Solusi Semi-Analitik Persamaan Laplace dengan Syarat Batas Campuran

I. Maulidi¹, A.D. Garnadi², M.N. Indro³, M.T Julianto², A. Pribadi⁴

¹Departemen Matematika, Institut Teknologi Sumatera

²Departemen Matematika, Institut Pertanian Bogor

³Departemen Fisika, Institut Pertanian Bogor

⁴STEI, Institut Teknologi Bandung

-

Abstract

Solusi analitik dari distribusi potensial dalam bola 3 Dimensi dengan syarat batas campuran berasal dari model fisika didapatkan sebagai sistem persamaan linear tak hingga. Masalah syarat batas campuran ini, berasal dari Tomografi Elektrik yang dikenal sebagai Complete Electrode Model (Model Elektroda Lengkap).

Keywords Pemindai Kepala ; complete electrode model; Tomografi Elektrik.

1. Pendahuluan

Tomografi Elektrik merupakan salah satu moda elektrik pemindai non-destruktif di bidang aplikasi.

Tujuan tulisan ini adalah mendapatkan solusi untuk persamaan Laplace homogen yang merupakan satu bentuk persamaan diferensial parsial Eliptik.

Secara umum, masalah syarat batas campuran tergolong hal sangat jarang dibahas meskipun banyak masalah dibidang rekayasa melibatkan masalah insulasi (tanpa fluks di batas) yang berakibat mempersyaratkan kondisi di batas bersifat campuran. Misalnya saja, buku sumber yang cukup komprehensif untuk solusi persamaan differensial parsial untuk masalah rekayasa, sedikitpun tidak membahas syarat batas campuran ([5]). Beberapa peneliti mencoba mendapatkan solusi analitik untuk masalah EIT di cakram 2D yang menggunakan CEM, misalnya [9], [6], dan [7]. Bahkan, hasil yang ekivalen untuk masalah 3D tak didapati untuk

model CEM [7]. Solusi persamaan Laplace di bola 3D homogen diturunkan pada tulisan ini, yang memenuhi syarat batas CEM dengan konfigurasi khusus berjumlah elektroda hingga dan impedansi kontak berbeda padanya, solusi dinyatakan sebagai sistem persamaan linear takhingga. Solusi persamaan Laplace homogen pada cakram dalam koordinat polar merupakan hal yang sederhana untuk didapatkan, meskipun demikian untuk model elektroda lengkap merupakan hal yang tidak mudah dari segi matematis karena syarat batas yang digunakan merupakan syarat batas campuran ([4], [7]), apalagi untuk model di bola 3 dimensi. Dengan demikian, melengkapi hasil [7], meskipun untuk kasus khusus.

Penurunan formulasi solusi secara rinci diberikan di Lampiran.

2. Perumusan umum masalah EIT

Tujuan dari Electrical Impedance Tomography ialah merekonstruksi permittivity spasial $\varepsilon(\mathbf{s})$ berdasarkan pengukuran arus dan voltase pada electrode yang ditempatkan di tepi/permukaan benda, dengan $\mathbf{s}$ menyatakan vector koordinat spatial. Dalam sistem EIT, voltase merupakan bagian dari syarat batas dan arus yang terjadi merupakan objek yang diukur. Seringkali masalah EIT dirumuskan untuk $\varepsilon(\mathbf{s})$ yang bernilai kompleks, meski demikian dalam tulisan ini dibatasi hanya untuk bernilai real sehingga bagian imajiner tak ada. Di 3D kita punya $\mathbf{s} = (x, y, z)$ untuk medium homogen $\varepsilon(\mathbf{s}) = \varepsilon$ yang konstan. Sepanjang tulisan ini, huruf tebal menyatakan vektor dan matriks. Di bagian ini, kita nyatakan *forward problem* bila fungsi ε diketahui.

2.1. Persamaan Laplace dalam benda

Misalkan di permukaan benda terdapat L elektroda yang melekat dan tidak saling bertumpang tindih $E_i, i = 1, 2, \dots, L$. Potensial $U_1, U_2, \dots, U_L$ dikenakan pada elektroda sehingga dipenuhi kondisi $\sum_{i=1}^L U_i = 0$. Di dalam benda, distribusi potensial dipenuhi oleh persamaan Laplace :

$$\nabla \cdot (\varepsilon \nabla u) = 0 \quad (1)$$

Tujuan *forward model* adalah menemukan fungsi potensial u , diberikan $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{s})$ mempergunakan syarat batas sebagaimana diberikan di bawah ini.

