DESAIN PENGENDALI DENGAN UMPAN BALIK OUTPUT UNTUK SISTEM HIBRID MELALUI PENDEKATAN MARKOVIAN JUMP SYSTEM

Asep Najmurrokhman, Een Taryana, dan Ahmad Daelami

Jurusan Teknik Elektro, Fakultas Teknik, Universitas Jenderal Achmad Yani, Cimahi, 40533

E-mail: asepnajmu@yahoo.com

Abstrak

Sistem hibrid adalah sistem yang menggabungkan dinamika sistem yang kontinu dengan diskrit dalam satu kerangka yang utuh. Dewasa ini, sistem hibrid hampir ditemukan dalam setiap aplikasi sistem kendali. Salahsatu bentuk khas sistem tersebut berupa subsistem kontinu yang terdiri dari aktuator, plant dan sensor dikendalikan oleh subsistem pengendali digital misalnya mikrokontroler. Makalah ini menguraikan tentang desain pengendali dengan umpan balik output untuk sistem hibrid yang dimodelkan dengan *Markovian Jump System* (MJS). Dalam MJS, sistem terdiri dari subsistem dengan karakteristik tertentu yang masing-masing menyatakan kondisi sistem dengan kondisi operasi yang berbeda-beda. Dinamika sistem keseluruhan ditunjukkan dengan adanya proses melompat (*jump*) dari satu subsistem ke subsistem lain. Pemodelan dengan MJS mengakomodasi sifat stokastik dari perpindahan subsistem. Dengan demikian, pengendali yang dirancang harus mampu menghasilkan tujuan pengendalian yang memenuhi untuk seluruh subsistem yang ada dalam sistem tersebut. Hasil utama dalam makalah ini berupa formula pertidaksamaan matriks linier untuk mencari pengendali yang memenuhi kestabilan sistem lingkaran tertutupnya. Sebuah simulasi numerik diberikan untuk memperlihatkan keefektifan dari formulasi yang diusulkan dalam makalah ini.

Abstract

Output Feedback Controller Design for A Class of Hybrid Systems via Markovian Jump System Approach.

A Hybrid System is a kind of system which unifies continuous-time and discrete-time dynamical system in a framework. Nowadays, a hybrid system is ubiquitous in mostly application of control systems. A typical hybrid system comprises continuous-time subsystems such as actuator, plants, and sensor are controlled by digital controller such as microcontroller. This paper describes on output feedback controller design for a class of hybrid systems which modeled by Markovian Jump System (MJS). In MJS, the whole system dynamics is characterized by a stochastically jumping process from a subsystem to the others. A designed controller should satisfy a certain performance for the whole-system. The main result reported in this paper includes a linear matrix inequality formulation to find a controller in order to attain the stability of closed loop system. A numerical example is shown to describe the effectiveness of a method proposed in this paper.

Keywords: hybrid systems, markovian jump systems, output feedback, linear matrix inequalities

1. Pendahuluan

Sistem hibrid adalah sistem dinamis yang tersusun oleh komponen dengan perilaku kontinu dan diskrit dan kedua subsistem tersebut saling berinteraksi membentuk perilaku sistem keseluruhan [1]. Dalam hal aplikasi, sistem hibrid muncul saat kita mengatur suatu proses yang

kontinu melalui penggunaan pengendali yang bersifat diskrit, misalnya menggunakan mikrokontroler. Perspektif sistem ini juga tampak dalam implementasi pengaturan beberapa mesin listrik secara serempak melalui mekanisme pemilihan mesin listrik yang beroperasi atas dasar efisiensi dan pertimbangan lainnya. Salahsatu pertimbangan tersebut berupa perubahan kondisi operasi sehingga harus terjadi pemilihan ini. Dalam

