Journal of Mathematics and Its Applications

Jurnal Matematika dan Aplikasinya

Volume 13, No. 1
Juli 2014

Alamat Redaksi :

Departemen Matematika
FMIPA – Institut Pertanian Bogor
Jln. Meranti, Kampus IPB
Dramaga - Bogor

Phone/Fax: (0251) 8625276

E-mail: math@ipb.ac.id

jma.mathipb@gmail.com

Analisis Fault Tree dan Aplikasinya pada Masalah Kecelakaan Lalu Lintas di Provinsi Bengkulu

L. Noviyanti, H. Sumarno, dan P. Sianturi

1

Model Matematika dan Analisis Kandungan Oksigen Terlarut dalam Badan Air yang Mengalami Eutrofikasi

S. L. Mahmud, E. H. Nugrahani, dan P. Sianturi

11

Solusi Persamaan Yukawa di Daerah Sederhana Menggunakan Metode Galerkin dalam Matlab

K. Dahlan, A. D. Garnadi, M. Ilyas, E. H. Nugrahani, Y. S. Putra, E. Yuliany, dan L. Yuliawati

23

Modifikasi Stepsize pada Metode Steepest Descent dalam Pengoptimuman Fungsi: Kasus Fungsi Kuadratik Diagonal

F. fadhilah, B. P. Silalahi, dan M. Ilyas

47

Masalah Ground-Holding dengan Dua Terminal dalam Pengendalian Lalu Lintas Udara

W. Prasetyo, F. Hanum, dan P. T. Supriyo

61

Journal of Mathematics and Its Applications

JMA

Jurnal Matematika dan Aplikasinya

PIMPINAN REDAKSI

Prof. Dr. Ir. I Wayan Mangku, M.Sc

EDITOR

Prof. Dr. Ir. Siswadi, M.Sc	Institut Pertanian Bogor
Prof. Tulus	Universitas Sumatera Utara
Prof. Saib Suwilo, M.Sc	Universitas Sumatera Utara
Dr. Ir. Amril Aman, M.Sc	Institut Pertanian Bogor
Dr. Ir. I Gusti Putu Purnaba, DEA	Institut Pertanian Bogor
Dr. Ir. Fahren Bukhari, M.Sc	Institut Pertanian Bogor
Dr. Sugi Guritman	Institut Pertanian Bogor
Dr. Paian Sianturi	Institut Pertanian Bogor
Dr. Kiki Arianti Sugeng	Universitas Indonesia
Alhadi Bustamam, S.Si, M.Kom, PhD	Universitas Indonesia
Dr. Suhartono	Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Dr. Subchan	Institut Teknologi Sepuluh Nopember

LAYOUT

Windiani Erliana, M.Si
Muhammad Tito Julianto, M.Kom

ALAMAT REDAKSI:

Departemen Matematika
FMIPA – Institut Pertanian Bogor
Jln. Meranti, Kampus IPB Dramaga Bogor
Phone/Fax: (0251) 8625276
Email: math@ipb.ac.id, jma.mathipb@gmail.com
Website: www.math.ipb.ac.id/ojs

JMA merupakan media yang memuat informasi hasil penelitian matematika baik murni maupun terapan, bagi para matematikawan atau para pengguna matematika. **JMA** diterbitkan dua kali (dua nomor) setiap tahun (periode Juli dan Desember).

Harga langganan per volume, termasuk biaya pos:

Institusi/Perpustakaan Rp 350.000,- (dalam IPB), Rp 500.000,- (luar IPB)

Staf/Perorangan Rp 200.000,- (dalam IPB), Rp 250.000,- (luar IPB)

Mahasiswa Rp 75.000,-

Penulis makalah yang diterima dikenai biaya administrasi Rp 25.000,- per halaman

Semua pembayaran biaya dapat ditransfer melalui:

Nur Aliatiningtyas, Dra
BNI Cabang Bogor
No. Rek. 0254402360

Journal of Mathematics and Its Applications

JMA

Jurnal Matematika dan Aplikasinya

DAFTAR ISI

<i>Analisis Fault Tree dan Aplikasinya pada Masalah Kecelakaan Lalu Lintas di Provinsi Bengkulu</i> <i>L. Noviyanti, H. Sumarno, dan P. Sianturi</i>	1
<i>Model Matematika dan Analisis Kandungan Oksigen Terlarut dalam Badan Air yang Mengalami Eutrofikasi</i> <i>S. L. Mahmud, E. H. Nugrahani, dan P. Sianturi</i>	11
<i>Solusi Persamaan Yukawa di Daerah Sederhana Menggunakan Metode Galerkin dalam Matlab</i> <i>K. Dahlan, A. D. Garnadi, M. Ilyas, E. H. Nugrahani, Y. S. Putra, E. Yuliany, dan L. Yulawati</i>	23
<i>Modifikasi Stepsize pada Metode Steepest Descent dalam Pengoptimuman Fungsi: Kasus Fungsi Kuadratik Diagonal</i> <i>F. fadhilah, B. P. Silalahi, dan M. Ilyas</i>	47
<i>Masalah Ground-Holding dengan Dua Terminal dalam Pengendalian Lalu Lintas Udara</i> <i>W. Prasetyo, F. Hanum, dan P. T. Supriyo</i>	61

TATA CARA PENULISAN MAKALAH

JMA menerima makalah dalam bahasa Indonesia atau bahasa Inggris. Makalah dapat dikirim melalui pos (berupa 2 *hard copy* beserta *soft copy*) atau lewat email ke alamat berikut:

Redaksi **JMA**
Departemen Matematika
FMIPA – Institut Pertanian Bogor
Jln. Meranti, Kampus IPB Dramaga
Bogor
Phone/Fax: (0251) 8625276
Email: math@ipb.ac.id, jma.mathipb@gmail.com

Makalah orisinal berupa hasil penelitian matematika murni atau terapan mendapat prioritas utama untuk diterima. Tulisan yang bersifat *review* juga bisa diterima. Makalah akan diseleksi oleh redaksi dan hasil seleksi akan diinformasikan.