2.2. Syarat Batas

Pemodelan EIT dibedakan berdasarkan syarat batas pada elektroda; persamaan (1) tetap sama. Pada batas benda antar elektroda, dianggap tak ada arus yang mengalir,

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \quad \mathbf{s} \neq E_i, \quad (2)$$

58 dengan ν menyatakan vektor arah normal di permukaan. Menurut CEM,

$$u(s) + Z_i \varepsilon(s) \frac{\partial u}{\partial \nu} = U_i, \mathbf{s} \in E_i \quad (3)$$

59 dengan Z_i merupakan impedansi kontak (atau permukaan), $i = 1, 2, \dots, L$. Meru-
 60 pakan hal yang umum dianggap bahwa impedansi kontak bernilai konstan di per-
 61 mukaaan elektrode tetapi bisa bernilai berbeda untuk masing-masing elektrode.
 62 Potensial yang diberikan bernilai konstan di permukaan elektrode karena dianggap
 63 terbuat dari bahan metal yang bersifat sangat konduktif. Model (1) bersamasama
 64 dengan syarat batas (2) dan (3), dengan tepat mencerminkan rancangan perangkat
 65 pengukuran dan merupakan *forward model* yang paling komprehensif dari masalah
 66 impedansi elektrik ([3], [2]).

67 3. Bola homogen 3D

68 Pada bagian ini, akan diturunkan sebuah solusi analitik dari model elektrode
 69 lengkap (CEM, complete electrode model) di bola 3D yang homogen dalam koor-
 70 dinat bola dengan jumlah hingga elektrode yang memenuhi CEM.

71 Distribusi potensial di bola berjari R yang homogen dengan permitivitas ε
 72 memenuhi persamaan Laplace dalam koordinat bola. Sebagai hal khusus dari
 73 persamaan diferensial parsial (1),

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right] = 0 \quad (4)$$

74 dengan $0 \leq r \leq R$ menyatakan jarak dari titik pusat, $0 \leq \phi < 2\pi$ and
 75 $0 < \theta \leq \pi$ sudut. Diasumsikan bahwa setiap variabel bernilai real. Dalam hal ini,
 76 elektrode yang tidak saling menimpa sebanyak L , dengan lebar $2w$ dan panjang $2\hat{w}$
 77 (keduanya dalam radian) ditempatkan di lingkaran dengan radius R pada sudut
 78 $\{\phi_i, i = 1, 2, \dots, L\}$. Dengan menggunakan metode pemisahan variabel [10] akan
 79 memberikan solusi umum yang dinyatakan dalam bentuk deret sebagai berikut

$$u(r, \theta, \phi) = u_0 + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=1}^l \left(A_l \left(\frac{r}{R} \right)^l + B_l \left(\frac{r}{R} \right)^{-l-1} \right) [S_n \cos(n\phi) + C_n \sin(n\phi)] P_l^n(\cos(n\theta)). \quad (5)$$

80 Karena $\frac{\partial u}{\partial r} < \infty$ for $r = 0$, maka solusi persamaan (5) dapat dituliskan

$$u(r, \theta, \phi) = u_0 + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=1}^l \left(\frac{r}{R} \right)^l [C_{nl} \cos(n\phi) + D_{nl} \sin(n\phi)] P_l^n(\cos(n\theta)). \quad (6)$$

81 dengan koefisien $C_{n,l}$ and D_{nl} yang dapat diperoleh dari syarat batas (3) , untuk
 82 kasus bola 3D, akan berbentuk

$$u(R, \theta, \phi) + Z_i \varepsilon \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R} = U_i, i = 1, 2, \dots, L, \quad |\phi - \phi_i| < w, \quad |\theta - \hat{\theta}| < \hat{w}. \quad (7)$$

83 dengan $\hat{\theta}$ tetap.

