Model Epidemik Penyebaran Malaria

Resmawan

Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas negeri Gorontalo

ABSTRAK

Dalam artikel ini dibahas model matematika penyebaran malaria tipe *SEIRS – SEI*. Modifikasi model dilakukan dengan pemberian perlakuan pada manusia, berupa vaksinasi dan pengobatan. Dalam model ini, populasi manusia dibagi menjadi empat kelas, yaitu rentan, terpapar, terinfeksi, dan pulih. Adapun populasi nyamuk dibagi menjadi tiga kelas, yaitu rentan, terpapar dan terinfeksi. Selanjutnya dilakukan analisis pada model untuk menunjukkan pengaruh perlakuan yang diberikan terhadap penularan penyakit. Pada bagian akhir dalam artikel ini diberikan simulasi numerik untuk menunjukkan efektifitas vaksinasi dan pengobatan pada manusia untuk menekan laju penularan penyakit. Hasil simulasi menunjukkan bahwa peningkatan efektifitas vaksinasi maupun pengobatan pada manusia mampu menurunkan angka bilangan reproduksi, sehingga dalam jangka waktu tertentu penyakit akan menghilang dari populasi.

Kata kunci: Model Epidemik, Malaria, *SEIRS-SEI*, Vaksinasi, Pengobatan.

ABSTRACT

This article discusses the mathematical model of SEIRS-SEI type malaria spread. Modification of the model is done by giving the treatment in humans, in the form of vaccination and medication treatment. In this model, the human population is divided into four classes, namely susceptible, exposed, infected, and recovered. The mosquito population is divided into three classes, namely susceptible, exposed and infected. Furthermore, the analysis of the model to show the effect of treatment given to disease transmission. At the end of this article is provided numerical simulations to show the effectiveness of vaccination and treatment in humans to suppress the rate of transmission of disease. The simulation results show that the increase of vaccination effectiveness and medication treatment in humans can reduce the reproduction numbers, so that within a certain time the disease will disappear from the population.

Keywords: Epidemic Model, Malaria, Medication, *SEIRS-SEI*, Vaccination.

1. Pendahuluan

Malaria merupakan penyakit yang disebabkan oleh infeksi parasit dari Nyamuk Anopheles betina genus Plasmodium. Malaria dapat ditularkan melalui gigitan nyamuk yang terinfeksi, transfusi darah, pemakaian jarum suntik, maupun bawaan. Malaria tergolong penyakit yang sangat mematikan bagi manusia. Oleh karena itu, diperlukan perlakuan pencegahan untuk mengendalikannya baik tingkat infeksi maupun tingkat penyebaran penyakit ini. Berdasarkan beberapa kasus malaria yang telah terjadi, muncul berbagai penelitian yang mengontruksikan sebuah model matematika untuk malaria. Pemodelan matematika dapat membantu memahami dan mengidentifikasi hubungan penyebaran penyakit malaria dengan berbagai parameter epidemiologi, membantu dalam perencanaan masa depan dan mempertimbangkan langkah-langkah pengendalian yang tepat.

Beberapa penelitian sebelumnya yang membahas model penyebaran malaria dapat dilihat pada [1][2]. Modifikasi model dilakukan dengan penambahan kelas terpapar (*exposed*) pada kedua populasi dengan mengacu pada [3]. Hal ini diperlukan karena sporozoid yang dihasilkan dari gigitan nyamuk terinfeksi memerlukan masa inkubasi selama 9-14 hari untuk benar-benar menimbulkan penyakit [4]. Selama masa inkubasi ini, populasi dikelompokkan ke dalam kelas terpapar (*exposed*), sehingga model ini disebut *SEIRS-SEI*. Modifikasi model juga dilakukan dengan penambahan parameter perlakuan berupa vaksinasi pada manusia. Vaksinasi yang diberikan dapat membuat manusia rentan yang telah tergigit dapat langsung berpindah ke manusia pulih. Dalam hal ini diasumsikan bahwa manusia pada kelas rentan (S_h) dapat berpindah ke kelas pulih (R_h) karena adanya vaksinasi dengan laju θ [5]. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengonstruksi model matematika penularan penyakit malaria dengan memperhatikan faktor perlakuan berupa vaksinasi dan pengobatan pada manusia.. Selanjutnya akan dilakukan analisis model dan simulasi dengan komputasi numerik untuk melihat efektifitas vaksinasi dan pengobatan pada manusia untuk menekan laju penularan penyakit.