Makalah ditulis dengan LATEX/TEX/MS-WORD dengan kualitas baik, format A4, bolak balik, spasi satu, font 12, margin kiri 4 cm, margin kanan 3 cm. Margin atas dan bawah 4 cm. Maksimum jumlah halaman 20, termasuk tabel, ilustrasi, dan gambar.

Judul makalah dibuat singkat, jelas, dan merepresentasikan isi makalah. Nama penulis diletakkan pada catatan kaki, diikuti nama instansi (bila ada), dan alamat (termasuk email jika ada).

Abstrak diletakkan di bawah nama dan alamat penulis, ditulis tidak melebihi 250 kata, meringkas hasil yang diperoleh dan metode yang digunakan. Di bawah abstrak boleh diletakkan kata kunci. Kata kunci terdiri atas satu kata atau lebih yang merupakan istilah yang paling dominan digunakan dan merupakan istilah yang paling menentukan isi tulisan.

Acknowledgment/Ungkapan Terima Kasih ditulis pada akhir tulisan sebelum referensi.

Referensi/Daftar Pustaka diletakkan pada akhir tulisan setelah Ungkapan Terima Kasih, penulisan mengikuti pola pada contoh berikut ini dengan pengurutan naik didasarkan abjad huruf pertama pada nama belakang penulis pertama.

- [1] Brown RL. 1997. *Introduction to the Mathematics of Demography*. 3rd Ed. Winsted: Actec Publications.
- [2] Guritman S, Hooweg F, Simonis J. 2001. The Degree of Functions and Weights in Linear Codes. *Discrete Applied Mathematics*. 111(1):87-102.

Ilustrasi atau *Gambar* sedapat mungkin ditempatkan pada badan tulisan mengikuti apa yang diilustrasikan atau yang digambarkan. Jika itu tidak mungkin, boleh juga ditempatkan setelah referensi. Tidak ada ilustrasi atau gambar yang ditulis tangan. Untuk keterangan lebih rinci, silakan unduh template JMA di website www.math.ipb.ac.id/ojs.

<i>Analisis Fault Tree dan Aplikasinya pada Masalah Kecelakaan Lalu Lintas di Provinsi Bengkulu</i> <i>L. Noviyanti, H. Sumarno, dan P. Sianturi</i>	1
<i>Model Matematika dan Analisis Kandungan Oksigen Terlarut dalam Badan Air yang Mengalami Eutrofikasi</i> <i>S. L. Mahmud, E. H. Nugrahani, dan P. Sianturi</i>	11
<i>Solusi Persamaan Yukawa di Daerah Sederhana Menggunakan Metode Galerkin dalam Matlab</i> <i>K. Dahlan, A. D. Garnadi, M. Ilyas, E. H. Nugrahani, Y. S. Putra, E. Yuliany, dan L. Yuliawati</i>	23
<i>Modifikasi Stepsize pada Metode Steepest Descent dalam Pengoptimuman Fungsi: Kasus Fungsi Kuadratik Diagonal</i> <i>F. fadhilah, B. P. Silalahi, dan M. Ilyas</i>	47
<i>Masalah Ground-Holding dengan Dua Terminal dalam Pengendalian Lalu Lintas Udara</i> <i>W. Prasetyo, F. Hanum, dan P. T. Supriyo</i>	61

MODEL MATEMATIKA DAN ANALISIS KANDUNGAN OKSIGEN TERLARUT DALAM BADAN AIR YANG MENGALAMI EUTROFIKASI

S. L. MAHMUD¹, E. H. NUGRAHANI², P. SIANTURI²

Abstrak

Dalam tulisan ini dibahas model matematika perubahan kandungan oksigen terlarut dalam badan air yang mengalami eutrofikasi. Variabel yang dipertimbangkan dalam model ini adalah konsentrasi *nutrien*, *alga*, *makrofita*, *zooplankton*, *detritus* dan konsentrasi oksigen terlarut. Hasil analisis dan simulasi model memperoleh enam titik tetap yang satu diantaranya stabil dan lima lainnya tidak stabil. Simulasi juga dilakukan untuk melihat pengaruh laju masukan nutrisi dan laju pengubahan *detritus* menjadi *nutrien* terhadap perubahan kandungan oksigen terlarut. Dari hasil simulasi diperoleh bahwa jika laju masukan nutrisi dan laju pengubahan *detritus* menjadi *nutrient* meningkat, maka konsentrasi oksigen terlarut di badan air menurun.

Kata kunci: model matematika, oksigen terlarut, eutrofikasi, kestabilan

PENDAHULUAN

Eutrofikasi adalah proses pengayaan nutrien melalui proses dekomposisi yang dapat memicu terjadinya perubahan seperti meningkatnya produksi *alga* atau tumbuhan lainnya yang mengakibatkan berkurangnya oksigen terlarut dalam badan air [1]. Oksigen terlarut adalah oksigen yang digunakan oleh makhluk hidup yang tinggal di dalam air baik hewan maupun tumbuhan untuk mempertahankan hidupnya [2]. Kandungan oksigen terlarut dapat bersumber dari proses difusi oksigen yang berasal dari udara maupun proses fotosintesis oleh *alga* dan tumbuhan. Kadar oksigen dari kedua proses ini mengakibatkan peningkatan kandungan oksigen terlarut yang tidak terlalu tinggi. Hal ini disebabkan karena ketika semakin banyak nutrisi masuk ke danau maka pertumbuhan *alga* dan tumbuhan juga semakin banyak, sehingga *alga* dan tumbuhan menutupi permukaan air, yang menyebabkan perpindahan oksigen dari udara ke air melalui difusi menjadi berkurang dan cahaya yang digunakan untuk proses fotosintesis juga menjadi berkurang.