84 Perhatikan bahwa persamaan(7) merupakan fungsi dari θ dan ϕ tetapi dengan
 85 ruas kanan yang konstan.

86 Sebagaimana diperlihatkan di Lampiran, koefisien a_n dan b_n diperoleh dengan
 87 cara mengintegrasikan $\varepsilon \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R}$ untuk $(\phi, \theta) \in (0, 2\pi) \times (0, \pi)$ sebagai solusi sistem
 88 persamaan linear tak hingga:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ u_0 \end{bmatrix} = \left(\pi \varepsilon R^{-1} \mathbf{N} + \sum_{i=1}^L Z_i^{-1} \mathbf{M}_i \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^L Z_i^{-1} U_i \mathbf{r}_i \right), \quad (8)$$

89 dengan $\mathbf{a}$ dan $\mathbf{b}$ koefisien Fourier dari vektor dimensi takhingga yang dicari,
 90 $\mathbf{n} = (1, 2, 3, \dots)$, dan matriks dan vektor dimensi tak hingga yang didefinisikan
 91 sebagai berikut

$$\mathbf{M}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11i} & \mathbf{M}_{12i} & \mathbf{r}_{1i} \\ \mathbf{M}_{12i}^T & \mathbf{M}_{22i} & \mathbf{r}_{2i} \\ \mathbf{r}_{1i}^T & \mathbf{r}_{2i}^T & 2w \end{bmatrix}; \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{n} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

92

$$\mathbf{r}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{1i} \\ \mathbf{r}_{2i} \\ 2w \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} \mathbf{r}_{1i} = 2\mathbf{n}^{-1} \sin(w\mathbf{n}) \cos(\phi_i \mathbf{n}) \\ \mathbf{r}_{2i} = 2\mathbf{n}^{-1} \sin(w\mathbf{n}) \sin(\phi_i \mathbf{n}) \end{matrix}.$$

93 Untuk hal yang khusus, bila impedans kontak sama, $Z_i = Z$ dan jarak elektroda
 94 ke elektroda satu sama lain sama ($\phi_i = 2\pi i/L$), didapat $u_0 = 0$ dan

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \left(\pi \varepsilon Z R^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{n} & 0 \\ 0 & \mathbf{n} \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^L \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11i} & \mathbf{M}_{12i} \\ \mathbf{M}_{12i}^T & \mathbf{M}_{22i} \end{bmatrix} \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^L U_i \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{1i} \\ \mathbf{r}_{2i} \end{bmatrix} \right). \quad (9)$$

95 Tentu saja apabila untuk perhitungan, dimensi takhingga haruslah diganti den-
 96 gan dimensi hingga sebagai hampiran.

97 Ucapan Terima Kasih

98 Pekerjaan ini didanai oleh Kemenristekdikti melalui skim PUPT-IPB dengan kon-
 99 trak nomor 079/SP2H/LT/DRPM/II/2016.

100 Lampiran. Penurunan solusi EIT masalah 3D

101 Tujuan kita adalah mendapatkan koefisien Fourier a_n, b_n dari persamaan (6). Den-
102 gan menggunakan persamaan (7), turunan di batas kita nyatakan dalam bentuk

$$\varepsilon \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R} = \begin{cases} U_i/Z_i - u(R, \phi, \theta)/Z_i, & \text{jika } |\phi - \phi_i| < w, |\theta - \hat{\theta}| < \hat{w} \\ 0, & \text{lainnya.} \end{cases} \quad (10)$$

103 Kemudian, kita kalikan persamaan (10) dengan $\cos(k\phi)$ with $k = 1, 2, \dots$ dan
104 diintegrasikan kedua sisinya di selang $(0, 2\pi)$ dengan memperhatikan

$$\frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R} = \frac{1}{R} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=1}^l l (C_{nl} \cos(n\phi) + D_{nl} \sin(n\phi)) P_l^n(\cos(\theta))$$

105

106

107 Jelas bahwa integral ruas kiri (10) dikalikan $\cos(k\phi)$, sebagai integral dari deret
108 Fourier, ialah $\varepsilon \pi n a_n / R$ diakibatkan sifat ortogonal fungsi kosinus dan sinus ($k =$
109 n). Ruas kanan persamaan (10) dikalikan $\cos(k\phi)$ berbentuk