2. Model Matematika

Secara skematis, pola penyebaran penyakit malaria pada model ini digambarkan dalam diagram kompartemen pada Gambar 1, dengan persamaan dinamika sistem sebagai berikut

Gambar 1. Diagram kompartemen penyakit malaria tipe *SEIRS-SEI* dengan vaksinasi dan pengobatan

Dengan demikian, persamaan dinamika sistem tersebut diformulasikan sebagai berikut :

$$\begin{cases} \frac{dS_h}{dt} = \lambda_h + \omega R_h - a\beta_1 I_m S_h - (\theta + \mu_h) S_h \\ \frac{dE_h}{dt} = a\beta_1 I_m S_h - (v_h + \mu_h) E_h \\ \frac{dI_h}{dt} = v_h E_h + \gamma I_h - (\mu_h + \alpha + k\psi) I_h \\ \frac{dR_h}{dt} = k\psi I_h - (\mu_h + \omega) R_h + \theta S_h \\ \frac{dS_m}{dt} = \lambda_m - (b\beta_2 I_h + \mu_m + \delta) S_m \\ \frac{dE_m}{dt} = b\beta_2 I_h S_m - (v_m + \mu_m + \delta) E_m \\ \frac{dI_m}{dt} = v_m E_m - (\mu_m + \delta) I_m \end{cases} \quad (1)$$

Variabel dan parameter yang digunakan disajikan pada Tabel 1 dan Tabel 2.

Tabel 1. Variabel pada model malaria tipe *SEIRS-SEI* dengan vaksinasi dan pengobatan

Variabel	Keterangan
$S_h(t)$	Banyaknya manusia yang rentan terkena penyakit malaria pada waktu t
$E_h(t)$	Banyaknya manusia yang terpapar penyakit malaria pada waktu t
$I_h(t)$	Banyaknya manusia yang terinfeksi penyakit malaria pada waktu t
$R_h(t)$	Banyaknya manusia yang sembuh dari penyakit malaria pada waktu t
$S_m(t)$	Banyaknya nyamuk yang rentan terkena penyakit malaria pada waktu t
$E_m(t)$	Banyaknya nyamuk yang terpapar penyakit malaria pada waktu t
$I_m(t)$	Banyaknya nyamuk yang terinfeksi penyakit malaria pada waktu t

Tabel 2. Parameter pada model malaria tipe *SEIRS-SEI* dengan vaksinasi dan pengobatan

Parameter	Keterangan	Satuan
λ_h	Laju kelahiran dan migrasi manusia	orang $\times$ waktu ⁻¹
λ_m	Laju kelahiran dan migrasi nyamuk	nyamuk $\times$ waktu ⁻¹
μ_h	Laju konstan kematian manusia secara alami	waktu ⁻¹

μ_m	Laju konstan kematian nyamuk secara alami	waktu ⁻¹
a	Rata-rata banyaknya gigitan nyamuk terinfeksi pada manusia rentan tiap satuan waktu	nyamuk ⁻¹ × waktu ⁻¹
b	Rata-rata banyaknya gigitan nyamuk rentan pada manusia terinfeksi tiap satuan waktu	orang ⁻¹ × waktu ⁻¹
β_1	Peluang terjadinya transmisi penyakit dari nyamuk terinfeksi ke manusia rentan	tanpa satuan
β_2	Peluang terjadinya transmisi penyakit dari manusia terinfeksi ke nyamuk rentan	tanpa satuan
δ	Efektivitas penyemprotan pada nyamuk	waktu ⁻¹
ω	Laju konstan hilangnya kekebalan tubuh pada manusia setelah pulih	waktu ⁻¹
θ	Efektivitas vaksinasi pada manusia	waktu ⁻¹
γ	Laju bayi yang lahir dari ibu yang terinfeksi Malaria	waktu ⁻¹
ψ	Efektivitas pengobatan pada manusia	tanpa satuan
α	Laju kematian manusia akibat malaria	waktu ⁻¹
k	Laju pemulihan manusia	waktu ⁻¹
v_h	Laju perpindahan manusia terpapar ke manusia terinfeksi.	waktu ⁻¹
v_m	Laju perpindahan nyamuk terpapar ke nyamuk terinfeksi.	waktu ⁻¹

3. Analisis Model

3.1 Titik Tetap

Titik tetap diperoleh dengan menyelesaikan sistem (1), yaitu kondisi yang diperoleh pada saat $\frac{dS_h}{dt} = \frac{dE_h}{dt} = \frac{dI_h}{dt} = \frac{dR_h}{dt} = \frac{dS_m}{dt} = \frac{dE_m}{dt} = \frac{dI_m}{dt} = 0$. Dari persamaan (1), diperoleh titik tetap bebas penyakit (*disease-free equilibrium*),

$$\mathbf{x}_{dfe}(S_h, E_h, I_h, R_h, S_m, E_m, I_m) = (S_h^*, 0, 0, R_h^*, S_m^*, 0, 0) \quad (2)$$

dengan

$$S_h^* = \frac{\lambda_h(\omega + \mu_h)}{\mu_h(\mu_h + \omega + \theta)}, \quad R_h^* = \frac{\theta\lambda_h}{\mu_h(\mu_h + \omega + \theta)}, \quad S_m^* = \frac{\lambda_m}{\delta + \mu_m} \quad (3)$$