Selain itu, ketika *alga* dan tumbuhan mati dan tenggelam ke bagian bawah badan air, terjadi pembusukan oleh dekomposer yang akhirnya terbentuk *detritus* yang berlebihan. *Detritus* tersebut selanjutnya diubah menjadi nutrien melalui

¹Mahasiswa S2, Program Studi Matematika Terapan, Sekolah Pascasarjana IPB Dramaga Bogor, 16680.

²Departemen Matematika, Fakultas Ilmu Pengetahuan Alam, Jalan Meranti Kampus IPB Dramaga Bogor, 16680.

proses biokimia. Proses pembentukan dan pengubahan *detritus* menjadi *nutrient* menggunakan banyak oksigen terlarut, sehingga mengurangi kandungan oksigen terlarut. Penggunaan oksigen terlarut yang sangat besar pada proses biokimia mengakibatkan suplai oksigen terlarut bagi ikan dan komponen akuatik lainnya menjadi berkurang sehingga hal ini dapat berpengaruh buruk terhadap kehidupan ikan dan kehidupan akuatik lainnya [3].

Voinov dan Tonkikh [4] telah menyajikan sebuah model matematika nonlinear untuk eutrofikasi di danau yang menyebabkan berkurangnya oksigen terlarut. Model tersebut mengasumsikan bahwa penyebab berkurangnya oksigen terlarut hanya dipengaruhi oleh *nutrien*, *alga* dan *detritus*. Model Voinov dan Tonkikh dikaji lebih lanjut oleh Misra [5] dengan menambahkan parameter *zooplankton* pada model dan direkonstruksi kembali oleh Misra [6] dengan menambahkan parameter *makrofita* dan mengabaikan parameter *zooplankton* pada model.

Penelitian ini akan mengkaji sebuah model modifikasi yang mengacu pada kajian Misra [5] dan Misra [6] dengan menambahkan sekaligus parameter *zooplankton* dan *makrofita* pada model matematika kandungan oksigen terlarut dalam badan air yang mengalami eutrofikasi.

MODEL MATEMATIKA

Variabel yang dipertimbangkan dalam model ini adalah konsentrasi *nutrien* (N), populasi *alga* (A), populasi *makrofita* (M), populasi *zooplankton* (Z), kepadatan *detritus* (S) dan konsentrasi oksigen terlarut (C). Model ini mengasumsikan bahwa jumlah laju aliran nutrisi yang berasal dari luar (limbah rumah tangga dan limbah pertanian) ke dalam badan air adalah q , yang berkurang dengan laju $\alpha_0 N$. Selain itu, diasumsikan juga bahwa laju bertambahnya *nutrient* oleh *detritus* adalah $\pi_0 \delta S$ dan laju berkurangnya *nutrient* oleh *alga* sebanding dengan kepadatan *alga* dan jumlah konsentrasi nutrisi yaitu NA serta laju berkurangnya *nutrien* karena *makrofita* sebanding dengan kepadatan *makrofita* dan jumlah konsentrasi *nutrient* yaitu NM . Hal ini mengakibatkan laju populasi *alga* sebanding dengan NA dan laju populasi *makrofita* adalah sebanding dengan NM . Laju berkurangnya *alga* secara alami diasumsikan sebanding dengan kepadatannya dan laju berkurangnya *alga* akibat interaksi antara *alga* atau akibat kesesakan sebanding dengan A^2 . Sama halnya dengan laju berkurangnya *makrofita* secara alami diasumsikan sebanding dengan kepadatannya M dan laju berkurangnya *makrofita* akibat interaksi antara *makrofita* itu sendiri atau akibat kesesakan sebanding dengan M^2 .

Laju berkurangnya *alga* oleh *zooplankton* sebagai predatornya dianggap sebanding dengan (AZ) dan karenanya laju pertumbuhan *zooplankton* juga sebanding ke (AZ) . Laju berkurangnya *zooplankton* secara alami diasumsikan sebanding dengan kepadatannya Z dan laju berkurangnya karena interaksi antara

zooplankton atau karena kesesakan sebanding dengan Z^2 . Laju pertumbuhan detritus yang berasal dari *alga*, *makrofita*, dan *zooplankton* yang berkurang secara alami diasumsikan sebanding dengan A , M dan Z serta laju berkurangnya *detritus* secara alami diasumsikan sebanding dengan S .

Berdasarkan uraian di atas, dapat dituliskan bahwa asumsi yang digunakan dalam model ini yakni sebagai berikut:

- ✓ Nutrisi masuk ke badan air melalui air limpasan bidang pertanian dan limbah rumah tangga, diasumsikan konstan.
- ✓ Laju pertumbuhan *alga* dan *makrofita* sepenuhnya bergantung pada *nutrient*.
- ✓ Populasi *zooplankton* sepenuhnya bergantung pada *alga*
- ✓ *Detritus* yang diperoleh dari *alga*, *makrofita* dan *zooplankton* yang mati, kemudian didekomposisi melalui proses biokimia menjadi *nutrien*.
- ✓ Konsentrasi oksigen terlarut meningkat karena proses difusi oksigen dan proses fotosintesis *alga* dan *makrofita* yang diasumsikan konstan serta menurun akibat digunakan dalam proses pembentukan *detritus* menjadi.

Secara skematis, pola berkurangnya oksigen terlarut dalam model ini dapat digambarkan dalam diagram kompartemen berikut:

Gambar 1 Skema model matematika kandungan oksigen terlarut pada badan air yang mengalami eutrofikasi.