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^L U_i / Z_i \int_{\phi_i-w}^{\phi_i+w} \cos(k\phi) d\phi - \\ & \sum_{i=1}^L \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=1}^l \left[C_{nl} \int_{\phi_i-w}^{\phi_i+w} V_{kn1}(\phi) d\phi + D_{nl} \int_{\phi_i-w}^{\phi_i+w} V_{kn2}(\phi) d\phi \right] P_l^n(\cos(\theta)), \end{aligned}$$

110 dengan

$$V_{kn1}(\phi) = \cos(k\phi) \cos(n\phi), \quad V_{kn2}(\theta) = \cos(k\phi) \sin(n\phi).$$

111 Dari trigonometri, $\int_{\phi_i-w}^{\phi_i+w} \cos(k\phi) d\phi = \frac{2}{k} \sin(wk) \cos(\phi_i k)$, dan misalkan M_{11i}
112 dan M_{12i} merupakan matriks Fourier dimensi tak hingga untuk $i = 1, 2, \dots, L$ dg
113 elemen ke- (k, l) diberikan melalui

$$\begin{aligned} M_{11ikl} &= \sum_{n=1}^l P_l^n(\cos \theta) \int_{\phi_i-w}^{\phi_i+w} \cos(k\phi) \cos(n\phi) d\phi \\ &= \left(w + \frac{1}{2k} \cos(2kw_i) \sin(2kw) \right) P_l^n(\cos \theta) I_{(n=k)} + \\ &\quad \sum_{n=1, n \neq k}^l \left(\frac{1}{n-k} A_{1kn} + \frac{1}{n+k} B_{1kn} P_l^n(\cos(\theta)) \right) \end{aligned}$$

114 dengan

$$A_{1kn} = \cos((n-k)\phi_i) \sin((n-k)w), \quad B_{1kn} = \cos((n+k)\phi_i) \cos((n+k)w),$$

115 $I_{(n=k)}$ menyatakan fungsi Indikator.

$$\begin{aligned} M_{12ikl} &= \sum_{n=1}^l P_l^n(\cos \theta) \int_{\phi_i-w}^{\phi_i+w} \cos(k\phi) \sin(n\phi) d\phi \\ &= \left(\frac{1}{2k} \sin(2k\phi_i) \sin(2kw) \right) P_l^n(\cos \theta) I_{(n=k)} + \\ &\quad \sum_{n=1, n \neq k}^l \left(\frac{A_{2kn}}{n+k} + \frac{B_{2kn}}{n-k} \right) P_l^n(\cos \theta), \end{aligned}$$

116 dengan

$$A_{2kn} = \sin((n+k)\phi_i) \sin((n+k)w), \quad B_{2kn} = \sin((n-k)\phi_i) \sin((n+k)w).$$

Langkah berikutnya, perkalian kedua ruas dari persamaan (10) dengan $\sin(k\phi)$ dan diintegrasikan untuk variabel $\phi \in (-\phi, \phi)$ berdasarkan fakta bahwa $\int_{\phi_i-w}^{\phi_i+w} \sin(k\phi) d\phi = \frac{2}{k} \sin(wk) + \sin(\phi_i k)$, koefisien untuk C_{nl} dan D_{nl} adalah

$$M_{21ikn} = M_{12ikn},$$

117

$$\begin{aligned} M_{22ikn} &= P_l^k(\cos \theta) \left(w - \frac{1}{2k} \cos(2k\phi_i) \sin(2kw) \right) I_{(n=k)} + \\ &\quad \sum_{n=1, n \neq k}^l \left(\frac{A_{1kn}}{n-k} - \frac{B_{1kn}}{n+k} \right) P_l^n(\cos \theta). \end{aligned}$$

118 Tuliskan dengan $\mathbf{a}$ dan $\mathbf{b}$ vektor dimensi takhingga dengan komponen secara
119 berturut-turut C_{nl} dan D_{nl} . Juga tetapkan r_{1i} and r_{2i} vektor dimensi takhingga
120 dengan komponen

$$r_{1in} = \frac{2}{n} \sin(w\mathbf{n}) \cos(\phi_i n), \quad r_{2in} = \frac{2}{n} \sin(w\mathbf{n}) \sin(\phi_i n)$$