dan titik tetap endemik

$$\mathbf{x}_{ee}(S_h, E_h, I_h, R_h, S_m, E_m, I_m) = (S_h^{**}, E_h^{**}, I_h^{**}, R_h^*, S_m^{**}, E_m^{**}, I_m^{**}) \quad (5.3)$$

dengan

$$\begin{aligned} S_h^{**} &= \frac{\lambda_h + \omega R_h}{a\beta_1 I_m + \theta + \mu_h} & S_m^{**} &= \frac{\lambda_m}{b\beta_2 I_h + \delta + \mu_m} \\ E_h^{**} &= \frac{a\beta_1 I_m S_h}{v_h + \mu_h} & E_m^{**} &= \frac{b\beta_2 I_h S_m}{v_m + \delta + \mu_m} \\ I_h^{**} &= \frac{v_h E_h}{\alpha - \gamma + \mu_h + k\psi} & I_m^{**} &= \frac{v_m E_m}{\delta + \mu_m} \\ R_h^{**} &= \frac{\theta S_h + k\psi I_h}{\omega + \mu_h} \end{aligned}$$

3.2 Bilangan Reproduksi

Bilangan reproduksi yang dinotasikan dengan $\mathcal{R}_0$ adalah nilai harapan banyaknya infeksi tiap satuan waktu. Infeksi ini terjadi pada suatu populasi rentan yang dihasilkan oleh satu individu terinfeksi. Bilangan reproduksi dasar ditentukan dengan mengacu pada [6], contoh lain dapat ditemukan pada [7]. Berdasarkan sistem persamaan (1), diperoleh bilangan reproduksi

$$\mathcal{R}_0 = \sqrt{K_1 K_2} \quad (15)$$

dimana

$$K_1 = \frac{b\beta_2\lambda_m}{(\delta + \mu_m)(\mu_h + \alpha + k\psi - \gamma)} \text{ dan } K_2 = \frac{a\beta_1\lambda_h(\omega + \mu_h)}{\mu_h(\mu_h + \omega + \theta)(\mu_m + \delta)} \quad (10)$$

Persamaan (15) merupakan nilai ambang batas epidemik yang akan menjadi tolak ukur tingkat penyebaran malaria dalam populasi. Kondisi yang memungkinkan dari bilangan reproduksi menurut van den Driessche & Watmough [8] adalah:

1. Jika $\mathcal{R}_0 < 1$, maka jumlah individu yang terinfeksi akan menurun pada setiap generasi, sehingga penyakit akan menghilang.
2. Jika $\mathcal{R}_0 > 1$, maka jumlah individu yang terinfeksi akan meningkat pada setiap generasi, sehingga penyakit akan meningkat dan mewabah.

3.3 Analisis Kestabilan

Pada bagian ini, dilakukan analisis untuk melihat sifat kestabilan pada titik tetap tanpa penyakit (x_{dfe}).

3.3.1 Matriks Jacobi untuk Titik Tetap Tanpa Penyakit

Sifat kestabilan titik tetap tanpa penyakit (x_{dfe}), dapat ditemukan dengan melakukan pelinearan pada sistem persamaan diferensial (5.8) di sekitar x_{dfe} , sehingga diperoleh matriks Jacobi untuk titik tetap tanpa penyakit sebagai berikut

$$J_{x_{dfe}} = \begin{pmatrix} J_{11} & 0 & 0 & J_{14} & 0 & 0 & J_{17} \\ 0 & J_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{27} \\ 0 & J_{32} & J_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ J_{41} & 0 & J_{43} & J_{44} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{53} & 0 & J_{55} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{63} & 0 & 0 & J_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{76} & J_{77} \end{pmatrix}$$

dengan

$$\begin{aligned} J_{11} &= -\theta - \mu_h & J_{43} &= k\psi \\ J_{14} &= \omega & J_{44} &= -\mu_h - \omega \\ J_{17} &= \frac{a\beta_1\lambda_h\omega\theta}{(\theta + \mu_h)(\mu_h^2 + \omega\mu_h + \theta\mu_h)} - \frac{a\beta_1\lambda_h}{\theta + \mu_h} & J_{53} &= -\frac{b\beta_2\lambda_m}{\delta + \mu_m} \\ J_{22} &= -v_h - \mu_h & J_{55} &= -\delta - \mu_m \\ J_{27} &= \frac{a\beta_1\lambda_h\omega\theta}{(\theta + \mu_h)(\mu_h^2 + \omega\mu_h + \theta\mu_h)} + \frac{a\beta_1\lambda_h}{\theta + \mu_h} & J_{63} &= \frac{b\beta_2\lambda_m}{\delta + \mu_m} \\ J_{32} &= v_h & J_{66} &= -v_m - \delta - \mu_m \\ J_{33} &= -\alpha + \gamma - \mu_h - k\psi & J_{76} &= v_m \\ J_{41} &= \theta & J_{77} &= -\delta - \mu_m \end{aligned}$$

3.3.2 Nilai Eigen

Titik tetap tanpa penyakit (x_{dfe}) bersifat stabil jika dan hanya jika setiap nilai eigen dari matriks $J_{x_{dfe}}$ bernilai negatif dan tidak stabil jika dan hanya jika ada minimal satu nilai eigen dari matriks $J_{x_{dfe}}$ yang tak negatif.