Model yang menggambarkan fenomena tersebut diformulasikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \frac{dN}{dt} &= q + \pi_0 \delta S - \alpha_0 N - \beta_1 AN - \beta_2 NM \\
 \frac{dA}{dt} &= \theta_1 \beta_1 NA - \alpha_1 A - \beta_{10} A^2 - \beta_3 AZ \\
 \frac{dM}{dt} &= \theta_2 \beta_2 NM - \alpha_2 M - \beta_{20} M^2 \\
 \frac{dZ}{dt} &= \theta_3 \beta_3 AZ - \alpha_3 Z - \beta_{30} Z^2 \\
 \frac{dS}{dt} &= \pi_1 \alpha_1 A + \pi_2 \alpha_2 M + \pi_3 \alpha_3 Z - \delta S \\
 \frac{dC}{dt} &= q_c - \alpha_4 C + \lambda_{11} A + \lambda_{22} M - \delta_1 S
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

di mana: $N(0) \geq 0$, $A(0) \geq 0$, $M(0) \geq 0$, $Z(0) \geq 0$, $S(0) \geq 0$, $C(0) \geq 0$.

Sistem (2.1) inilah yang selanjutnya akan dianalisis. Analisis tersebut meliputi penentuan titik tetap dan kestabilan serta simulasi numerik untuk menggambarkan kandungan oksigen terlarut di badan air yang mengalami eutrofikasi.

3 HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Penentuan Titik Tetap

Titik tetap dari sistem persamaan diferensial (2.1) diperoleh dengan menentukan $\frac{dN}{dt} = \frac{dA}{dt} = \frac{dM}{dt} = \frac{dZ}{dt} = \frac{dS}{dt} = \frac{dC}{dt} = 0$. Hasil analisis menunjukan bahwa sistem tersebut memiliki enam jenis titik tetap yaitu $E_i(N_i^*, A_i^*, M_i^*, Z_i^*, S_i^*, C_i^*)$ dimana $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

1. $E_1(q/\alpha_0, 0, 0, 0, 0, q_c/\alpha_4)$.

Titik tetap E_1 selalu ada (*exist*) karena q, q_c, α_0 dan α_4 selalu positif. Titik tetap ini menyatakan bahwa *alga*, *makrofita* dan *zooplankton* belum ada pada badan air. Sejalan dengan hal tersebut, maka *detritus* pun belum terbentuk di badan air. Pada titik tetap ini konsentrasi *nutrien* dan oksigen terlarut masing-masing mencapai nilai titik tetapnya.

2. $E_2(N_2^*, 0, M_2^*, 0, S_2^*, C_2^*)$.

Titik tetap E_2 memerlukan syarat agar selalu mengandung komponen positif yakni

$$-\alpha_0\alpha_2 + q\beta_2\theta_2 > 0 \text{ dan } q_c - S_2^*\delta_1 + M_2^*\lambda_{22} > 0.$$

Titik tetap ini menyatakan bahwa *alga* dan *zooplankton* belum ada pada badan air, maka badan air yang tercemar hanya berpengaruh pada populasi *makrofita*.

3. $E_3(N_3^*, A_3^*, 0, 0, S_3^*, C_3^*)$.

Titik tetap E_3 memerlukan syarat agar selalu mengandung komponen positif yakni

$$-\alpha_0\alpha_1 + q\beta_1\theta_1 > 0 \text{ dan } q_c - S_3^*\delta_1 + A_3^*\lambda_{11} > 0.$$

Titik tetap ini menyatakan bahwa *makrofita* dan *zooplankton* belum ada pada badan air menyebabkan badan air yang tercemar hanya berpengaruh pada populasi *alga*.

4. $E_4(N_4^*, A_4^*, 0, Z_4^*, S_4^*, C_4^*)$.

Titik tetap E_4 memerlukan syarat agar selalu mengandung komponen positif yakni

$$\alpha_0\alpha_3\beta_3 - \alpha_0\alpha_1\beta_{30} - \pi_0\pi_3\alpha_3^2\beta_1\theta_1 + q\beta_1\beta_{30}\theta_1 > 0 \text{ dan } -\alpha_3 + A_4^*\beta_3\theta_3 > 0 \text{ dan } q_c - S_4^*\delta_1 + A_4^*\lambda_{11} > 0.$$

Titik tetap ini menyatakan bahwa *makrofita* belum ada pada badan air, maka badan air yang tercemar berpengaruh pada populasi *alga* dan *zooplankton*.

5. $E_5(N_5^*, A_5^*, M_5^*, 0, S_5^*, C_5^*)$.

Titik tetap E_5 memerlukan syarat agar selalu mengandung komponen positif yakni

$$-\pi_0\pi_2\alpha_2^2\beta_{10} - \pi_0\pi_1\alpha_1^2\beta_{20} + q\beta_{10}\beta_{20} > 0 \text{ dan } -\alpha_1 + N_5^*\beta_1\theta_1 > 0 \text{ dan } -\alpha_2 + N_5^*\beta_2\theta_2 > 0 \text{ dan } q_c - S_5^*\delta_1 + A_5^*\lambda_{11} + \lambda_{22}M_5^* > 0.$$

Titik tetap ini menyatakan bahwa *zooplankton* belum ada pada badan air, maka badan air yang tercemar berpengaruh pada populasi *alga* dan *makrofita*.

6. $E_6(N_6^*, A_6^*, M_6^*, Z_6^*, S_6^*, C_6^*)$.