beberapa referensi, kendaraan dengan sumber penggerak ganda melalui mekanisme pengaturan bahan bakar dan sumber listrik atau pembangkit listrik dengan menggunakan sumber energi yang bervariasi kadang-kadang disebut sebagai sistem hibrid [2,3,4]. Goncalves, *et al* [2] membahas sistem hibrid dalam implementasi sistem penyedia air untuk keperluan industri besar dengan sumber energi listriknya dihasilkan dengan mengatur tiga sumber yaitu transmisi jala-jala (grid), mikrohidro, dan turbin angin. Borhan, *et al* [3] mendiskusikan perspektif sistem hibrid dalam kendaraan modern berupa pengendalian sumber energi gerak kendaraan dari bahan bakar dan energi listrik. Sementara itu, Delimustafic, *et al* [4] menjelaskan aspek pemodelan dan pengendalian sistem hibrid dalam penyediaan sumber energi terbarukan. Artunes, *et al* [5] menerapkan perspektif sistem hibrid dalam *networked control systems*, yaitu sebuah sistem kendali yang memanfaatkan jaringan komunikasi sebagai bagian dari lingkaran kendali.

Untuk mendapatkan gambaran utuh tentang sistem hibrid, model matematika yang dibangun harus menggabungkan dinamika sistem kontinyu dengan dinamika sistem diskrit. Bentuk sistem hibrid dalam aplikasi sistem kendali muncul ketika pembentukan sinyal kendali yang kontinyu dilakukan dengan mengikuti mekanisme tertentu secara diskrit. Misalnya dalam sistem tersebut, pengendali yang dirancang bergantung kepada tiga kondisi operasi dalam subsistem kontinyu kemudian dirancang bagaimana mekanisme pemilihan tiga buah pengendali tersebut dengan menerapkan operasi saklar secara diskrit. Dalam kasus tersebut, mekanisme sistemnya bergantung kepada operasi perpindahan saklar, sehingga beberapa peneliti kadang-kadang memberi istilah sistem hibrid dengan *switched system* [6, 7, 8].

Salahsatu pendekatan dalam memodelkan sistem hibrid adalah *Markovian Jump System* (MJS). Dalam model tersebut, matriks-matriks dalam representasi ruang keadaan sistemnya bergantung kepada *state* dalam rantai Markovnya. *State* pada rantai Markov berupa anggota dari himpunan bilangan bulat. Gambar 1 memperlihatkan contoh rantai Markov dengan dua variabel *state*. Variabel tersebut menggambarkan keadaan saat terjadi tegangan jatuh dan kondisi normal pada sistem transmisi tenaga listrik. Variabel tersebut juga dapat melukiskan kondisi “mati” atau “hidup” suatu pengkondisi suhu ruangan.

Variabel *state* dalam rantai Markov sebuah sistem hibrid seringkali disebut sebagai mode sistem. Dengan demikian, apabila sebuah sistem hibrid memiliki dua variabel *state* seperti pada gambar 1, maka dinamika sistemnya memiliki dua mode.

Dalam sistem tersebut, saat mode satu dinamika sistemnya berperilaku mengikuti sistem kontinyu mode satu.

Gambar 1. Rantai Markov dengan dua *state*

Apabila ada kondisi tertentu sehingga mode sistem berubah menjadi mode dua, maka dinamika sistemnya mengikuti sistem kontinyu mode dua, dan seterusnya. Dalam kasus tersebut, terlihat bahwa dinamika sistem keseluruhan berlangsung sebagai urutan perpindahan atau transisi antar mode dalam sistem. Karena transisi antar mode bersifat acak, maka atribut lain yang muncul dalam rantai Markov adalah probabilitas transisi antar mode. Nilai probabilitas transisi ditentukan berdasarkan sifat keacakan dari parameter dalam proses sistem hibrid tersebut. Apabila transisi antar mode dalam sistem hibrid dimodelkan dengan rantai Markov yang memiliki dua *state* seperti pada gambar 1, maka α menandai probabilitas transisi dari mode 1 ke mode 1 atau dari mode 2 ke mode 1, sedangkan $(1 - \alpha)$ adalah probabilitas transisi dari mode 1 ke mode 2 atau dari mode 2 ke mode 2.