121 Kita nyatakan suku $(\pi\varepsilon/R)n$ pada koefisien C_{nl} dan D_{nl} sebagai sebuah diag-
122 onal matriks $(\pi\varepsilon R)\mathbf{n}$ dengan $\mathbf{n} = \text{diag}(1, 2, 3, \dots)$. Untuk mendapatkan persamaan
123 yang memuat u_0 , persamaan (10) diintegrasikan keduaruasnya di $(0, 2\pi)$ yang meng-
124 hasilkan

$$\mathbf{a}' \sum_{i=1}^L Z_i^{-1} \mathbf{r}_{1i} + \mathbf{b}' \sum_{i=1}^L Z_i^{-1} \mathbf{r}_{2i} + 2wu_o \sum_{i=1}^L 1/Z_i = 2w \sum_{i=1}^L U_i/Z_i,$$

125

126

127 sehingga system persamaan lengkap untuk diselesaikan bagi $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ dan u_0 sebagai
 128 berikut:

$$\begin{aligned}
 & \left(\sum_{i=1}^L Z_i^{-1} \mathbf{M}_{11i} \right) \mathbf{a} + \left(\sum_{i=1}^L Z_i^{-1} \mathbf{M}_{12i} \right) \mathbf{b} + (\pi\varepsilon/R)n\mathbf{a} + \mathbf{u}_0 \sum_{i=1}^L Z_i^{-1} \mathbf{r}_{11} = \sum_{i=1}^L Z_i^{-1} U_i \mathbf{r}_{11} \\
 & \left(\sum_{i=1}^L Z_i^{-1} \mathbf{M}_{21i}^T \right) \mathbf{a} + \left(\sum_{i=1}^L Z_i^{-1} \mathbf{M}_{22i} \right) \mathbf{b} + (\pi\varepsilon/R)n\mathbf{b} + \mathbf{u}_0 \sum_{i=1}^L Z_i^{-1} \mathbf{r}_{21} = \sum_{i=1}^L Z_i^{-1} U_i \mathbf{r}_{21} \\
 & \mathbf{a}' \sum_{i=1}^L Z_i^{-1} \mathbf{r}_{11} + b' \sum_{i=1}^L Z_i^{-1} \mathbf{r}_{11} + 2wu_0 \sum_{i=1}^L Z_i^{-1} = 2w \sum_{i=1}^L Z_i^{-1} U_i.
 \end{aligned}$$

131 Ruas kanan dari persamaan ketiga jelas akan bernilai nol karena jumlah voltase
 132 yang diberikan adalah nol. Sehingga cukup dibuktikan $\sum_{i=1}^L \mathbf{r}_{1in} = 0$ dan $\sum_{i=1}^L \mathbf{r}_{2in} =$
 133 0 yang berasal dari fakta bahwa

$$\sum_{i=1}^L \cos \frac{2\pi i}{L} n = 0, \quad \sum_{i=1}^L \sin \frac{2\pi i}{L} n = 0$$

134 untuk setiap $n = 1, 2, \dots$

135 Jelas, solusi system di atas dapat dituliskan sebagai kombinasi linear dari
 136 voltase terukur dalam bentuk

$$a_n = \sum_{i=1}^L U_i Z_i^{-1} p_{1in}, \quad b_n = \sum_{i=1}^L U_i Z_i^{-1} p_{2in}$$

137 dengan p_{1in} dan p_{2in} merupakan unsur vektor berikut

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p}_{1i} &= \mathbf{M}^{11} \mathbf{r}_{1i} + \mathbf{M}^{12} \mathbf{r}_{2i} + 2w \mathbf{M}^{13}, \\
 \mathbf{p}_{2i} &= \mathbf{M}^{21} \mathbf{r}_{1i} + \mathbf{M}^{22} \mathbf{r}_{2i} + 2w \mathbf{M}^{23},
 \end{aligned}$$

138 dan matriks $\mathbf{M}^{pq}$ adalah matriks blok-terpartisi dari matriks invers di per-
 139 samaan (8) terkait $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ dan u_0 .

140 References

- 141 [1] E. Demidenko, 2011, An analytic solution to the homogeneous EIT problem on
 142 the 2D disk and its application to estimation of electrode contact impedances,
 143 *Physiological measurement*, **32**:9,1453
- 144 [2] Cheney M, Isaacson D, Newell JC. Electrical impedance tomography. SIAM
 145 Review. 1999; 41:85-101.