Berdasarkan matriks $|J_{x_{dfe}} - \xi I|$, diperoleh tujuh nilai eigen. Tiga diantaranya diperoleh dari persamaan karakteristik,

$$(\xi^2 - (J_{11} + J_{44})\xi + (J_{11}J_{44} - J_{14}J_{41}))(\xi - J_{55}) = 0 \quad (5.9)$$

yaitu

$$\begin{aligned} \xi_1 &= J_{55} = -\delta - \mu_m \\ \xi_2 &= \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}\sqrt{a_1^2 - 4a_2} \\ \xi_3 &= \frac{1}{2}a_1 - \frac{1}{2}\sqrt{a_1^2 - 4a_2} \end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned} a_1 &= J_{11} + J_{44} = -\theta - \mu_h + \omega \\ a_2 &= J_{11}J_{44} - J_{14}J_{41} = \mu_h^2 + (\omega + \theta)\mu_h \end{aligned}$$

Sementara empat nilai eigen lainnya adalah akar-akar dari persamaan karakteristik:

$$\xi^4 + A_1\xi^3 + A_2\xi^2 + A_3\xi + A_4 = 0 \quad (5.10)$$

dengan koefisien karakteristik

$$A_1 = -(J_{22} + J_{33} + J_{66} + J_{77})$$

$$A_2 = J_{22}J_{33} + J_{22}J_{66} + J_{22}J_{77} + J_{33}J_{66} + J_{33}J_{77} + J_{66}J_{77}$$

$$A_3 = -(J_{22}J_{33}J_{66} + J_{22}J_{33}J_{77} + J_{22}J_{66}J_{77} + J_{33}J_{66}J_{77})$$

$$A_4 = J_{22}J_{33}J_{66}J_{77} - J_{27}J_{32}J_{63}J_{76}$$

Penentuan nilai eigen dapat dilihat pada Lampiran 4.

Sistem dapat dikatakan stabil jika semua nilai eigen bernilai negatif. Oleh sebab itu:

- a. Untuk nilai eigen ξ_1
 $\xi_1 < 0$, karena semua parameter positif
- b. Untuk Nilai eigen ξ_2
 $\checkmark a_2 > 0$ karena semua parameter bernilai positif
 $\checkmark \xi_2 < 0$ jika $a_1 < 0$ dan $a_1 > \sqrt{a_1^2 - 4a_2}$
 $\checkmark a_1 < 0$ jika $\theta > \omega$ atau $\mu_h > \omega$
- c. Untuk Nilai eigen ξ_3
 $\checkmark \xi_3 < 0$ jika $a_1 < 0$
 $\checkmark a_1 < 0$ jika $\theta > \omega$ atau $\mu_h > \omega$

Selanjutnya, dilakukan evaluasi tanda dari keempat nilai eigen pada persamaan karakteristik (5.10), dengan menggunakan kriteria *Routh-Horwitz*.

Berdasarkan kriteria *Routh-Horwitz*, ξ_1, ξ_2, ξ_3 , dan ξ_4 pada persamaan (5.10) akan bernilai negatif apabila:

1. $A_1 > 0$

Berdasarkan persamaan karakteristik (5.10), diperoleh koefisien

$$A_1 =$$

$$-(J_{22} + J_{33} + J_{66} + J_{77})$$

dimana

$$J_{22} = -v_h - \mu_h \quad J_{33} = -\alpha + \gamma - \mu_h - k\psi;$$

$$J_{66} = -v_m - \delta - \mu_m \quad J_{77} = -\delta - \mu_m$$

Dengan demikian, $A_1 > 0$ karena semua parameter positif.

2. $A_3 > 0$

Berdasarkan persamaan karakteristik (5.10), diperoleh koefisien

$$A_3 =$$

$$-(J_{22}J_{33}J_{66} + J_{22}J_{33}J_{77} + J_{22}J_{66}J_{77} + J_{33}J_{66}J_{77})$$

Dengan asumsi yang sama bahwa semua parameter bernilai positif, menyebabkan koefisien J_{22}, J_{33}, J_{66} , dan J_{77} bernilai negatif. Dengan demikian, $A_3 > 0$.