2. Markovian Jump System (MJS)

Sebuah MJS dipandang memberikan representasi yang baik dalam memodelkan sistem yang memiliki parameter di dalamnya. Parameter sistem diantaranya kondisi operasi sistem, perubahan nilai parameter yang tiba-tiba, perubahan lingkungan tempat sistem berada, dan lain-lain [9].

Tinjau diagram blok sistem dengan umpan balik seperti pada gambar 2 dengan G_p menyatakan blok *plant* yang diperumum dan K menandai pengendali yang dirancang.

Gambar 2. Sistem berumpan balik

Secara umum, persamaan ruang keadaan dalam bentuk waktu kontinyu dengan *state* rantai Markov θ diberikan oleh persamaan berikut:

$$G_p : \begin{cases} \dot{x} = A(\theta(t))x(t) + B_1(\theta(t))u(t) + B_2(\theta(t))w(t) \\ y(t) = L(\theta(t))x(t) + H(\theta(t))w(t) \\ z(t) = C(\theta(t))x(t) + D(\theta(t))u(t) \\ x(0) = x_0, \theta(0) = \theta_0 \end{cases} \quad (1)$$

dengan $x(t)$ menyatakan variabel keadaan sistem, $u(t)$ adalah input kendali, $w(t)$ menandai deretan derau (*noise*) yang masuk ke dalam sistem, $y(t)$ adalah variabel output terukur yang disediakan untuk pengendali, dan $z(t)$ menyatakan output sistem. Matriks-matriks sistemnya bergantung kepada *state* dari rantai Markov $\theta(t)$ yang nilainya berada dalam himpunan berhingga $\aleph \equiv \{1, \dots, N\}$. Distribusi awal θ_0 ditandai dengan $v = \{v_1, \dots, v_N\}$ dan matriks probabilitas transisinya ditandai dengan $\mathbf{P} = [p_{ij}]$. Dengan demikian, mode sistemnya direpresentasikan oleh *state* $\theta(t)$.

Dalam konteks penelitian yang dilaporkan dalam makalah ini, model MJS dituliskan dalam bentuk berikut:

$$G_p \begin{cases} \dot{x}(t) = A(\theta(t))x(t) + B(\theta(t))u(t) \\ y(t) = C_y(\theta(t))x(t) \\ x(0) = x_0; \theta(0) = \theta_0 \end{cases} \quad (2)$$

dengan $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ dan $\theta(t) \in \aleph$ seperti yang disebutkan pada bagian sebelumnya. Proses Markov $\{\theta(t), t \geq 0\}$ selain berada dalam suatu himpunan berhingga $\aleph$ juga menjelaskan perpindahan (*jump*) antara mode yang berbeda. Probabilitas transisi dari satu mode ke mode lainnya diberikan dalam bentuk berikut:

$$p_{ij} = \text{Prob}\{\theta(t+h) = j | \theta(t) = i\} = \begin{cases} \lambda_{ij}h + o(h) \\ 1 + \lambda_{ii}h + o(h) \end{cases} \quad (3)$$

Parameter λ_{ij} menyatakan laju transisi dari mode i ke mode j dengan $\lambda_{ij} \geq 0$ saat $i \neq j$ dan

$\lambda_{ii} = -\sum_{j=1, j \neq i}^N \lambda_{ij}$ serta $o(h)$ menandai suku orde

tinggi yang memenuhi $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h} = 0$. Boukas [10]

menurunkan kondisi kestabilan untuk sistem tanpa input ($u(t) = 0$) dalam teorema berikut.

Teorema 1. Sebuah sistem (2) tanpa input bersifat stabil apabila terdapat matriks-matriks simetrik definit positif P_i yang memenuhi pertidaksamaan matriks linier berikut:

$$A_i^T P_i + P_i A_i + \sum_{j \neq i} \lambda_{ij} P_j < 0, \forall i \in \aleph \quad (4)$$

dengan notasi $A_i = A|_{\theta(t)=i}$.