Titik tetap E_6 memerlukan syarat agar selalu mengandung komponen positif yakni

$$\begin{aligned} & -\alpha_2\alpha_3\beta_1\beta_2\beta_3\beta_{30}\theta_1 + \alpha_0\alpha_3\beta_1\beta_{20}\beta_3\beta_{30}\theta_1 + \alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2\beta_{30}^2\theta_1 \\ & -\alpha_0\alpha_1\beta_1\beta_{20}\beta_{30}^2\theta_1 - \pi_0\pi_3\alpha_3^2\beta_1^2\beta_{20}\beta_{30}\theta_1^2 + q\beta_1^2\beta_{20}\beta_{30}^2\theta_1^2 \\ & -\alpha_3^2\beta_2^2\beta_3^2\theta_2 + 2\alpha_1\alpha_3\beta_2^2\beta_3\beta_{30}\theta_2 - \alpha_1^2\beta_2^2\beta_{30}^2\theta_2 \\ & -\pi_0\pi_2\alpha_2\alpha_3\beta_1\beta_2\beta_3\beta_{30}\theta_1\theta_2 + \pi_0\pi_2\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2\beta_{30}^2\theta_1\theta_2 > 0 \text{ dan } \\ & -\alpha_3 + A_6^*\theta_3\beta_3 > 0 \text{ dan } -\alpha_2 + N_6^*\theta_2\beta_2 > 0 \text{ dan } \\ & q_c - S_6^*\delta_1 + A_6^*\lambda_{11} + \lambda_{22}M_6^* > 0. \end{aligned}$$

Titik tetap ini menyatakan bahwa *alga*, *makrofita* dan *zooplankton*, semuanya berada dalam badan air.

Untuk mendapatkan nilai dari masing-masing variabel yang berada dalam titik tetap dapat dilakukan sebagai berikut:

a) Keberadaan titik tetap $E_1(q/\alpha_0, 0, 0, 0, 0, q_c/\alpha_4)$ sudah jelas.

b) Pada titik tetap $E_2(N_2^*, 0, M_2^*, 0, S_2^*, C_2^*)$ nilai-nilai N_2^* , M_2^* , S_2^* dan C_2^* diperoleh dengan menyelesaikan sistem persamaan aljabar berikut:

$$q + \pi_0\delta S - \alpha_0N - \beta_2NM = 0 \quad (3.1)$$

$$\theta_2\beta_2N - \alpha_2 - \beta_{20}M = 0 \quad (3.2)$$

$$\pi_2\alpha_2M - \delta S = 0 \quad (3.3)$$

$$q_c - \alpha_4C + \lambda_{22}M - \delta_1S = 0 \quad (3.4)$$

Dengan menyelesaikan persamaan (3.2) dan (3.3) masing-masing dalam N dan S , kemudian mensubstitusi hasil tersebut ke dalam (3.1) diperoleh persamaan kuadrat dalam M yaitu:

$$-M^2\beta_2\beta_{20} + M(-\alpha_2\beta_2 - \alpha_0\beta_{20} + \pi_0\pi_2\alpha_2\beta_2\theta_2) - \alpha_0\alpha_2 + q\beta_2\theta_2 = 0.$$

Untuk mendapatkan nilai M , pilih akar M positif dari penyelesaian persamaan kuadrat tersebut yang selanjutnya dinotasikan M_2^* . Dengan menggunakan nilai M_2^* dalam persamaan (3.2) dan (3.3) diperoleh nilai-nilai positif N_2^* dan S_2^* . Selanjutnya, nilai M_2^* dan S_2^* disubstitusikan pada persamaan (3.4) sehingga diperoleh nilai C positif yang dinotasikan C_2^* .

c) Untuk menunjukkan keberadaan titik tetap E_3 caranya mirip dengan titik tetap E_2 .

d) Pada titik tetap $E_4(N_4^*, A_4^*, 0, Z_4^*, S_4^*, C_4^*)$ nilai-nilai N_4^* , A_4^* , Z_4^* , S_4^* dan C_4^* diperoleh dengan menyelesaikan sistem persamaan aljabar berikut:

$$q + \pi_0\delta S - \alpha_0N - \beta_1NA = 0 \quad (3.5)$$

$$\theta_1\beta_1N - \alpha_1 - \beta_{10}A - \beta_3Z = 0 \quad (3.6)$$

$$\theta_3\beta_3A - \alpha_3 - \beta_{30}Z = 0 \quad (3.7)$$

$$\pi_1 \alpha_1 A + \pi_3 \alpha_3 Z - \delta S = 0 \quad (3.8)$$

$$q_c - \alpha_4 C + \lambda_{11} A - \delta_1 S = 0 \quad (3.9)$$

Dengan menyelesaikan persamaan (3.7) dalam Z kemudian mensubstitusikan Z ke dalam persamaan (3.6) dan (3.8) maka diperoleh nilai N dan S . Selanjutnya hasil tersebut disubstitusikan ke dalam (3.5) sehingga diperoleh persamaan kuadrat dalam A yaitu:

$$\begin{aligned} & -\frac{A^2(\beta_{10}\beta_{30} + \beta_3^2\theta_3)}{\beta_{30}\theta_1} + \\ & \frac{A(\alpha_3\beta_1\beta_3 - \alpha_1\beta_1\beta_{30} - \alpha_0\beta_{10}\beta_{30} + \pi_0\pi_1\alpha_1\beta_1\beta_{30}\theta_1 - \alpha_0\beta_3^2\theta_3 + \pi_0\pi_3\alpha_3\beta_1\beta_3\theta_1\theta_3)}{\beta_1\beta_{30}\theta_1} + \\ & \frac{\alpha_0\alpha_3\beta_3 - \alpha_0\alpha_1\beta_{30} - \pi_0\pi_1\alpha_3^2\beta_1\theta_1 + q\beta_1\beta_{30}\theta_1}{\beta_1\beta_{30}\theta_1} = 0. \end{aligned}$$

