Pemecahan Moda Terpandu dan Pengamatan Koefisien Pemantulan pada Pandu Gelombang Planar tanpa dan dengan Kisi

SPARISOMA VIRIDI

Laporan kunjungan ke MESA+ Research Institute, University of Twente, P.O. box 217, 7500 AE Enschede, The Netherlands

Email: dancewithghost@yahoo.com

November 21st, 2001

Abstrak. Pemecahan Mode Terpandu dapat dilakukan dengan menerapkan syarat kontinuitas pada medan listrik dan turunannya. Atau dapat pula syarat ini telah ditampung dalam transfer matriks sehingga, tidak lagi perlu diturunkan hubungan antara amplitudo pada masing-masing lapis. Dengan kedua cara ini dapat dicari N_{eff} yang memenuhi solusi yang merupakan moda terpandu. Kemudian dengan metoda yang kedua ini dapat pula diletakkan kisi pada salah satu lapisan. Dengan demikian dapat diamati bagaimana profil dan juga koefisien pemantulan pada struktur tersebut.

Kata kunci: moda terpandu, matriks transfer, kisi, pandu gelombang, koefisien pemantulan, bisection, akar persamaan

I. Pendahuluan

Dua buah cara untuk mendapatkan moda terpandu telah digunakan digunakan dalam perhitungan ini. Pertama dengan langsung menerapkan syarat kontinuitas untuk medan listrik pada setiap batas antarmuka lapisan. Dan yang kedua adalah dengan menggunakan matriks transfer.^[1] Cara pertama diterapkan untuk pandu gelombang dengan tiga lapis dan cara kedua diterapkan untuk pandu gelombang dengan empat lapis tanpa dan dengan kisi. Untuk dengan adanya kisi hal ini telah dilakukan dan dapat diamati bagaimana kelakuan koefisien pemantulan untuk berbagai nilai N_{eff} , dengan menggunakan *Couple Mode Theory* (CMT).^[2] Pada tulisan ini telah dicoba untuk kembali mendapatkan hasil tersebut.

II. Teori

Masalah yang akan dipecahkan adalah moda terpandu untuk gelombang dengan polarisasi TE. Dengan lebih dahulu meninggalkan faktor kebergantungan terhadap waktu $\exp(i\omega t)$, maka persamaan yang harus dipecahkan adalah

$$\{\partial_{xx} + \partial_{zz} + k_0^2 n^2(x, z)\} E_y(x, z) = 0 \quad (1)$$

Di sini k_0 adalah bilangan gelombang dalam vakum, dan n adalah indeks bias yang memiliki kebergantungan terhadap z apabila kisi diikutsertakan dalam perhitungan.

2.1 KASUS TIGA LAPIS DAN KONTINUITAS

Profil pandu gelombang yang akan dihitung memiliki bentuk seperti digambarkan pada Gambar 1 berikut ini:

Gambar 1. Struktur geometri kasus tiga lapis.

Nilai indeks bias n_1 , n_2 dan n_3 yang digunakan memiliki syarat

$$n_2 > n_1, \quad n_2 > n_3 \quad (2)$$

agar dapat terjadi moda terpandu pada lapis kedua. Kemudian dengan menggunakan suatu nilai N_{eff} yang akan dicari, dapat dihitung bilangan gelombang untuk tiap-tiap lapis, yaitu:

$$k_1 = k_0 \sqrt{N_{eff}^2 - n_1^2} \quad (3)$$

$$k_2 = k_0 \sqrt{n_2^2 - N_{eff}^2} \quad (4)$$

$$k_3 = k_0 \sqrt{N_{eff}^2 - n_3^2} \quad (5)$$

Dalam kasus ini n hanya merupakan fungsi dari x .

$$n = n(x) \quad (6)$$

Sehingga dalam tiap-tiap lapis dapat dipilih solusi dengan bentuk yang hanya bergantung terhadap x , kebergantungan terhadap z telah ditampung oleh faktor $\exp(-i\beta z)$.