3. Perancangan Pengendali

Ada dua cara menggunakan umpan balik dalam perancangan pengendali, yaitu umpan balik keadaan dan umpan balik output. Dalam umpan balik keadaan, perancang mengasumsikan seluruh keadaan *plant* diketahui setiap saat dari data sensor. Asumsi tersebut seringkali tidak terpenuhi, karena keterbatasan kualitas sensor yang digunakan, penempatan sensor yang tidak memadai, atau tidak adanya sensor untuk variabel keadaan tersebut. Dalam hal demikian, pengendali yang dirancang memanfaatkan data output sebagai umpan balik sistem lingkaran tertutupnya.

Dalam makalah ini, struktur pengendali yang dirancang memiliki representasi ruang keadaan dalam bentuk berikut:

$$K : \begin{cases} \dot{x}_c(t) = K_A(\theta(t))x_c(t) + K_B(\theta(t))y(t) \\ u(t) = K_C(\theta(t))x_c(t) \\ x_c(0) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

dengan $x_c(t) \in \mathbb{R}^n$ dan $y(t) \in \mathbb{R}^p$ masing-masing menyatakan variabel keadaan pengendali dan sinyal output yang diperoleh dari data pengukuran. Dari bentuk (5), perancangan pengendali berkaitan dengan penentuan nilai-nilai penguatan K_A , K_B , dan K_C yang memenuhi tujuan pengendalian. Augmentasi persamaan (3) dan (5) menghasilkan representasi ruang keadaan baru sebagai berikut:

$$\begin{cases} \dot{\eta}(t) = \begin{bmatrix} A(\theta(t)) & B(\theta(t)) \\ K_B(\theta(t))C_y(\theta(t)) & K_A(\theta(t)) \end{bmatrix} \eta(t) \\ \eta(0) = \begin{bmatrix} x_0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (6)$$

dengan $\eta(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix}$. Dengan mendefinisikan

matriks berikut

$$\tilde{A}(\theta(t)) = \begin{bmatrix} A(\theta(t)) & B(\theta(t)) \\ K_B(\theta(t))C_y(\theta(t)) & K_A(\theta(t)) \end{bmatrix} \quad (7)$$

dan menerapkan teorema 1, sistem lingkaran tertutup (6) bersifat stabil apabila terdapat matriks simetrik definit positif P_i yang memenuhi pertidaksamaan matriks linier berikut:

$$\tilde{A}_i^T P_i + P_i \tilde{A}_i + \sum_{j \neq i} \lambda_{ij} P_j < 0, \forall i \in \aleph$$

Dimensi matriks P_i bersesuaian dengan matriks (7). Dengan menerapkan hasil yang diturunkan oleh Boukas [10], teorema berikut merangkum cara memperoleh pengendali dengan umpan balik output (5) yang menghasilkan kestabilan lingkaran tertutup untuk sistem (2).

Teorema 2. Sistem lingkaran tertutup (6) bersifat stabil untuk seluruh mode sistem, apabila terdapat matriks-matriks simetrik definit positif X_i dan Y_i serta matriks-matriks Ξ_B dan Ξ_C dengan dimensi

bersesuaian yang memenuhi pertidaksamaan matriks linier berikut:

$$\begin{bmatrix} \Psi_i & S_i(Y) \\ S_i^T(Y) & -\Phi_i(Y) \end{bmatrix} < 0 \quad (8)$$

$$X_i A_i + \Xi_{Bi} C_{yi} + A_i^T X_i + C_{yi}^T \Xi_{Bi} + \sum_{j \neq i} \lambda_{ij} X_j < 0 \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} Y_i & I \\ I & X_i \end{bmatrix} > 0 \quad (10)$$

dengan

$$S_i(Y) = [\sqrt{\lambda_{i1}} Y_i, \dots, \sqrt{\lambda_{ii-1}} Y_i, \sqrt{\lambda_{ii+1}} Y_i, \dots, \sqrt{\lambda_{iN}} Y_i]$$

$$\Phi_i(Y) = \text{diag}[Y_1, \dots, Y_{i-1}, Y_{i+1}, \dots, Y_N]$$

dan notasi $A_i = A|_{\theta(t)=i}$.