3. $A_4 > 0$

Berdasarkan persamaan karakteristik (5.10), diperoleh koefisien

$$A_4 = J_{22}J_{33}J_{66}J_{77} - J_{27}J_{32}J_{63}J_{76}$$

Karena semua nilai parameter positif, maka $A_4 > 0$ akan terpenuhi jika

$$J_{22}J_{33}J_{66}J_{77} > J_{27}J_{32}J_{63}J_{76}$$

4. $A_1A_2A_3 - A_1^2A_4 - A_3^2 > 0$

Telah diketahui bahwa $A_1 > 0$ dan $A_3 > 0$ dan $A_4 > 0$. Selanjutnya dengan asumsi yang sama, jelas bahwa $A_2 > 0$ berdasarkan persamaan

$$A_2 = J_{22}J_{33} + J_{22}J_{66} + J_{22}J_{77} + J_{33}J_{66} + J_{33}J_{77} + J_{66}J_{77}$$

Dengan demikian, $A_1A_2A_3 - A_1^2A_4 - A_3^2 > 0$ akan terpenuhi jika

$$A_1A_2A_3 > A_1^2A_4 + A_3^2$$

4. Simulasi Numerik

5.1 Nilai Parameter

Pada bagian simulasi ini, diamati dinamika populasi dalam kondisi ketika $\mathcal{R}_0 < 1$. Dalam hal ini, $\mathcal{R}_0$ merupakan bilangan reproduksi yang didefinisikan pada persamaan (15). Simulasi dilakukan untuk menunjukkan adanya pengaruh *treatment* berupa pengobatan dan vaksinasi pada manusia terhadap dinamika populasi manusia dan populasi nyamuk. Pemilihan parameter didasarkan pada studi yang dilakukan oleh berbagai sumber terpercaya. Beberapa nilai parameter seperti yang

menyangkut populasi, didasarkan pada asumsi tentang situasi penyakit yang paling umum dan disajikan pada Tabel 3.

Tabel 3. Nilai parameter pada model malaria tipe SEIRS-SEI

Parameter	Nilai Parameter	Satuan	Sumber
λ_h	0.027	orang $\times$ hari ⁻¹	[9]
λ_m	0.13	nyamuk $\times$ hari ⁻¹	Asumsi
μ_h	0.004	hari ⁻¹	[9]
μ_m	0.04	hari ⁻¹	[9]
a	4.3	nyamuk ⁻¹ $\times$ hari ⁻¹	[9]
b	0.33	orang ⁻¹ $\times$ hari ⁻¹	[9]
β_1	0.010	tanpa satuan	[10]
β_2	0.072	tanpa satuan	[10]
δ	0.01	tanpa satuan	Asumsi
ω	1/730	hari ⁻¹	[9]
θ	0.1	tanpa satuan	Asumsi
γ	0.005	hari ⁻¹	Asumsi
ψ	0.1	tanpa satuan	Asumsi
α	0.005	hari ⁻¹	[9]
k	0.611	hari ⁻¹	[10]
v_h	0.1	hari ⁻¹	[9]
v_m	0.083	hari ⁻¹	[10]

Simulasi dilakukan dengan menggunakan nilai parameter pada Tabel 3, dengan nilai awal populasi manusia rentan (S_h) adalah 300, populasi manusia terpapar (E_h) adalah 50, populasi manusia terinfeksi (I_h) adalah 10, populasi manusia pulih (R_h) adalah 0, populasi nyamuk rentan (S_m) adalah 2000, populasi nyamuk terpapar (E_m) adalah 100 dan populasi nyamuk terinfeksi (I_m) adalah 50.

5.2 Dinamika Populasi dalam Keadaan Bebas Penyakit

Dengan linearisasi dan perhitungan terhadap sistem (5.1) disekitar titik tetap pada kondisi bebas penyakit atau $\mathcal{R}_0 < 1$, diperoleh matriks jacobian dan nilai eigen untuk titik tetap bebas penyakit. Matriks jacobian dan titik tetap tanpa penyakit diperoleh dari solusi numerik sistem dengan menggunakan *software* berbasis fungsional. Solusi diperoleh dengan menggunakan nilai parameter pada Tabel 5 dengan nilai bilangan reproduksi dasar sebesar $\mathcal{R}_0 = 0.53$. Titik tetap bebas penyakit tersebut adalah

$$x_{dfe} = (0.34, 0, 0, 6.41, 2.60, 0, 0)$$

Untuk melihat kestabilan titik tetap ini, diperlukan matriks jacobin disekitar titik tetap, kemudian mengamati nilai eigen yang diperoleh. Sistem dikatakan stabil di sekitar titik tetap bebas penyakit apabila semua nilai eigen yang diperoleh bertanda negatif. Berdasarkan nilai-nilai parameter pada Tabel 5 dan persamaan (5.1), diperoleh matriks jacobin di sekitar titik tetap, yaitu

$$J_{x_{dfe}} = \begin{pmatrix} -0.104 & 0 & 0 & 1/730 & 0 & 0 & -0.015 \\ 0 & -0.104 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.015 \\ 0 & 0.1 & -0.065 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0.0611 & -0.0054 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.062 & 0 & -0.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.062 & 0 & 0 & -0.13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.083 & -0.05 \end{pmatrix}$$

Dari matriks tersebut, diperoleh nilai eigen sebagai berikut

$$\begin{aligned} \xi_1 &= -0.15 & \xi_5 &= -0.05 \\ \xi_2 &= -0.11 & \xi_6 &= -0.03 \\ \xi_3 &= -0.09 - 0.04i & \xi_7 &= -0.004 \\ \xi_4 &= -0.09 + 0.04i \end{aligned}$$

Hal ini menunjukkan bahwa sistem dalam keadaan stabil di sekitar titik tetap bebas penyakit.