Untuk mendapatkan nilai A , pilih akar A positif dari penyelesaian persamaan kuadrat tersebut yang selanjutnya dinotasikan A_4^* . Dengan menggunakan nilai A_4^* dalam (3.6), (3.7) dan (3.8) diperoleh nilai-nilai positif N_4^* , Z_4^* dan S_4^* . Selanjutnya, nilai N_4^* dan S_4^* disubstitusikan ke dalam (3.9) sehingga diperoleh nilai C positif yang dinotasikan C_4^* .

e) Untuk menunjukkan keberadaan titik tetap E_5 , caranya mirip dengan titik tetap E_4 .

f) Pada titik tetap $E_6(N_6^*, A_6^*, M_6^*, Z_6^*, S_6^*, C_6^*)$ nilai-nilai n_6^* , a_6^* , m_6^* , Z_6^* , S_6^* dan C_6^* diperoleh dengan menyelesaikan persamaan aljabar berikut:

$$q + \pi_0 \delta S - \alpha_0 N - \beta_1 A N - \beta_2 N M = 0 \quad (3.10)$$

$$\theta_1 \beta_1 N - \alpha_1 - \beta_{10} A - \beta_3 Z = 0 \quad (3.11)$$

$$\theta_2 \beta_2 N - \alpha_2 - \beta_{20} M = 0 \quad (3.12)$$

$$\theta_3 \beta_3 A - \alpha_3 - \beta_{30} Z = 0 \quad (3.13)$$

$$\pi_1 \alpha_1 A + \pi_2 \alpha_2 M + \pi_3 \alpha_3 Z - \delta S = 0 \quad (3.14)$$

$$q_c - \alpha_4 C + \lambda_{11} A + \lambda_{22} M - \delta_1 S = 0 \quad (3.15).$$

Dengan menyelesaikan persamaan (3.13) dalam Z kemudian mensubstitusikan Z ke dalam persamaan (3.11), maka diperoleh nilai N . Selanjutnya hasil tersebut disubstitusikan ke dalam persamaan (3.12) lalu selesaikan persamaan tersebut dalam M . Selanjutnya nilai Z dan M disubstitusikan ke dalam persamaan (3.14) lalu selesaikan persamaan tersebut dalam S . Selanjutnya substitusi N , M dan S ke dalam persamaan (3.10) sehingga diperoleh persamaan kuadrat dalam A yaitu:

$$\begin{aligned} & -A^2(\beta_{10}\beta_{30} + \beta_3^2\theta_3)(\beta_1^2\beta_{20}\beta_{30}\theta_1 + \beta_{10}\beta_2^2\beta_{30}\theta_2 + \beta_2^2\beta_3^2\theta_2\theta_3) + \\ & a(\alpha_3\beta_1^2\beta_{20}\beta_3\beta_{30}\theta_1 + \alpha_2\beta_1\beta_{10}\beta_2\beta_{30}^2\theta_1 - \alpha_1\beta_1^2\beta_{20}\beta_{30}^2\theta_1 - \\ & \alpha_0\beta_1\beta_{10}\beta_{20}\beta_{30}^2\theta_1 + \pi_0\pi_1\alpha_1\beta_1^2\beta_{20}\beta_{30}^2\theta_1^2 + 2\alpha_3\beta_{10}\beta_2^2\beta_3\beta_{30}\theta_2 - \\ & 2\alpha_1\beta_{10}\beta_2^2\beta_{30}^2\theta_2 + \pi_0\pi_2\alpha_2\beta_1\beta_{10}\beta_2\beta_{30}^2\theta_1\theta_2 + \alpha_2\beta_1\beta_2\beta_3^2\beta_{30}\theta_1\theta_3 - \\ & \alpha_0\beta_1\beta_{20}\beta_3^2\beta_{30}\theta_1\theta_3 + \pi_0\pi_3\alpha_3\beta_1^2\beta_{20}\beta_3\beta_{30}\theta_1^2\theta_3 + 2\alpha_3\beta_2^2\beta_3^3\theta_2\theta_3 - \\ & 2\alpha_1\beta_2^2\beta_3^2\beta_{30}\theta_2\theta_3 + \pi_0\pi_2\alpha_2\beta_1\beta_2\beta_3^2\beta_{30}\theta_1\theta_2\theta_3) - \alpha_2\alpha_3\beta_1\beta_2\beta_3\beta_{30}\theta_1 + \\ & \alpha_0\alpha_3\beta_1\beta_{20}\beta_3\beta_{30}\theta_1 + \alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2\beta_{30}^2\theta_1 - \alpha_0\alpha_1\beta_1\beta_{20}\beta_{30}^2\theta_1 - \\ & \pi_0\pi_3\alpha_3^2\beta_1^2\beta_{20}\beta_{30}\theta_1^2 - \pi_0\pi_2\alpha_2^2\beta_1^2\beta_{30}^2\theta_1^2 + q\beta_1^2\beta_{20}\beta_{30}^2\theta_1^2 - \\ & \alpha_3^2\beta_2^2\beta_3^2\theta_2 + 2\alpha_1\alpha_3\beta_2^2\beta_3\beta_{30}\theta_2 - \alpha_1^2\beta_2^2\beta_{30}^2\theta_2 - \\ & \pi_0\pi_2\alpha_2\alpha_3\beta_1\beta_2\beta_3\beta_{30}\theta_1\theta_2 + \pi_0\pi_2\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2\beta_{30}^2\theta_1\theta_2 = 0. \end{aligned}$$

Untuk mendapatkan nilai A , pilih akar A positif dari penyelesaian persamaan kuadrat tersebut yang selanjutnya dinotasikan A_6^* . Dengan menggunakan nilai A_6^* dalam persamaan N, M, Z dan S maka diperoleh nilai-nilai positif N_6^*, M_6^*, Z_6^* dan S_6^* . Selanjutnya nilai A_6^*, M_6^* dan S_6^* disubstitusikan pada persamaan (3.15) sehingga diperoleh nilai C positif yang dinotasikan dengan C_6^* .