Apabila tiga buah pertidaksamaan matriks linier (8)-(10) memiliki solusi, maka pengendali (5) dikonstruksi dengan masing-masing nilai matriks penguatannya sebagai berikut:

$$K_{Ai} = [X_i - Y_i^{-1}]^{-1} [A_i^T + X_i A_i Y_i + X_i B_i \Xi_{Ci} + \Xi_{Bi} C_{yi} Y_i + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} Y_j^{-1} Y_i] Y_i^{-1} \quad (11)$$

$$K_{Bi} = [Y_i^{-1} - X_i]^{-1} \Xi_{Bi} \quad (12)$$

$$K_{Ci} = \Xi_{Ci} Y_i^{-1} \quad (13)$$

Selanjutnya, sebuah simulasi numerik dibuat untuk memperlihatkan keefektifan dari algoritma yang diusulkan dalam merancang pengendali. Representasi ruang keadaan untuk kasus yang diambil berbentuk sebagai berikut:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -0,5 \\ 0,1 & 1 \end{bmatrix}; B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; C_{y1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -0,2 & -0,5 \\ 0,5 & -0,25 \end{bmatrix}; B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; C_{y2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dengan indeks 1 dan 2 menyatakan mode dalam sistem tersebut. Respon lingkaran terbuka untuk masing-masing mode tersebut diperlihatkan dalam gambar 3 dan 4.

Gambar 3. Respon lingkaran terbuka mode 1

Terlihat bahwa mode 1 bersifat tidak stabil, sehingga sistem keseluruhan bersifat tidak stabil. Asumsikan perpindahan mode sistem terjadi dengan laju transisi antar mode mengikuti matriks berikut:

$$\begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

Gambar 4. Respon lingkaran terbuka mode 2

Dengan memecahkan pertidaksamaan matriks linier (8)-(10) menggunakan perangkat lunak standar, seperti *Robust Control Toolbox* dalam MATLAB [11] atau Sedumi [12], diperoleh matriks-matriks berikut:

$$X_1 = \begin{bmatrix} 155,3339 & 0,0000 \\ 0,0000 & 155,3339 \end{bmatrix},$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 156,7142 & -0,0000 \\ -0,0000 & 156,7142 \end{bmatrix}$$

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 85,5704 & -0,0000 \\ -0,0000 & 85,5704 \end{bmatrix}, Y_2 = \begin{bmatrix} 76,2129 & 0,0000 \\ 0,0000 & 76,2129 \end{bmatrix}$$

$$\Xi_{B1} = \begin{bmatrix} -240,2401 & 78,9301 \\ -16,7965 & -240,2401 \end{bmatrix},$$

$$\Xi_{B2} = \begin{bmatrix} -50,1127 & -5,2440 \\ 5,2440 & -42,2770 \end{bmatrix}$$

$$\Xi_{C1} = \begin{bmatrix} -170,7 & 2513,7 \\ -2480 & -170,7 \end{bmatrix},$$

$$\Xi_{C2} = \begin{bmatrix} -45,2177 & -5,8319 \\ 5,8319 & -41,4071 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, matriks-matriks pengendali ditentukan dengan memasukkan nilai-nilai solusi di atas ke persamaan (11)-(13) sehingga diperoleh hasil berikut:

$$K_{A1} = \begin{bmatrix} -2,5413 & 29,3867 \\ -28,9867 & -2,5413 \end{bmatrix},$$

