

[white paper]

Diamond Open Access

n e 2 elevado a n menos 1 não primos

Colaboração Matemática Aberta¹

23 de Janeiro de 2021

Resumo

Apresentamos uma demonstração didática do teorema que diz:
Se n é um inteiro maior que 1 e n não é primo, então $2^n - 1$ não é primo.

palavras-chave: teoria de números, teorema, números não primos

A versão mais atualizada deste artigo está disponível em

<https://osf.io/k67em/download>

Introdução

1. Esses *livros* são **excelentes referências** para iniciar os estudos neste *maravilhoso universo* das demonstrações matemáticas [1–3].

Teorema

2. *Se n é um inteiro maior que 1 e n não é primo, então $2^n - 1$ não é primo* [1].

¹Todos os autores com suas afiliações aparecem no final deste artigo.

Demonstração de (2)

3. Como n não é primo, ele é um número composto, então existem inteiros positivos a e b tais que $a < n$, $b < n$ e $n = ab$.
4. Note que (3) é a definição de números compostos.
5. Precisamos definir dois números x e y para provarmos o seguinte:
 - (a) $xy = 2^n - 1$,
 - (b) $x < 2^n - 1$,
 - (c) $y < 2^n - 1$.
6. Note que (5.a) garante que o termo que queremos provar pode ser escrito como o produto de dois números e (5.b,c) garantem que nem x , nem y sejam iguais a 1.
7. Se x ou y fosse igual a 1, o número $2^n - 1$ poderia não ser composto, mas sim primo.
8. Portanto, provar (5) significa provar (1).
9. A proposição (10) a seguir é o *insight criativo*, o principal responsável pelo sucesso desta demonstração.
10. Sejam
$$x = 2^b - 1,$$
$$y = 1 + 2^b + 2^{2b} + \dots + 2^{(a-2)b} + 2^{(a-1)b}.$$
11. Em (10), x e y foram definidos dessa forma para que possamos ter $xy = 2^n - 1$.
12. Vamos mostrar (11).
13. De (10),

$$xy = (2^b - 1) \cdot (1 + 2^b + 2^{2b} + 2^{3b} + \dots + 2^{(a-2)b} + 2^{(a-1)b}).$$

14. Fazendo a distributiva de 2^b e em seguida de -1 com o parêntesis da direita de (13),

$$xy = 2^b \cdot (1 + 2^b + 2^{2b} + \dots + 2^{(a-2)b} + 2^{(a-1)b}) - (1 + 2^b + 2^{2b} + \dots + 2^{(a-2)b} + 2^{(a-1)b}).$$

15. Fazendo a distributiva de 2^b ,

$$xy = (2^b + 2^{2b} + 2^{3b} + \dots + 2^{(a-1)b} + 2^{ab}) - (1 + 2^b + 2^{2b} + 2^{3b} + \dots + 2^{(a-1)b}).$$

16. Após a igualdade de (15), o último termo do primeiro parêntesis vem deste cálculo, $2^b \cdot 2^{(a-1)b} = 2^b \cdot 2^{ab-b} = 2^{b+ab-b} = 2^{ab}$.

17. Note que, em (15), 2^b da esquerda cancela com -2^b da direita, 2^{2b} da esquerda cancela com -2^{2b} da direita, 2^{3b} cancela com -2^{3b} , e assim sucessivamente.

18. Assim,

$$xy = 2^{ab} - 1.$$

19. De (3), $n = ab$, então

$$xy = 2^n - 1.$$

20. De (3), $b < n$.

21. De (10), $x = 2^b - 1$.

22. De (20) e (21),

$$x = 2^b - 1 < 2^n - 1.$$

23.

$$x < 2^n - 1$$

24. De (3), temos que

$$ab = n > a.$$

25.

$$ab > a$$

26. De (3), como a é um inteiro positivo, dividindo (25) por a , temos

$$b > 1.$$

27. Como $b > 1$, da definição de x em (10),

$$x = 2^b - 1 > 2^1 - 1 = 1.$$

28.

$$x > 1$$

29. Multiplicando os dois lados da desigualdade $x > 1$ por y , que é maior do que zero, temos

$$xy > y.$$

30. De (19), substituindo $xy = 2^n - 1$ em (29), então

$$y < 2^n - 1.$$

31. De (19), (23) e (30), concluímos que $2^n - 1$ pode ser escrito como o produto de dois inteiros positivos x e y , ambos menores do que $2^n - 1$.

32. Portanto, $2^n - 1$ NÃO é primo. □

Considerações Finais

33. Provamos o teorema (2) apresentando o maior número de passos que pudemos visualizar.

Ciência Aberta

O **arquivo latex** para este artigo, juntamente com outros *arquivos suplementares*, estão disponíveis em [4]. Seja coautor(a) deste artigo, envie sua contribuição para mplobo@uft.edu.br.

Referências

- [1] Velleman, Daniel J. *How to prove it: A structured approach*. Cambridge University Press, 2019.
- [2] Warner, Steve. *Pure Mathematics for Beginners*. GET 800, 2018.
- [3] Warner, Steve. *Abstract Algebra for Beginners*. GET 800, 2018.
- [4] Lobo, Matheus P. “Open Journal of Mathematics and Physics (OJMP).” *OSF*, 21 Apr. 2020.
<https://doi.org/10.17605/osf.io/6hzyp>

Colaboração Matemática Aberta

Matheus Pereira Lobo (autor principal, mplobo@uft.edu.br)^{1,2}
<https://orcid.org/0000-0003-4554-1372>

¹Universidade Federal do Tocantins (Brasil)

²Universidade Aberta (UAb, Portugal)