Dinamika populasi dengan beberapa nilai awal yang diberikan dalam kasus ini ditunjukkan pada Gambar 6. Berdasarkan gambar ini, dapat dipastikan bahwa solusi sistem mendekati titik tetap bebas penyakit atau stabil di sekitar titik tetap bebas penyakit pada saat $\mathcal{R}_0 < 1$.

Gambar 6. Dinamika populasi model SEIRS-SEI pada kondisi $\mathcal{R}_0 < 1$

Gambar 6 menampilkan dinamika populasi dari kondisi awal menuju kondisi bebas penyakit. Masing-masing subpopulasi mengalami dinamika atau perubahan dari kondisi awal menuju titik di sekitar titik tetap bebas penyakit. Sub populasi manusia rentan mengalami penurunan karena terpapar oleh subpopulasi nyamuk terinfeksi. Demikian juga dengan subpopulasi nyamuk rentan mengalami penurunan karena terpapar oleh manusia terinfeksi. Kondisi ini menyebabkan adanya peningkatan pada subpopulasi terpapar dan terinfeksi dari kedua spesies. Peningkatan ini terjadi sejak hari pertama hingga disekitar hari ke-13. Setelah melewati hari ke-13 terlihat, subpopulasi terpapar dan terinfeksi dari kedua spesies mengalami penurunan menuju titik bebas penyakit. Hal ini seiring dengan peningkatan subpopulasi manusia yang pulih dari penyakit, sehingga penyakit akan menghilang dari populasi.

5.3 Simulasi Efektifitas Pengobatan pada Manusia

Pada bagian ini, dilakukan simulasi untuk menunjukkan adanya kontribusi pengobatan pada manusia dalam menekan laju penularan penyakit. Dalam hal ini, dilakukan perubahan pada parameter efektifitas pengobatan pada manusia (ψ). Akan ditunjukkan bahwa perubahan nilai pada parameter ψ dapat mengubah nilai bilangan reproduksi ($\mathcal{R}_0$) yang didefinisikan pada persamaan (15). Terdapat tiga nilai ψ yang diamati, diambil pada selang $[0.10, 0.50]$ dengan langkah 0.20. Adapun nilai-nilai parameter lain dapat dilihat pada Tabel 3. Perubahan nilai parameter ψ yang menyebabkan terjadinya perubahan nilai bilangan reproduksi dapat dilihat pada Tabel 4.

Tabel 4 Hasil simulasi efektifitas pengobatan pada manusia terhadap bilangan reproduksi

Parameter ψ	Bilangan reproduksi
$\psi = 0.10$	$\mathcal{R}_0 = 0.53$
$\psi = 0.30$	$\mathcal{R}_0 = 0.31$
$\psi = 0.50$	$\mathcal{R}_0 = 0.24$

Pada populasi manusia yang ditunjukkan pada Gambar 2. Jika efektifitas pengobatan pada manusia ditingkatkan, maka banyaknya manusia terpapar dan terinfeksi mengalami penurunan, sementara manusia yang pulih dari penyakit mengalami peningkatan.

Gambar 2. Dinamika populasi manusia karena adanya pengobatan

Pengobatan yang diberikan pada manusia juga berdampak pada populasi nyamuk, sebagaimana ditunjukkan pada Gambar 3. Jika efektifitas pengobatan pada manusia ditingkatkan, maka populasi nyamuk pada kelas terpapar dan terinfeksi mengalami penurunan. Hal ini menyebabkan jumlah nyamuk pada populasi rentan mengalami peningkatan.

Gambar 3. Dinamika populasi nyamuk karena adanya pengobatan pada manusia

Adanya perubahan jumlah manusia dan nyamuk pada masing-masing kelas subpopulasi cenderung berbeda untuk setiap kenaikan efektifitas pengobatan pada manusia. Maksimum banyaknya manusia dan nyamuk terpapar terjadi pada sekitar hari ke-9, sementara maksimum banyaknya manusia dan nyamuk terinfeksi terjadi pada hari ke-20 dan ke-15. Hal ini sejalan dengan teori bahwa manusia yang terpapar akan mengalami masa inkubasi selama kurang lebih 14 hari kemudian benar-benar terinfeksi. Pada hari ke-20, dengan efektifitas pengobatan pada manusia ditingkatkan sebesar 40% dapat menurunkan populasi manusia terinfeksi sebesar 13,88% dari total populasi manusia dan dengan efektifitas pengobatan yang sama, pada hari ke-15 dapat menurunkan populasi nyamuk terinfeksi sebesar 1.43% dari total populasi nyamuk.

