

[white paper]

Diamond Open Access

[awaiting peer review]

O teorema da não-clonagem sob uma perspectiva pedagógica

Colaboração Quântica Aberta¹

23 de Setembro de 2022

Resumo

Apresentamos uma transposição didática do teorema da não-clonagem para estudantes do ensino médio utilizando polinômios.

palavras-chave: teorema da não-clonagem, transposição didática, informação quântica

A versão mais atualizada deste artigo está disponível em
<https://osf.io/gsp9r/download>
<https://zenodo.org/record/7105123>

Introdução

1. Neste artigo, aplicamos a ideia da transposição didática realizada para o *teleporte* em [1] no teorema da não-clonagem [2].

Notação

2. O símbolo $:=$ significa que o que está à esquerda é definido pelo que está à direita.

¹Todos os autores com suas afiliações aparecem no final deste artigo.

Diretrizes para o professor

3. *Disponibilize este artigo para os estudantes e explique os conteúdos até o item (58).*
4. *Auxilie os alunos no preenchimento das lacunas presentes no texto, sem fornecer a resposta/resolução; a ideia é fazer o estudante resolver e concluir por si mesmo.*
5. *Anote todas as dúvidas que surgirem durante a aplicação deste algoritmo de resolução, ao longo de todo o processo, desde o início da explicação dos conteúdos.*
6. *Para facilitar, o professor pode contar com o auxílio de um(a) monitor(a) para realizar o item (5).*

Noções preliminares sobre mecânica quântica

7. A mecânica quântica é uma teoria que descreve sistemas físicos em escalas muito, muito pequenas, da ordem de 10^{-10} m.
8. Nessa escala, ocorre um fenômeno conhecido como **superposição quântica** que significa, grosso modo, *um mesmo objeto ocupar dois ou mais estados ao mesmo tempo*.
9. Por meio da superposição quântica, é possível obter propriedades e resultados bem robustos como, por exemplo, o emaranhamento quântico [3–8], o teleporte [1] e algoritmos de computação quântica [2].

Bit quântico

10. Considere as seguintes definições.
11. `qubit` := bit quântico

- 12. $X :=$ estado de um qubit
- 13. $x :=$ estado 1 do objeto quântico
- 14. $y :=$ estado 2 do objeto quântico
- 15. $a, b :=$ amplitudes (pré-fatores) que multiplicam os estados
- 16. $a, b \in \mathbb{C}$
- 17. Um bit quântico é dado por

$$X = ax + by$$

sendo $a, b \neq 0$.

O processo de fotocópia

- 18. Para tirar a fotocópia de um documento, precisamos, essencialmente, de três itens: o documento original, uma página em branco e a máquina de fotocópia.

Não comutatividade

- 19. O propósito desta seção é trazer uma observação importante acerca da ordem do produto entre estados de um sistema quântico.
- 20. Comutar significa trocar a ordem.
- 21. A multiplicação entre números naturais, por exemplo, comuta, isto é,

$$2 \cdot 3 = 3 \cdot 2.$$

- 22. No sistema quântico que estamos trabalhando neste texto, isso já não mais é verdade; assim,

$$Xx \neq xX, \quad xy \neq yx.$$

Igualdade de polinômios

23. Considere que

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 3x^2 - 5x + 1.$$

24. Analisando cada um dos pré-fatores em ambos os lados da igualdade em (23), temos que

(i) $a = 0$,

(ii) $b = 3$,

(iii) $c = -5$,

(iii) $d = 1$.

Operador clonagem

25. Seja \mathbf{C} o **operador clonagem** tal que

$$\mathbf{C}(Xx) = XX,$$

isto é, \mathbf{C} operando em Xx resulta em XX .

26. Note que x é o análogo do papel em branco e X é o análogo do documento original.

27. Assim, Xx representa o sistema “documento original (X) e página em branco” (x).

28. \mathbf{C} é o análogo da máquina de fotocópia.

29. A equação em (25) clona x em X .

PARA O ESTUDANTE

30. Complete os itens em branco a seguir com o auxílio de um professor.

Algoritmo de Resolução: copiando um bit quântico arbitrário

31. Nosso ponto de partida é a equação

$$\mathcal{C}(Xx) = XX.$$

32. A seguir, iremos trabalhar primeiro com o lado esquerdo da equação em (31) e, em seguida, com o lado direito de (31).

33. Tomando o lado esquerdo da equação, substituindo $X = ax + by$ em (31), temos

$$\mathcal{C}(Xx) = \mathcal{C}[(ax + by)(x)].$$

34. Fazendo a distributiva no argumento de \mathcal{C} ,

$$\mathcal{C}(Xx) = \mathcal{C}(\quad).$$

35. Removendo o sinal positivo do argumento de \mathcal{C} ,

$$\mathcal{C}(Xx) = \mathcal{C}(\quad) + \mathcal{C}(\quad).$$

36. Como a e b são números e \mathcal{C} opera somente nos estados quânticos, podemos fazer

$$\mathcal{C}(axx) + \mathcal{C}(byx) = a\mathcal{C}(xx) + b\mathcal{C}(yx),$$

isto é, \mathcal{C} não opera nem em a , nem em b .