$$E_1 = A_{1,+} \exp(k_1 x) \quad (7)$$

$$E_2 = A_{2,+} \exp(ik_2 x) + A_{2,-} \exp(-ik_2 x) \quad (8)$$

$$E_3 = A_{3,+} \exp(k_3 x) + A_{3,-} \exp(-k_3 x) \quad (9)$$

Tanda subscript positif menunjukkan cahaya yang merambat ke arah $-x$ dan tanda negatif menunjukkan cahaya merambat pada arah sebaliknya. Kemudian dengan menerapkan syarat kontinuitas

$$E_1|_{x=0} = E_2|_{x=0} \quad (10)$$

$$\partial_x E_1|_{x=0} = \partial_x E_2|_{x=0} \quad (11)$$

$$E_2|_{x=w} = E_3|_{x=w} \quad (12)$$

$$\partial_x E_2|_{x=w} = \partial_x E_3|_{x=w} \quad (13)$$

Akan dapat diperoleh hubungan berikut ini:

$$A_{2,+} = \frac{1}{2} \left(1 - i \frac{k_1}{k_2} \right) A_{1,+} \quad (14)$$

$$A_{2,-} = \frac{1}{2} \left(1 - i \frac{k_1}{k_2} \right) A_{1,-} \quad (15)$$

$$A_{3,+} = \frac{1}{2k_3} \{ (k_3 + ik_2) e^{ik_2 w} A_{2,+} + (k_3 - ik_2) e^{-ik_2 w} A_{2,-} \} \quad (16)$$

$$A_{3,-} = \frac{1}{2k_3} \{ (k_3 - ik_2) e^{ik_2 w} A_{2,+} + (k_3 + ik_2) e^{-ik_2 w} A_{2,-} \} \quad (17)$$

Sehingga secara tidak langsung dapat dibangun suatu fungsi, katakan saja f , yang menghubungkan antara N_{eff} dan $A_{3,+}$.

$$A_{3,+} = f(N_{eff}) \quad (18)$$

Kemudian moda yang dimaksud adalah suatu nilai N_{eff} yang membuat $A_{3,+}$ menjadi nol atau mendekati nol. Atau dengan kata lain permasalahan ini menjadi permasalahan pencarian akar persamaan f dengan variabel N_{eff} .

Metoda yang akan digunakan di sini adalah metoda *Bisection*. Metoda ini merupakan metoda yang paling sederhana untuk mencari akar-akar suatu persamaan. Metoda lain sebagai alternatif misalnya *Runge-Kutta* dan *Newton-Raphson*.

Secara sederhana algoritma *Bisection* dapat dituliskan sebagai berikut:

1. Tentukan batas pencarian akar, N_{effmin} dan N_{effmax} .
2. Nyatakan sebagai variabel N_{eff1} dan N_{eff2} berturut-turut.
3. Hitung f_1 dan f_2 dengan masukan N_{eff1} dan N_{eff2} . Di mana $f_1 = f(N_{eff1})$, $f_2 = f(N_{eff2})$.

4. Hitung hasil perkalian f_1 dan f_2 nyatakan dalam f_{12} .
5. Jika $f_{12} < 0$ maka lanjutkan langkah 6, jika tidak lanjutkan langkah 13.
6. Tentukan N_{eff3} dengan membagi dua rentang N_{eff1} dan N_{eff2} , yaitu $N_{eff3} = (N_{eff1} + N_{eff2})/2$.
7. Hitung f_3 , di mana $f_3 = f(N_{eff3})$.
8. Jika $|f_3| < f_{min}$, batas yang dianggap mencerminkan bahwa N_{eff3} merupakan akar persamaan f , lanjutkan langkah 16. Misalnya $f_{min} = 1E-10$.
9. Hitung f_{13} dan f_{23} , di mana $f_{13} = f_1 \cdot f_3$ dan $f_{23} = f_2 \cdot f_3$.
10. Pilih hasil perkalian yang bernilai lebih kecil dari 0, jika ada lanjutkan langkah 11 jika tidak ada lanjutkan langkah 13.
11. Jika $f_{13} < 0$ maka $N_{eff1} = N_{eff3}$ dan $N_{eff2} = N_{eff3}$, jika $f_{23} < 0$ maka $N_{eff1} = N_{eff2}$ dan $N_{eff2} = N_{eff3}$.
12. Kembali ke langkah 3.
13. Hitung $dN_{eff} = (N_{eff2} - N_{eff1})/NN$. Misalnya $NN = 1000$.
14. $N_{eff1} = N_{eff1} + dN_{eff}$.
15. Kembali ke langkah 3.
16. Selesai.