Efektifitas pengobatan dalam menekan laju penularan penyakit ditunjukkan dengan dinamika populasi pada setiap sub kelas populasi. Dengan asumsi awal populasi sebagaimana yang disebutkan pada sub bagian 5.1, terlihat peningkatan efektifitas pengobatan tidak berpengaruh secara signifikan pada populasi rentan. Hal ini disebabkan karena perlakuan pengobatan tidak dilakukan secara langsung pada populasi rentan. Perubahan signifikan terjadi pada populasi manusia terinfeksi dimana peningkatan efektifitas pengobatan mempercepat laju penurunan manusia terinfeksi. Dengan efektifitas pengobatan sebesar 10%, manusia terinfeksi mencapai 60 orang pada hari ke-20 kemudian mengalami penurunan hingga mencapai titik nol setelah melewati hari ke-80. Setelah dilakukan peningkatan efektifitas pengobatan hingga 50%, populasi manusia terinfeksi hanya mencapai 15 orang pada hari ke-10 kemudian mengalami penurunan hingga mencapai titik nol pada hari ke-60. Dinamika ini berlaku sama pada populasi nyamuk dimana peningkatan efektifitas pengobatan pada manusia dapat menurunkan jumlah nyamuk terinfeksi dalam waktu yang lebih cepat. Hal ini menunjukkan bahwa peningkatan efektifitas pengobatan dapat mempercepat hilangnya penyakit dalam populasi.

5.4 Simulasi Efektifitas Vaksinasi pada Manusia

Pada bagian ini, dilakukan simulasi untuk menunjukkan adanya kontribusi vaksinasi pada manusia dalam menekan laju penularan penyakit. Dalam hal ini, dilakukan perubahan pada parameter efektifitas vaksinasi pada manusia (θ). Akan ditunjukkan bahwa perubahan nilai pada parameter θ dapat mengubah nilai bilangan reproduksi ($\mathcal{R}_0$) yang didefinisikan pada persamaan (15). Terdapat tiga nilai θ yang diamati, diambil pada selang $[0.10, 0.50]$ dengan langkah 0.20. Adapun nilai-nilai parameter lain dapat dilihat pada Tabel 3. Perubahan nilai parameter θ yang menyebabkan terjadinya perubahan nilai bilangan reproduksi dapat dilihat pada Tabel 5.

Tabel 5 Hasil simulasi efektifitas vaksinasi pada manusia terhadap bilangan reproduksi

Parameter θ	Bilangan reproduksi
$\theta = 0.10$	$\mathcal{R}_0 = 0.53$
$\theta = 0.30$	$\mathcal{R}_0 = 0.31$
$\theta = 0.50$	$\mathcal{R}_0 = 0.24$

Pada populasi manusia yang ditunjukkan pada Gambar 4, jika efektifitas vaksinasi pada manusia ditingkatkan, maka banyaknya manusia terpapar dan terinfeksi mengalami penurunan, sementara manusia yang pulih dari penyakit mengalami peningkatan. Hal ini disebabkan karena vaksinasi menyebabkan manusia rentan kebal dari penyakit.

Gambar 4. Dinamika populasi manusia karena adanya vaksinasi

Vaksinasi yang diberikan pada manusia juga berdampak pada populasi nyamuk, sebagaimana ditunjukkan pada Gambar 5. Jika efektifitas vaksinasi pada manusia ditingkatkan, maka populasi nyamuk pada kelas terpapar dan terinfeksi mengalami penurunan. Hal ini disebabkan karena vaksinasi menyebabkan manusia terinfeksi berkurang. Dengan demikian, peluang nyamuk terpapar oleh manusia terinfeksi juga berkurang.

Gambar 5. Dinamika populasi nyamuk karena adanya vaksinasi pada manusia

Adanya perubahan jumlah manusia dan nyamuk pada masing-masing kelas subpopulasi cenderung berbeda untuk setiap kenaikan efektifitas vaksinasi pada manusia. Maksimum banyaknya manusia dan nyamuk terpapar terjadi pada sekitar hari ke-10, sementara maksimum banyaknya manusia dan nyamuk terinfeksi terjadi pada hari ke-20. Pada hari ke-20, dengan peningkatan efektifitas vaksinasi pada manusia sebesar 40% dapat menurunkan populasi manusia terinfeksi sebesar 12.50% dari total populasi manusia dan dapat menurunkan populasi nyamuk terinfeksi sebesar 0.47% dari total populasi nyamuk. Hal ini menunjukkan bahwa peningkatan efektifitas vaksinasi dapat mempercepat hilangnya penyakit dalam populasi. Adapun dampak vaksinasi terhadap nyamuk tidak begitu besar karena vaksinasi tidak berdampak langsung pada nyamuk. Vaksinasi hanya menurunkan jumlah manusia terinfeksi sehingga peluang nyamuk terpapar dari manusia terinfeksi menjadi lebih kecil.