$$K_{A2} = \begin{bmatrix} -1,1132 & -0,6100 \\ 0,6100 & -1,0632 \end{bmatrix}$$

$$K_{B1} = \begin{bmatrix} 1,5467 & -0,5082 \\ 0,1081 & 1,5467 \end{bmatrix}, K_{B2} = \begin{bmatrix} 0,3198 & 0,0335 \\ -0,0335 & 0,2698 \end{bmatrix}$$

$$K_{C1} = \begin{bmatrix} -1,9946 & 29,7634 \\ -28,9764 & -1,9946 \end{bmatrix},$$

$$K_{C2} = \begin{bmatrix} -0,5933 & -0,0765 \\ 0,0765 & -0,5433 \end{bmatrix}$$

Untuk keperluan simulasi, transisi antar mode diperlihatkan dalam gambar 5.

Gambar 5. Transisi mode

Hasil simulasi berupa respon keadaan lingkaran tertutup yang diberikan pada gambar 6 memperlihatkan bahwa pengendali yang dirancang berhasil menstabilkan sistem lingkaran tertutup secara keseluruhan.

Gambar 6. Respon *state* lingkaran tertutup

4. Kesimpulan

Telah diuraikan desain pengendali dengan umpan balik output untuk sistem hibrid yang dimodelkan dengan *Markovian Jump System*. Tujuan pengendalian yang ditinjau dalam makalah adalah stabilisasi sistem lingkaran tertutup. Sebuah pengendali dapat diperoleh apabila terdapat solusi untuk tiga buah pertidaksamaan matriks linier. Selanjutnya, matriks-matriks pengendali ditentukan

berdasarkan solusi tersebut. Hasil simulasi stabilisasi terhadap sistem dengan dua mode memperlihatkan pengendali yang dirancang mampu menstabilkan sistem lingkaran tertutupnya. Penelitian selanjutnya yang dilakukan berupa penerapan kendali kokoh yang mempertimbangkan ketidakpastian parameter sistem atau gangguan eksternal.

Daftar Acuan

- [1] J. Lunze and F. L. Lagarrigue (eds), *Handbook of Hybrid Systems Control: Theory, Tools, Application*, Cambridge University Press, 2009, p. 4.
- [2] F. V. Goncalves, H. M. Ramos & L. F. R. Reis, *Hybrid energy system evaluation in water supply system energy production: neural network approach*, *Int. Journal of Energy and Environment* vol. 1, no. 1, 2010, pp. 21-30.
- [3] H. Borhan, *et al.*, *MPC-Based Energy Management of a Power-Split Hybrid Electric Vehicle*, appear in *IEEE Trans. on Control Systems Technology*, 2011.
- [4] D. Delimustafic, *et al.*, "Model of a hybrid renewable energy system: Control, supervision and energy distribution", *IEEE Int. Symposium on Industrial Electronics*, 27-30 June 2011, pp. 1081-1086.
- [5] D. Artunes, J. P. Hespanha & C. Silvestre, *Volterra Integral Approach to Impulsive Renewal System: Application to Networked Control*, appear in *IEEE Trans. on Automatic Control*, 2012.
- [6] M. S. Mahmoud, *Delay-dependent dissipativity analysis and synthesis of switched delay systems*, *Int. Journal on Robust & Nonlinear Control*, vol. 1, no. 1, January 2011, pp. 1-20.
- [7] J. Zhao & D. Hill, *Dissipativity Theory for Switched Systems*, *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 53, no. 4, April 2008, pp. 941-953.
- [8] K. Hirata & J. P. Hespanha, *L2-induced gains of switched systems and classes of switching signals*, *Proc. IEEE Conference on Decision and Control* 15-17 December 2010, pp. 438-442.
- [9] O. L. V. Costa, *et al.*, "Discrete-time Markov Jump Linear Systems", Springer-Verlag London, 2005, p. 1.
- [10] E. K. Boukas, "Stochastic Switching Systems", Birkhauser Boston, 2006.
- [11] The Mathworks Inc., *Robust Control Toolbox for use with Matlab*, 2001.