3.2 Analisis Kestabilan

Pada bagian ini, akan dilakukan analisis untuk melihat sifat kestabilan pada masing-masing titik tetap. Dengan melakukan pelineran pada sistem persamaan (2.1) diperoleh matriks *Jacobi* sebagai berikut:

$$J = \begin{pmatrix} l_{11} & -\beta_1 N & -\beta_2 N & 0 & \pi_0 \delta & 0 \\ \theta_1 \beta_1 A & l_{22} & 0 & -\beta_3 A & 0 & 0 \\ \theta_2 \beta_2 M & 0 & l_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \theta_3 \beta_3 Z & 0 & l_{44} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 \pi_1 & \alpha_2 \pi_2 & \alpha_3 \pi_3 & -\delta & 0 \\ 0 & \lambda_{11} & \lambda_{22} & 0 & -\delta_1 & -\alpha_4 \end{pmatrix}$$

di mana:

$$l_{11} = -\alpha_0 - \beta_1 A - \beta_2 M, l_{22} = -\alpha_1 - 2\beta_{10} A - \beta_3 Z + \theta_1 \beta_1 N,$$

$$l_{33} = -\alpha_2 - 2\beta_{20} M + \theta_2 \beta_2 N, l_{44} = -\alpha_3 - 2\beta_{30} Z + \theta_3 \beta_3 A$$

Menurut Tu [7], sistem akan stabil jika nilai eigen dari matriks *Jacobi* semuanya bernilai real negatif dan bersifat tidak stabil jika minimal ada satu nilai eigen dari matriks $J_{(E_i)}$ yang positif. Misalkan $J_{(E_i)}$ adalah matriks *Jacobi* dari titik tetap E_i dimana $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Untuk matriks $J_{(E_1)}$ diperoleh empat nilai eigen yang negatif dan dua lainnya yaitu $\frac{-\alpha_0 \alpha_1 + q \beta_1 \theta_1}{\alpha_0}$ dan $\frac{-\alpha_0 \alpha_2 + q \beta_2 \theta_2}{\alpha_0}$ bergantung pada nilai parameter. Untuk matriks $J_{(E_2)}$ diperoleh dua nilai eigen yang negatif dan empat lainnya bergantung pada nilai parameter. Untuk matriks $J_{(E_3)}, J_{(E_4)}, J_{(E_5)}$ dan $J_{(E_6)}$ masing-masing diperoleh satu nilai eigen yang negatif dan lima lainnya bergantung pada nilai parameter.

Berdasarkan hasil analisis tersebut, sifat kestabilan dari masing-masing titik tetap belum dapat dikatakan stabil atau tidak. Sifat kestabilan titik tetap dari model akan ditentukan dengan melakukan simulasi numerik pada bagian selanjutnya.

3.3 Simulasi Numerik

Untuk mengetahui sifat kestabilan dari masing-masing titik tetap dilakukan perhitungan numerik dengan memilih nilai parameter dalam sistem (2.1). Nilai parameter yang digunakan dalam simulasi ini bersumber dari [6], [5] dan [8].

$$\begin{aligned} q &= 0.5 \text{ mg l}^{-1} \text{ hari}^{-1}, q_c = 0.3 \text{ mg l}^{-1} \text{ hari}^{-1}, \alpha_0 = 0.005 \text{ hari}^{-1}, \\ \alpha_1 &= 0.025 \text{ hari}^{-1}, \alpha_2 = 0.02 \text{ hari}^{-1}, \alpha_3 = 0.5 \text{ hari}^{-1}, \alpha_4 = 0.01 \text{ hari}^{-1}, \\ \beta_1 &= 0.4 \text{ lmg}^{-1} \text{ hari}^{-1}, \beta_2 = 0.6 \text{ lmg}^{-1} \text{ hari}^{-1}, \beta_3 = 1 \text{ lmg}^{-1} \text{ hari}^{-1}, \\ \beta_{10} &= 0.002 \text{ lmg}^{-1} \text{ hari}^{-1}, \beta_{20} = 0.004 \text{ lmg}^{-1} \text{ hari}^{-1}, \beta_{30} = 2 \text{ lmg}^{-1} \text{ hari}^{-1}, \end{aligned}$$

$$\lambda_{11} = 0.02 \text{ hari}^{-1}, \lambda_{22} = 0.02 \text{ hari}^{-1}, \delta = 0.04 \text{ hari}^{-1}, \delta_1 = 0.06 \text{ hari}^{-1}, \\ \pi_0 = 0.02, \pi_1 = 0.9, \pi_2 = 0.9, \pi_3 = 0.9, \theta_1 = 0.9, \theta_2 = 0.9, \theta_3 = 1$$

Nilai dari masing-masing titik tetap dapat diperoleh dengan menggunakan nilai parameter di atas sehingga diperoleh:

$$E_1 = (100, 0, 0, 0, 0, 30)$$

$$E_2 = (0.0994, 0, 8.4234, 0, 3.7905, 24.1036)$$

$$E_3 = (0.1253, 10.0539, 0, 0, 5.6553, 16.1759)$$

$$E_4 = (1.0422, 1.1956, 0, 0.3478, 4.5855, 4.8784)$$

$$E_5 = (0.0892, 3.5553, 7.0415, 0, 5.1685, 20.1825)$$

$$E_6 = (0.0979, 0.5184, 8.2149, 0.0092, 4.0918, 22.9156).$$

Pelinearan dan perhitungan terhadap sistem (2.1) memperoleh matriks Jacobian dan nilai eigen untuk masing-masing titik tetap. Selanjutnya dapat disimpulkan bahwa satu dari enam titik tetap tersebut yaitu E_6 memiliki sifat stabil karena semua nilai eigennya bernilai negatif sedangkan lima titik tetap lainnya tidak stabil karena terdapat satu atau dua nilai eigennya yang positif.