- 146 [3] Cheng K-S, Isaacson D, Newell JC, Gisser DG. Electrode models for electric
147 current computed tomography. IEEE Transactions on Biomedical Engineer-
148 ing. 1989; 36:918-924.
- 149 [4] Duffy, DG. Mixed Boundary Value Problems. Boca Raton: Chapman and
150 Hall/CRC; 2008.
- 151 [5] Polyanin, AD. Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engi-
152 neers and Scientists. Boca Raton: Chapman and Hall/CRC; 2002.
- 153 [6] Paulson K, Brekon W, Pidcock M. Electrode modeling in electrical impedance
154 tomography. SIAM Journal on Applied Mathematics. 1992; 52:1012-1022.
- 155 [7] Pidcock MK, Kuzuoglu M, Leblebicioglu K. Analytic and semi-analytic so-
156 lutions in electrical impedance tomography: I. Two-dimensional problems.
157 Physiological Measurement. 1995; 16:77-90.
- 158 [8] Pidcock, M.K., Kuzuoglu, M. and Leblebicioglu, K., 1995. Analytic and semi-
159 analytic solutions in electrical impedance tomography. II. Three-dimensional
160 problems. Physiological measurement, 16(2), p.91-110.
- 161 [9] Somersalo E, Cheney M, Isaacson D. Existence and uniqueness for electrode
162 models for electric-current computed tomography. SIAM Journal on Applied
163 Mathematics. 1992; 52:1023-1040.
- 164 [10] Weisstein, Eric W. "Laplace's Equation-Spherical Coordinates." From MathWorld-A Wolfram Web Resource.
165 <http://mathworld.wolfram.com/LaplacesEquationSphericalCoordinates.html>
166

J M A

Journal of Mathematics and Its Applications

Volume 16, No. 2
Desember 2017

Department of Mathematics
FMIPA – Institut Pertanian Bogor
Jln. Meranti, Kampus IPB
Dramaga - Bogor

Phone/Fax: (0251) 8625276
E-mail: math@ipb.ac.id
jma.mathipb@gmail.com

**Kombinasi Varian Metode Newton dan Metode Halley
untuk Menyelesaikan Persamaan Tak Linear**
D. A. Pratamasyari, B.P. Silalahi, dan S. Guritman

1

**Penyusunan Algoritme Operasi Grup yang Dibangkitkan
Oleh Kurva Hipereliptik $y^2 + xy = x^5 + x^2 + x$ atas**

Lapangan $\mathbb{F}_{2^m}$

S. Nurmalasari, S. Guritman, dan B. P. Silalahi

15

**Model Matematika Penyebaran Penyakit Demam
Berdarah Dengue Tipe SEIR Infeksi Ganda**
E. N. Bano, P. Sianturi, dan Jaharuddin

29

**Penghitungan Kredibilitas Dengan Pustaka Actuar
Dalam R**

I Maulidi, W. Erliana, A.D. Garnadi, S. Nurdiati, dan I G. P. Purnaba

47

**Solusi Semi-Analitik Persamaan Laplace dengan Syarat
Batas Campuran**

I. Maulidi, A.D. Garnadi, M. N. Indro, M.T. Julianto, dan A. Pribadi

55

**Penyelesaian Masalah Syarat Batas Persamaan Diferensial
Biasa Menggunakan Metode Fungsi Green Secara Symbolic**
R. Kurnia, W. Erliana, A.D. Garnadi, S. Nurdiati, I G. P. Purnaba

