toddy*, uma adaptação do *gato de Schroedinger* em uma versão mais saudável.

Ciência Aberta

O **arquivo latex** para este artigo, juntamente com outros *arquivos suplementares*, estão disponíveis em [10]. Seja coautor(a) deste artigo, envie sua contribuição para `mplobo@uft.edu.br`.

Consentimento

Os autores concordam com [11].

Como citar este artigo?

<https://doi.org/10.31219/osf.io/n5mp3>

<https://zenodo.org/record/5546102>

Licença

CC-By Attribution 4.0 International [4]

Referências

- [1] Lobo, Matheus P. “Uma Revista Aberta.” *OSF Preprints*, 19 July 2021. <https://doi.org/10.31219/osf.io/fjb9a>
- [2] Lobo, Matheus P. “Microarticles.” *OSF Preprints*, 28 Oct. 2019. <https://doi.org/10.31219/osf.io/ejrct>
- [3] Sutor, Robert S. *Dancing with Qubits: How quantum computing works and how it can change the world*. Packt Publishing Ltd, 2019.
- [4] CC. Creative Commons. *CC-By Attribution 4.0 International*. <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0>

- [5] Ohanian, Hans C. “What is spin?.” *American Journal of Physics* 54.6 (1986): 500-505.
- [6] Lobo, Matheus P. “Spin Is a Circulating Field.” *OSF Preprints*, 30 June 2019. <https://doi.org/10.31219/osf.io/khnpj>
- [7] Lobo, Matheus P. “Spin Is a Superposition of Circular Charged Trajectories.” *OSF Preprints*, 30 June 2019. <https://doi.org/10.31219/osf.io/tv2rb>
- [8] Wikipedia. Schrödinger’s cat. https://en.wikipedia.org/wiki/Schr%C3%B6dinger%27s_cat#/media/File:Schrodingers_cat.svg
- [9] CC. Creative Commons. Attribution-ShareAlike 3.0 Unported (CC BY-SA 3.0). <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0>
- [10] Lobo, Matheus P. “Open Journal of Mathematics and Physics (OJMP).” *OSF*, 21 Apr. 2020. <https://doi.org/10.17605/osf.io/6hzyp>
- [11] Lobo, Matheus P. “Simple Guidelines for Authors: Open Journal of Mathematics and Physics.” *OSF Preprints*, 15 Nov. 2019. <https://doi.org/10.31219/osf.io/fk836>

Colaboração Quântica Aberta

Matheus Pereira Lobo (autor principal, mplobo@uft.edu.br)^{1,2,3}
<https://orcid.org/0000-0003-4554-1372>

Alex Kevyn dos Anjos Carreiro^{1,4}

Maurício Ribeiro Gonçalves^{1,5}

¹Universidade Federal do Tocantins (Brasil)

²Universidade Federal do Norte do Tocantins (Brasil)

³Universidade Aberta (UAb, Portugal)

⁴Escola Estadual Francisco Máximo de Sousa (TO, Brasil)

⁵Centro de Ensino Parsondas de Carvalho (MA, Brasil)

APÊNDICE

Simplificando o gato Toddy

92. A seguir, apresentamos um sistema alternativo para a criação da superposição quântica utilizando-se apenas dois qubits.
93. $q_0 :=$ *átomo decai* ou *não decai*
94. $q_1 :=$ “*sonífero é liberado* (e o gato dorme)” ou “*não é liberado* (e o gato permanece acordado)”
95. $|0\rangle :=$ o átomo *não decai*, o sonífero *não é liberado* e o gato *está acordado*
96. $|1\rangle :=$ o átomo *decai*, o sonífero *é liberado* e o gato *está dormindo*
97. De forma similar, considere os dois qubits no seguinte estado

$$|q_0\rangle = |q_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle).$$

98. Conforme calculado anteriormente, temos que

$$\text{CNOT} |q_0 q_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle).$$

99. Assim, ao medir se o frasco está quebrado ou não, conseguimos inferir o estado do gato.