Efektifitas vaksinasi dalam menekan laju penularan penyakit ditunjukkan dengan dinamika populasi pada setiap sub kelas populasi. Dengan asumsi awal populasi sebagaimana yang disebutkan pada sub bagian 5.1, terlihat peningkatan efektifitas vaksinasi tidak berpengaruh secara signifikan pada populasi nyamuk. Hal ini disebabkan karena perlakuan vaksinasi tidak berdampak secara langsung pada nyamuk. Perubahan signifikan terjadi pada populasi manusia dimana peningkatan efektifitas vaksinasi mempercepat laju penurunan manusia rentan, terpapar, dan terinfeksi serta mempercepat jumlah populasi manusia sembuh. Dinamika ini terjadi karena manusia yang divaksinasi akan berpindah ke kelas manusia sembuh setelah tergigit oleh nyamuk terinfeksi. Dengan efektifitas vaksinasi sebesar 10%, manusia terinfeksi mencapai 60 orang pada hari ke-20 kemudian mengalami penurunan hingga mencapai titik nol setelah melewati hari ke-80. Setelah dilakukan peningkatan efektifitas vaksinasi hingga 50%, populasi manusia terinfeksi hanya mencapai 15 orang pada hari ke-10 kemudian mengalami penurunan hingga mencapai titik nol, sementara populasi manusia sembuh mengalami peningkatan secara signifikan. Hal ini menunjukkan bahwa peningkatan efektifitas vaksinasi dapat mempercepat hilangnya penyakit dalam populasi.

5. Simpulan

Model penyebaran penyakit malaria tipe *SEIRS-SEI* ini memiliki dua titik tetap yaitu titik tetap bebas penyakit dan titik tetap endemik. Hasil simulasi menunjukkan bahwa sistem dalam keadaan stabil disekitar titik tetap bebas penyakit pada kondisi $\mathcal{R}_0 < 1$. Perlakuan yang diberikan memiliki pengaruh terhadap dinamika populasi manusia dan nyamuk yang ditunjukkan dengan bilangan reproduksi. Secara umum, jika efektivitas perlakuan ditingkatkan maka bilangan reproduksi menurun. Hal tersebut menunjukkan bahwa jumlah individu yang terinfeksi semakin berkurang, sehingga penyakit tidak akan menyebar dan dalam jangka waktu tertentu penyakit akan menghilang dari populasi.

Daftar Pustaka

- [1] R. Resmawan, P. Sianturi, and E. H. Nugrahani, "The Analysis of SEIRS-SEI Epidemic Models on Malaria with Regard to Human Recovery Rate," *Aceh Int. J. Sci. Technol.*, vol. 6, no. 3, pp. 132–140, Mar. 2018, doi: 10.13170/aijst.6.3.9303.
- [2] H. Laarabi, E. H. Labriji, M. Rachik, and A. Kaddar, "Optimal Control of an Epidemic Model with A Saturated Incidence Rate, Modelling and Control," *J. Math. Biol.*, vol. 17, no. 4, pp. 448–459, 2012.
- [3] N. Chitnis, J. M. Chussing, and J. M. Hyman, "Bifurcation Analysis of A Mathematical Model for Malaria Transmission," *Siam J. Appl. Math.*, vol. 67, no. 1, pp. 24–45, 2006.
- [4] P. B. Bloland and H. . Williams, *Malaria Control During Mass Population Movements and Natural Disasters*. Washington: The National Academies Press, 2002.
- [5] L. Schwartz, G. V. Brown, B. Genton, and V. S. Moorthy, "A Reiew of Malaria Vaccine Clinical Projects Based on the WHO Rainbow Table," *Malar. J.*, vol. 11, 2012.
- [6] N. Chitnis, J. M. Hyman, and J. M. Cushing, "Determining Important Parameters in the Spread of Malaria Through the Sensitivity Analysis of a Mathematical Model," *Bull. Math. Biol.*, vol. 70, no. 5, pp. 1272–1296, Jul. 2008, doi: 10.1007/s11538-008-9299-0. [Online]. Available: <http://link.springer.com/10.1007/s11538-008-9299-0>
- [7] R. Resmawan and N. Nurwan, "Konstruksi Bilangan Reproduksi Dasar pada Model Epidemik SEIRS-SEI Penyebaran Malaria dengan Vaksinasi dan Pengobatan," *J. Mat. Integr.*, vol. 13, no. 2, p. 105, Sep. 2017, doi: 10.24198/jmi.v13.n2.12332.105-114. [Online]. Available: <http://jurnal.unpad.ac.id/jmi/article/view/12332>
- [8] P. van den Driessche and J. Watmough, "Further Notes on the Basic Reproduction Number," in *Mathematical Epidemiology*, Victoria: Springer, 1945.
- [9] F. B. Augusto, N. Marcus, and K. . Okosun, "Application of optimal control to the epidemiology of malaria," *Electron. J. Differ. Equ.*, vol. 8, no. 1, pp. 1–22, 2012.
- [10] P. Johansson and J. Leander, *Mathematical Modeling of Malaria: Methods for Simulation of Epidemics*. Gothenburg: Chalmers University of Technology, 2010.