Apabila akar-akar persamaan ditemukan lebih dari satu maka algoritma tersebut dapat tetap digunakan dengan membagi fungsi f dengan akar-akar yang telah ditemukan, dengan demikian seluruh akan dapat dicari.

$$f^{(n+1)}(N_{eff}) = f^{(n)}(N_{eff}) / \prod_{i=1}^n (N_{eff} - N_{eff}^i) \quad (19)$$

Di mana indeks (n) menyatakan jumlah akar yang telah ditemukan, dalam hal ini $f^{(0)}$ adalah f dalam persamaan (18).

2.2 KASUS EMPAT LAPIS DAN MATRIKS TRANSFER

Transfer matriks adalah metoda yang mentransfer matriks yang menghubungkan antara medan dengan turunannya, yaitu matriks u .

$$E_y(x) \equiv p(x) = b_+(x) + b_-(x) \quad (20)$$

$$\partial_x E_y(x) \equiv q(x) = b_+(x) - b_-(x) \quad (21)$$

dengan matriks u adalah

$$q = up \quad (22)$$

dan

$$b_{\pm}(x) = \exp(\pm Dx) b_{\pm}(0) \quad (23)$$

dengan D adalah sebuah matriks. Hubungan antara matriks u di bawah (indeks B) suatu lapis dengan u pada atas lapis (indeks T) berikutnya adalah sebagai berikut:

$$u_p^T = D_p^{-1} M_p^{-1} M_{p-1} D_{p-1} u_{p-1}^B M_{p-1}^{-1} M_p \quad (24)$$

Hubungan antara u dalam tiap lapis adalah

$$u_p^B = C_{p,d} S_{p,d}^{-1} - S_{p,d}^{-1} (u_p^T + C_{p,d} S_{p,d}^{-1})^{-1} S_{p,d}^{-1} \quad (25)$$

with

$$C_{p,d} = \frac{1}{2} (D_{p,d}^+ + D_{p,d}^-) \quad (26)$$

$$S_{p,d} = \frac{1}{2} (D_{p,d}^+ - D_{p,d}^-) \quad (27)$$

$$D_{p,d}^\pm = \exp(\pm D_{p,d} t_p) \quad (28)$$

Untuk struktur ini, M adalah matriks identitas. Dan D adalah matriks diagonal dengan $-\alpha^2$ sebagai elemen matriksnya.

$$\alpha_p = \sqrt{\beta^2 - k_0^2 n_p^2} \quad (29)$$

untuk masing-masing lapis.

Kemudian hubungan antara matriks kolom p dalam lapis dan antar lapis adalah sebagai berikut:

$$p_p^B = M_p^{-1} M_{p+1} p_{p+1}^T \quad (30)$$

$$p_p^T = Q_{p,d} p_p^B \quad (31)$$

$$Q_{p,d} = S_{p,d} (S_{p,d}^{-1} C_{p,d} - u_p^B) \quad (32)$$

dan beberapa hubungan yang mungkin diperlukan

$$R_{q1} = (-u_q^T + I)(u_q^T + I)^{-1} \quad (33)$$

$$b_q^{T-} = R_{q1} b_q^{T+} \quad (34)$$

$$b_p^{T/B\pm} = \frac{1}{2} (I \pm u_p^{T/B}) p_p^{T/B} \quad (35)$$

Kemudian strategi yang digunakan untuk mencari solusi adalah:^[2]

1. Pada salah satu ujung layer, misalnya saja layer 1, ditetapkan bahwa hanya ada bagian yang meluruh, sehingga $u_1^B = I$.
2. Berturut-turut dilakukan transfer matriks u menggunakan persamaan (24) dan (25) sehingga tercapati matriks u_q^T . Dengan q adalah layer terbawah dalam struktur.
3. Kemudian dengan menggunakan persamaan (30)-(32) dapat diperoleh medan dalam setiap lapis.