Pengaruh laju masuknya nutrisi (q) di badan air terhadap variabel A, M, S dan C disajikan pada Gambar 2-6. Parameter yang digunakan sama seperti sebelumnya kecuali nilai q yang dibuat bervariasi. Gambar 2, 3, 4, 5, dan 6 menunjukkan bahwa jika laju masuknya nutrisi meningkat maka populasi *alga*, *makrofita*, *zooplankton* dan kepadatan *detritus* juga meningkat sedangkan konsentrasi oksigen terlarut menurun. Selain itu, dapat kita lihat juga bahwa jika laju masuknya nutrisi di badan air adalah nol yaitu $q = 0$ maka populasi *alga*, *makrofita*, *zooplankton* dan kepadatan *detritus* cenderung nol setelah periode waktu yang singkat sedangkan konsentrasi oksigen terlarut cenderung menuju nilai maksimum.

Gambar 2 Populasi *alga* terhadap t dengan nilai q berbeda

Gambar 3 Populasi *makrofita* terhadap t dengan nilai q berbeda

Gambar 4 Populasi *zooplankton* terhadap t dengan nilai q berbeda

Gambar 5 Kepadatan *detritus* terhadap t dengan nilai q berbeda

Gambar 7 menunjukkan bahwa jika laju pengubahan *detritus* menjadi *nutrient* meningkat maka konsentrasi oksigen terlarut menurun. Pada awalnya konsentrasi oksigen terlarut tidak terlalu berbeda untuk setiap nilai π_0 . Ketika $t > 300$ penurunan konsentrasi oksigen terlarut sudah terlihat jelas dimana untuk $\pi_0 = 0.02, 0.5$ dan 0.8 konsentrasi oksigen terlarut masing-masing mendekati nilai 23.151, 22.329 dan 21.872. Hal ini sesuai fakta bahwa dengan banyaknya *detritus* yang terbentuk di dalam badan air maka akan semakin banyak pula oksigen terlarut yang terpakai dalam proses biokimia untuk mengubah *detritus* menjadi *nutrien*, sehingga hal ini menyebabkan turunnya konsentrasi oksigen terlarut ketika laju pengubahan *detritus* meningkat.

Gambar 6 Perubahan konsentrasi oksigen terlarut terhadap t dengan nilai q berbeda

Gambar 7 Perubahan konsentrasi oksigen terlarut terhadap t dengan nilai π_0

4 SIMPULAN

Secara umum model yang dihasilkan dapat menunjukkan perilaku perubahan kandungan oksigen terlarut dalam badan air yang mengalami eutrofikasi. Perubahan nilai oksigen terlarut ini disebabkan oleh banyak faktor diantaranya adanya *nutrient*, *alga*, *makrofita*, *zooplankton* dan *detritus*. Rincian hasil-hasil utama dalam jurnal ini disimpulkan pada uraian berikut:

1. Hasil analisis model memperoleh enam titik tetap.
2. Simulasi numerik menunjukkan bahwa dari enam titik tetap, satu diantaranya stabil dan lima lainnya tidak stabil.
3. Simulasi juga menunjukkan bahwa jika laju masuknya nutrisi ke dalam badan air mengalami kenaikan maka populasi *alga*, *makrofita*, *zooplankton* dan *detritus* juga meningkat sedangkan konsentrasi oksigen terlarut menurun.
4. Laju pengubahan *detritus* menjadi *nutrien* juga mempunyai pengaruh terhadap konsentrasi oksigen terlarut dimana jika laju pengubahan *detritus* menjadi nutrisi meningkat, maka konsentrasi oksigen terlarut di badan air menurun.
5. Simulasi menunjukkan bahwa jika laju masuknya nutrisidi badan air adalah nol maka populasi *alga*, *makrofita*, *zooplankton* dan kepadatan *detritus* juga cenderung menuju nol setelah periode waktu yang singkat sedangkan konsentrasi oksigen terlarut cenderung menuju nilai maksimum.
6. Dengan adanya hasil tersebut, kita dapat mengatakan bahwa agar oksigen terlarut tersedia dalam jumlah yang cukup dalam badan air maka beberapa mekanisme kontrol harus diterapkan. Misalnya dengan mengurangi beban masukan nutrisi ke dalam badan air, melakukan proses reaerasi dan lain sebagainya.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] [OECD] Organization for Economic Cooperation and Development. 1982. *Eutrophication of Waters*. OECD Publication Office. Paris.
- [2] Kristanto P. 2004. *Ecological Industry*. Surabaya: Andi Publisher.
- [3] Soeprbowati, Retnaningsih T, Hadisusanto, Suwarno. 2012. *Swamp Lakes Water Quality Dizziness from time to time*. Semarang: Diponegoro University and the University of Gajah Mada.
- [4] Voinov A, Tonkikh AP. 1987. Qualitative model of eutrophication in macrophyte lakes, *Ecology Model*. 35: 211–226.
- [5] Misra AK. 2007. Mathematical Modeling and Analysis of Eutrophication of Water Bodies Caused by Nutrients, *Nonlinear Anal. Model. Control*. 12(4): 511–524.
- [6] Misra AK. 2010. Modeling the depletion of dissolved oxygen in a lake due to submerged macrophytes. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*. 15(2): 185-198.
- [7] Tu PNV. 1994. *Dinamical System: An Introduction with Applications in Economics and Biology*. New York: Springer-Verlag.
- [8] Amemiya T, Enomoto T, Rossberg, Yamamoto T, Inamori Y, Itoh K. 2007. Stability and dynamical behavior in a lake-model and implications for regime shifts in real lakes, *Ecology Model*. 206: 54–62.