64

JMA

Journal of Mathematics and Its Applications

Editor In Chief

I Wayan Mangku, *Institut Pertanian Bogor*

Executive Editor

Windiani Erliana, *Institut Pertanian Bogor*

Managing Editor

M. Tito Julianto, *Institut Pertanian Bogor*

Editorial Boards

Alhadi Bustamam	<i>Universitas Indonesia</i>
Amril Aman	<i>Institut Pertanian Bogor</i>
Fahren Bukhari	<i>Institut Pertanian Bogor</i>
I Gusti Putu Purnaba	<i>Institut Pertanian Bogor</i>
Kiki Arianti Sugeng	<i>Universitas Indonesia</i>
Paian Sianturi	<i>Institut Pertanian Bogor</i>
Saib Suwilo	<i>Universitas Sumatera Utara</i>
Siswadi	<i>Institut Pertanian Bogor</i>
Subchan	<i>Institut Teknologi Sepuluh Nopember</i>
Sugi Guritman	<i>Institut Pertanian Bogor</i>
Suhartono	<i>Institut Teknologi Sepuluh Nopember</i>
Tulus	<i>Universitas Sumatera Utara</i>

Department of Mathematics

FMIPA – Institut Pertanian Bogor

Jalan Meranti, Kampus IPB Dramaga Bogor

Phone/Fax: (0251) 8625276

Email: math@ipb.ac.id, jma.mathipb@gmail.com

Website: www.math.ipb.ac.id/ojs

JMA is published twice in a year, in July and December. Editor receives original research papers and critical survey articles in all area of mathematics. In preparing the manuscript, please follow the author guideline (attached on the back cover).

GUIDELINES FOR AUTHORS

JMA is published twice in a year, in July and December and managed by Department of Mathematics, Institut Pertanian Bogor. Editor receives original research papers and critical survey articles in all area of mathematics. Article can be written in English or Indonesian. Article will be reviewed by editor using some criteria. Those are *originality, significancy, technical strength, written presentation, and relevance to the journal*. Author will be given for revising based on recommendation from reviewer/editorial boards. Manuscript could be submitted to:

**Department of Mathematics
FMIPA – Institut Pertanian Bogor
Jalan Meranti, Kampus IPB Dramaga Bogor
Phone/Fax: (0251) 8625276
Email: math@ipb.ac.id, jma.mathipb@gmail.com**

Article is written using microsoft word, A4 paper, one column, Times New Roman font (14 size for title and 12 size for body text), single spacing. Upper/bottom/right margin is 3 cm and left margin is 4 cm (mirrored margin). No more than 20 pages.

Abstract is written in English or Indonesian, no more than 250 words. Keywords: 3-5 words.

Acknowledgment is written at the end of the paper before references.

References should be listed in alphabetical order according to the surnames of the authors at the end of the paper. The following reference style should be used:

- [1] Brown RL. 1997. *Introduction to the Mathematics of Demography*. 3rd Ed. Winsted: Actec Publications.
- [2] Guritman S, Hooweg F, Simonis J. 2001. The Degree of Functions and Weights in Linear Codes. *Discrete Applied Mathematics*. 111(1): 87-102.

For specific details, please download **JMA** template in the website www.math.ipb.ac.id/ojs.

JMA

Journal of Mathematics and Its Applications

Vol. 16, No. 2, December 2017

<i>Kombinasi Varian Metode Newton dan Metode Halley untuk Menyelesaikan Persamaan Tak Linear</i> D. A. Pratamasyari, B.P. Silalahi, dan S. Guritman	1
<i>Penyusunan Algoritme Operasi Grup yang Dibangkitkan Oleh Kurva Hipereliptik $y^2 + xy = x^5 + x^2 + x$ atas Lapangan $\mathbb{F}_{2^{97}}$</i> S. Nurnalasari, S. Guritman, dan B. P. Silalahi	15
<i>Model Matematika Penyebaran Penyakit Demam Berdarah Dengue Tipe SEIR Infeksi Ganda</i> E. N. Bano, P. Sianturi, dan Jaharuddin	29
<i>Penghitungan Kredibilitas Dengan Pustaka Actuar Dalam R</i> I. Maulidi, W. Erlana, A.D. Garnadi, S. Nurdianti, dan I G. P. Purnaba	47
<i>Solusi Semi-Analitik Persamaan Laplace dengan Syarat Batas Campuran</i> I. Maulidi, A.D. Garnadi, M. N. Indro, M.T. Julianto, dan A. Pribadi	55
<i>Penyelesaian Masalah Syarat Batas Persamaan Diferensial Biasa Menggunakan Metode Fungsi Green Secara Symbolic</i> R. Kurnia, W. Erlana, A.D. Garnadi, S. Nurdianti, dan I G. P. Purnaba	64