4. Perhitungan dihentikan sampai diperoleh nilai b_q^{T+} yang cukup kecil, misalnya saja 10^{-10} .

2.3 MATRIKS TRANSFER DAN $|r|$

Dalam kasus berikut ini masih dibahas struktur yang sama hanya diperkenalkan kisi pada lapis ketiga dan lapis kedua diberikan indeks bias yang sama dengan lapis pertama. Untuk kasus lapis di mana terdapat kisi diperkenalkan cara untuk menyatakan perbedaan indeks bias akibat adanya kisi dengan menggunakan ekspansi deret Fourier.

$$k_0^2 n_{grating}^2(z) = k_0^2 n_{s,a}^2 + \sum_{m \neq 0} \xi_{s,m} \exp(imKz) \quad (36)$$

$$\xi_{s,m} = \frac{1}{d} \int_0^d k_0^2 n_{grating}^2 \exp(-imKz) dz \quad (37)$$

Dengan d adalah perioda kisi dan K adalah

$$K = \frac{2\pi}{d} \quad (38)$$

adalah bilangan gelombang kisi. Kemudian dapat didefinisikan frekuensi spasial sepanjang z yang berkaitan dengan suatu frekuensi spasial dalam daerah Brillouin pertama, β :

$$\begin{aligned} &\beta - rK, \beta - (r-1)K, \dots \\ &\beta, \dots, \\ &\dots, \beta + rK \equiv \beta_1, \dots, \beta_{2r+1} \end{aligned} \quad (39)$$

di mana r adalah ukuran orde ketelitian. Untuk kasus kisi ini dapat didefinisikan α seperti pada persamaan (29), yaitu

$$\alpha_{s,L} = \sqrt{\beta_L^2 - k_0^2 n_{s,L}^2} \quad (40)$$

dengan $Re(\alpha_{s,L}) > 0$ dan $Im(\alpha_{s,L}) > 0$ jika $Re(\alpha_{s,L}) > 0$, dengan s adalah nomor lapis, $s = 1 \dots q$ dan $L = 1 \dots 2r+1$. Medan dalam lapis s dapat dituliskan dalam bentuk

$$E_s(x, z) = \sum_L e_{s,L}(x) \exp(-i\beta_L z) \quad (41)$$

atau dalam bentuk

$$E_s(x, z) = \sum_L c_L \exp(\alpha_L x - i\alpha_L z) \quad (42)$$

Kemudian dengan menggunakan ekspansi indeks bias kisi dalam deret Fourier di atas, maka dapat diperoleh persamaan nilai eigen untuk c dengan mengumpulkan suku-

suku yang memiliki frekuensi spasial yang sama sepanjang z .

$$Nc = -a^2c \quad (43)$$

dengan N adalah

$$N = \begin{bmatrix} -\alpha_1^2 & \xi_1 & \dots & \xi_{2r} \\ \xi_{-1} & -\alpha_2^2 & \dots & \xi_{2r-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{-2r} & \xi_{-(2r-1)} & \dots & -\alpha_{2r+1}^2 \end{bmatrix} \quad (44)$$

Dengan menyimpan vektor eigen dalam matriks M dan nilai a dalam matriks diagonal $D_{s,a}$. Untuk kasus tanpa kisi maka, M dan N adalah matriks identitas.

Kemudian $|r|$ dapat diperoleh melalui rumus

$$r_{4l} = (u_4^T - I)(u_4^T + 1)^{-1} \quad (45)$$

untuk kasus 4 lapis. Sedangkan untuk kasus q lapis dapat dihitung menggunakan rumusan yang sama.

$$r_{ql} = (u_q^T - I)(u_q^T + 1)^{-1} \quad (46)$$

Masing-masing posisi dalam diagonal matrix menunjukkan nilai r yang bersesuaian dengan komponen-komponen moda Floquet.

II. Hasil Perhitungan Numerik

Hasil perhitungan numerik untuk masing-masing kasus adalah sebagai berikut. Untuk kedua kasus pertama hasil akan dibandingkan dengan perhitungan yang diperoleh menggunakan piranti lunak ATR Guide sedangkan kasus ketiga akan dibandingkan dengan ATR Guide untuk kasus tanpa kisi dan dengan yang telah dihitung oleh H. Hoekstra^[1] untuk kasus dengan kisi dalam rangka mendapatkan koefisien pemantulan, r .