37. Assim, temos

$$\mathcal{C}(Xx) = _ \mathcal{C}(\quad) + b\mathcal{C}(\quad).$$

38. A lógica do operador \mathcal{C} é clonar o primeiro termo que aparece nos parêntesis, independente do segundo termo,

$$\mathcal{C}(Xx) = XX.$$

39. Assim,

$$\mathbb{C}(xx) = \quad .$$

40. E

$$\mathbb{C}(yx) = \quad .$$

41. Substituindo (39) e (40) em (37), temos

$$\mathbb{C}(Xx) = \quad .$$

42. Em (31), temos que

$$\mathbb{C}(Xx) = XX.$$

43. De (41) e (42),

$$a_{___} + b_{___} = XX.$$

44. Substituindo $X = ax + by$ em (43),

$$+ \quad = (\quad)(\quad)$$

45. Fazendo a distributiva do lado direito da igualdade em (44),

$$a_{___} + b_{___} = \quad + \quad + \quad + \quad .$$

46. Como a e b são números complexos, além deles comutarem, podemos colocá-los (como pré-fatores) à esquerda de seus respectivos estados quânticos.

47. Assim,

$$axx + byy = a^2_{___} + ab_{___} + ab_{___} + b^2_{___}.$$

48. Estados quânticos iguais podem ser agrupados, então (lembrando que x e y representam estados diferentes), temos

$$ax^2 + by^2 = a^2x^2 + \quad + \quad + \quad .$$

49. Podemos reescrever o lado esquerdo da equação (48) como

$$ax^2 + by^2 = ax^2 + _xy + _yx + by^2.$$

50. Igualando com o lado direito de (48),

$$ax^2 + _xy + _yx + by^2 = a^2 _^2 + ab _ _ + ab _ _ + b^2 _^2.$$

51. Então, comparando o termo xy nos dois lados da igualdade dessa equação, vemos que ela só é válida para $a = _$ ou $b = _$.

52. Chegamos em uma contradição, pois de acordo com (17), $a \neq 0$ e $b \neq 0$.

53. A contradição significa que partimos de uma premissa errada.

54. A hipótese que está errada é a equação em (31), dada por $\mathcal{C}(Xx) = XX$.

55. Assim, podemos concluir que

$$ax^2 + by^2 _ a^2x^2 + abxy + abyx + b^2y^2.$$

56. Se a equação (48) fosse válida, então teríamos *clonado com sucesso o estado quântico X* .

57. Portanto, o símbolo $_$ da equação (55) nos diz que é **impossível clonar um estado quântico arbitrário X** .

Considerações Finais

58. Apresentamos tanto a resolução completa como um algoritmo de resolução a ser aplicado a estudantes do ensino médio da demonstração do teorema da não-clonagem.

Arquivos Suplementares

O **arquivo latex** para este artigo, juntamente com outros *arquivos suplementares*, estão disponíveis em [9, 10]. Seja coautor(a) deste artigo, envie sua contribuição para `mplobo@uft.edu.br`.

Consentimento

Os autores concordam com [11].

Como citar este artigo?

<https://doi.org/10.31219/osf.io/gsp9r>

<https://zenodo.org/record/7105123>

Licença

CC-By Attribution 4.0 International [12]

Referências

- [1] Lobo, Matheus P., Gomes, Sue L.R.P., Alencar, E.A., Santos, C.M.F. “Teleporte de uma partícula: Um protocolo no contexto do Ensino Médio.” *Física na Escola* 16, 2018. <https://bit.ly/3LmuuZe>
- [2] Sutor, Robert S. *Dancing with Qubits: How quantum computing works and how it can change the world*. Packt Publishing Ltd, 2019.
- [3] Musser, George. *Spooky Action at a Distance: The Phenomenon that Reimagines Space and Time—and what it Means for Black Holes, the Big Bang, and Theories of Everything*. Macmillan, 2015.