3.1 KASUS TIGA LAPIS DAN KONTINUITAS

Hasil perhitungan diperoleh dengan menggunakan kode dalam C++.

parameter-1 dan hasil:

n1 = 1.3 w1 = 10.0 lamda = 1.55
n2 = 1.5 w2 = 2.0
n3 = 1.2 w3 = 10.0

	A3, +	(cycles)	C++	ATR Guide
TE-0	7.476E-15	(52)	1.470503	1.470504
TE-1	2.386E-15	(51)	1.383546	1.383551

parameter-2 dan hasil:

n1 = 1.3 w1 = 10.0 lamda = 1.55
n2 = 1.5 w2 = 3.0
n3 = 1.2 w3 = 10.0

	A3, +	(cycles)	C++	ATR Guide
TE-0	1.0E-30	(51)	1.484567	1.484567
TE-1	1.0E-30	(49)	1.438156	1.438159
TE-2	1.0E-30	(52)	1.361645	1.361652

parameter-3 dan hasil:

n1 = 1.3 w1 = 10.0 lamda = 1.55
n2 = 1.5 w2 = 4.0
n3 = 1.2 w3 = 10.0

	A3, +	(cycles)	C++	ATR Guide
TE-0	1.0E-30	(43)	1.490542	1.490542
TE-1	1.0E-30	(50)	1.462042	1.462044
TE-2	1.0E-30	(53)	1.414270	1.414274
TE-3	1.0E-30	(49)	1.347901	1.347909

parameter-4 dan hasil:

n1 = 1.3 w1 = 10.0 lamda = 1.65
n2 = 1.5 w2 = 2.5
n3 = 1.2 w3 = 10.0

	A3, +	(cycles)	C++	ATR Guide
TE-0	1.0E-30	(51)	1.576804	1.576806
TE-1	1.0E-30	(51)	1.506743	1.506747
TE-2	1.0E-30	(52)	1.391836	1.391845

Sesat terlihat bahwa untuk semakin tinggi mode semakin besar perbedaan hasil yang diperoleh apabila dibandingkan dengan hasil ATR Guide. Hal ini dapat dilihat pada grafik berikut ini.

Gambar 1. Grafik $|\Delta N_{eff}|$ terhadap nomor moda.

2.2 KASUS EMPAT LAPIS DAN MATRIKS TRANSFER

Dengan menggunakan transfer matriks untuk mencari moda terpandu diperoleh beberapa hasil berikut ini. Panjang gelombang yang digunakan adalah 1.550 μm .

parameter-1 dan hasil:

Layer	width	n
1	10.000	1.0000
2	1.000	1.5000
3	0.500	1.8065
4	1.000	1.5000
5	10.000	1.0000

	ATR Guide	MATLAB
TE-0	1.648649	1.648649
TE-1	1.420486	1.420486
TE-2	1.343947	1.343947
TE-3	1.150211	1.150211

parameter-2 dan hasil:

Layer	width	n
1	10.000	1.0000
2	1.000	1.5000
3	1.000	1.8065
4	1.000	1.5000
5	10.000	1.0000

	ATR Guide	MATLAB
TE-0	1.732454	1.732454
TE-1	1.535641	1.535641
TE-2	1.397110	1.397110
TE-3	1.322780	1.322780
TE-4	1.126820	1.126820

parameter-3 dan hasil:

Layer	width	n
1	10.000	1.0000
2	1.000	1.5000
3	0.250	1.8065
4	1.000	1.6000
5	10.000	1.0000

	ATR Guide	MATLAB
TE-0	1.601656	1.601656
TE-1	1.446720	1.446720
TE-2	1.329621	1.329621
TE-3	1.089296	1.089296

parameter-4 dan hasil:

Layer	width	n
1	10.000	1.0000
2	1.000	1.5000
3	0.250	1.8065
4	0.500	1.6000
5	10.000	1.2000

	ATR Guide	MATLAB
TE-0	1.587053	1.587053
TE-1	1.379393	1.379393
TE-2	1.219633	1.219633

Terlihat bahwa perhitungan menggunakan MatLab memberikan hasil yang sama dengan perhitungan menggunakan ATR Guide.