- [4] Lobo, Matheus P. “Prova Da Inseparabilidade Do Emaranhamento Máximo: Um Algoritmo De Resolução.” *OSF Preprints*, 27 Sept. 2021. <https://doi.org/10.31219/osf.io/vcx8b>
- [5] Lobo, Matheus P. “Proof of the Inseparability of Maximal Entanglement.” *OSF Preprints*, 20 July 2019. <https://doi.org/10.31219/osf.io/aejm3>
- [6] Lobo, Matheus P. “Spacetime Is Entangled in a Bell State.” *OSF Preprints*, 27 Nov. 2019. <https://doi.org/10.31219/osf.io/xc4ys>
- [7] Lobo, Matheus P. “Entanglement of Superposition and Superposition of Entanglement.” *OSF Preprints*, 13 July 2020. <https://doi.org/10.31219/osf.io/zjdrm>
- [8] Lobo, Matheus P. “Quantum Superposition as Entanglement.” *OSF Preprints*, 25 Dec. 2019. <https://doi.org/10.31219/osf.io/m2ajq>
- [9] Lobo, Matheus P. “Open Journal of Mathematics and Physics (OJMP).” *OSF*, 21 Apr. 2020. <https://doi.org/10.17605/osf.io/6hzyp>
- [10] <https://zenodo.org/record/7105123>
- [11] Lobo, Matheus P. “Simple Guidelines for Authors: Open Journal of Mathematics and Physics.” *OSF Preprints*, 15 Nov. 2019. <https://doi.org/10.31219/osf.io/fk836>
- [12] CC. Creative Commons. *Attribution 4.0 International* (CC BY 4.0) <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0>

Colaboração Quântica Aberta

Matheus Pereira Lobo¹ (autor principal, mplobo@uft.edu.br)
<https://orcid.org/0000-0003-4554-1372>

Ayla Pinheiro dos Reis de Souza^{1,2,3}

¹Universidade Federal do Norte do Tocantins (Brasil)

²Centro de Ensino Vera Lúcia dos Santos Carvalho (MA, Brasil)

³Unidade Integrada São Raimundo Nonato (MA, Brasil)

RESOLUÇÃO COMPLETA

(para o professor)

Copiando um bit quântico arbitrário

59. Nosso ponto de partida é a equação

$$\mathbb{C}(Xx) = XX.$$

60. A seguir, iremos trabalhar primeiro com o lado esquerdo da equação em (59) e, em seguida, com o lado direito de (59).

61. Tomando o lado esquerdo da equação, substituindo $X = ax + by$ em (59), temos

$$\mathbb{C}(Xx) = \mathbb{C}[(ax + by)(x)].$$

62. Fazendo a distributiva no argumento de \mathbb{C} ,

$$\mathbb{C}(Xx) = \mathbb{C}(axx + byx).$$

63. Removendo o sinal positivo do argumento de \mathbb{C} ,

$$\mathbb{C}(Xx) = \mathbb{C}(axx) + \mathbb{C}(byx).$$

64. Como a e b são números e \mathbb{C} opera somente nos estados quânticos, podemos fazer

$$\mathbb{C}(axx) + \mathbb{C}(byx) = a\mathbb{C}(xx) + b\mathbb{C}(yx),$$

isto é, \mathbb{C} não opera nem em a , nem em b .

65. Assim, temos

$$\mathbb{C}(Xx) = a\mathbb{C}(xx) + b\mathbb{C}(yx).$$

66. A lógica do operador \mathbb{C} é clonar o primeiro termo que aparece nos parêntesis, independente do segundo termo,

$$\mathbb{C}(Xx) = XX.$$

67. Assim,

$$\mathcal{C}(xx) = xx.$$

68. E

$$\mathcal{C}(yx) = yy.$$

69. Substituindo (67) e (68) em (65), temos

$$\mathcal{C}(Xx) = axx + byy.$$

70. Em (59), temos que

$$\mathcal{C}(Xx) = XX.$$

71. De (69) e (70),

$$axx + byy = XX.$$

72. Substituindo $X = ax + by$ em (71),

$$axx + byy = (ax + by)(ax + by)$$

73. Fazendo a distributiva,

$$axx + byy = axax + axby + byax + byby.$$

74. Como a e b são números complexos, além deles comutarem, podemos colocá-los (como pré-fatores) à esquerda de seus respectivos estados quânticos.

75. Assim,

$$axx + byy = a^2xx + abxy + abyx + b^2yy.$$

76. Estados quânticos iguais podem ser agrupados, então (lembrando que x e y representam estados diferentes), temos

$$ax^2 + by^2 = a^2x^2 + abxy + abyx + b^2y^2.$$

77. Podemos reescrever o lado esquerdo da equação (76) como

$$ax^2 + by^2 = ax^2 + 0xy + 0yx + by^2.$$

78. Igualando com o lado direito de (76),

$$ax^2 + 0xy + 0yx + by^2 = a^2x^2 + abxy + abyx + b^2y^2.$$

79. Então, comparando o termo xy nos dois lados da igualdade dessa equação, vemos que ela só é válida para $a = 0$ ou $b = 0$.

80. Chegamos em uma contradição, pois de acordo com (17), $a \neq 0$ e $b \neq 0$.

81. A contradição significa que partimos de uma premissa errada.

82. A hipótese que está errada é a equação em (31), dada por $\mathcal{C}(Xx) = XX$.

83. Assim, podemos concluir que

$$ax^2 + by^2 \neq a^2x^2 + abxy + abyx + b^2y^2.$$

84. Se a equação (76) fosse válida, então teríamos *clonado com sucesso o estado quântico X* .

85. Portanto, o símbolo \neq da equação (83) nos diz que é **impossível clonar um estado quântico arbitrário X** .