3.3 MATRIKS TRANSFER DAN $|r|$

Sebelum menghitung kasus 4 lapis tanpa kisi, $|r|$ tiap-tiap lapis telah dihitung terlebih dahulu untuk dibandingkan dengan hasil ATR Guide. Hal ini dilakukan untuk memeriksa terjadinya kesalahan dalam metoda transfer matriks.

Data untuk tiap titik pada setiap pengamatan telah dicocokkan. Grafik yang diperoleh digambarkan saling bertindihan untuk menunjukkan hasil yang memiliki nilai yang sama. Grafik dengan garis utuh adalah hasil ATR Guide sedangkan grafik dengan bulatan adalah hasil MatLab.

Gambar 2. Grafik $|r_{21}|^2$ terhadap N_{eff}

Gambar 3. Grafik $|r_{31}|^2$ terhadap N_{eff}

Gambar 4. Grafik $|r_{41}|^2$ terhadap N_{eff}

Untuk kasus tanpa kisi hasil yang diperoleh melalui MatLab memiliki nilai yang sama dengan hasil yang diperoleh melalui ATR Guide.

Sedangkan untuk hasil dengan kisi untuk telah diperoleh hasil yang mirip dengan referensi acuan.^[2] Akan tetapi perbedaan atau kesalahan perhitungan belum dapat diperkirakan. Hasil tersebut dapat dilihat pada Gambar 5. berikut ini.

Gambar 5. Grafik $|r_{41}|$ terhadap N_{eff}

Besarang N_{eff} yang dimaksud di sini adalah

$$N_{eff}^1 = N_{eff} - K/k_0 \quad (47)$$

III. Ikhtisar

Untuk sementara diperoleh bahwa penyelesaian moda terpandu dengan menggunakan matriks tranfer memiliki nilai yang lebih baik dibandingkan dengan hanya menggunakan syarat kontinuitas bagi medan maupun turunannya pada batas-batas lapisan, apabila dibandingkan dengan hasil yang diperoleh menggunakan ATR Guide. Sedangkan untuk perhitungan $|r|$ atau $|r|^2$ menggunakan matriks transfer untuk kasus tanpa kisi memperoleh hasil yang sama dengan hasil dari ATR Guide. Untuk kasus dengan kisi telah diperoleh hasil yang sama dengan referensi.^[2]

Konsultasi

H. Hoekstra, H. Alatas, H. P. Handoyo, Yohan, Casimir, Sabol, dan H.P Uranus.

Referensi

1. J. Cityroky Â., S.Helfert, R. Pregla, *Optical and Quantum Electronics*, 30 (1998) 343-358.
2. Hugo, J. W. M. Hoekstra, *Optical and Quantum Electronics*, 32 (2000) 735-758.
3. H. Hoekstra, *Summary of lecture presented on 12-2-2001 in WS-MAMOA*, Bandung (2001).
4. Theodor Tamir, R. C. Alferness, *Guided-wave Optoelectronics*, Springer-Verlag, Berlin, (1990) 12-27.
5. H. Hoekstra, *Summary of lecture presented on 29-1-2001 in WS-MAMOA*, Bandung (2001).
6. Jurgen R. Meyer0Arendt, *Introduction to Classical and Modern Optics*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 4th Edition (1995) 8.
7. Reinhard März, *Integrated Optics Design and Modeling*, Artech House, Boston, (1995) 39.
8. Charles W. Steele, *Numerical Computation of Electric and Magnetic Fields*, Chapman & Hall, (1997) 29.
9. D. Stauffer, F. W. Helh, V. Winkelmann, J.G. Zabolitzky, *Computer Simulation and Computer Algebra: Lecturer for Beginner*, Springer-Verlag, Berling, Second Edition (1989).
10. G. Lindfield, J. Penny, *Numerical Method Using MATLAB*, Ellish Horwood, New York (1995).
11. Nai-Hsiang Sun, *J. of Lightwave Tech.*, 15 (1997) 2301-2315.