Penggunaan Regresi Spline Terpenalti dalam Mengidentifikasi Pola Perubahan Nilai Kurs Rupiah di Indonesia

¹Anna Islamiyati ²Erna Tri Herdiani

^{1,2}Jurusan Matematika FMIPA, Universitas Hasanuddin
Jl. Perintis Kemerdekaan KM. 10 Tamalanrea Makassar 90245
Telp. (0411-585643) e-mail : anna_islamiyati@yahoo.com

Abstrak

Regresi spline terpenalti merupakan salah satu bentuk penaksir regresi nonparametrik, dimana fungsinya diperoleh dengan meminimumkan *penalized least square*, yaitu kriteria estimasi yang menggabungkan *goodness of fit* dengan fungsi penalti. Keunggulan spline sebagai potongan polinomial yang fleksibel, memungkinkan untuk digunakan dalam mengidentifikasi pola perubahan nilai kurs rupiah yang terjadi di Indonesia. Pentingnya mengidentifikasi pola perubahan yang terjadi pada nilai kurs rupiah dimaksudkan supaya dapat memberikan informasi penyebab terjadinya perubahan nilai kurs dengan berbagai kecenderungan yang terjadi, sehingga menjadi salah satu referensi dalam menganalisis kondisi nilai kurs rupiah pada masa mendatang.

Kata kunci: kurs rupiah, dan regresi spline terpenalti.

1. Pendahuluan

Regresi nonparametrik digunakan untuk memodelkan hubungan antara variabel respon dengan variabel prediktor tanpa penentuan bentuk khusus tentang fungsi regresi yang akan digunakan, tetapi data yang akan mencari sendiri fungsi regresi yang sesuai. Bentuk umum regresi nonparametrik, dapat dituliskan sebagai berikut:

$$y_i = f(t_i) + \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i : N(0, \sigma^2), i = 1, 2, K, n \quad (1)$$

dimana y_i adalah variabel respon sedangkan fungsi $f(t_i)$ merupakan kurva regresi yang bentuknya diasumsikan tidak diketahui dan termuat dalam ruang sobolev $W_2^m[a, b]$.

Makalah ini menggunakan pendekatan spline karena merupakan potongan-potongan polinomial yang memiliki sifat tersegmen kontinu. Sifat inilah yang

memberikan fleksibilitas yang lebih daripada polinomial biasa, sehingga memungkinkan untuk menyesuaikan diri secara efektif terhadap karakteristik lokal dari suatu fungsi. Pemilihan ruang fungsi ini dimotivasi oleh sifat *smoothness* (Eubank, 1988).

Beberapa pendekatan regresi spline, yaitu *spline polynomial truncated*, *spline penalized* (spline terpenalti), *naïve spline*, dan *B-Spline*. Penekanan dalam makalah ini, adalah penggunaan regresi spline terpenalti, yaitu regresi spline yang selain memperhitungkan fungsi kecocokan kurva, juga memperhitungkan fungsi penalti. Regresi spline terpenalti atau *penalized spline* biasa disingkat dengan *P-Spline*, dengan menggunakan pemulus dimensi rendah (Ruppert dan Carrol, 1997).

Penggunaan spline terpenalti dalam mengidentifikasi pola perubahan nilai kurs rupiah yang terjadi di Indonesia, diharapkan dapat menunjukkan beberapa pola perubahan dengan faktor penyebab terjadinya setiap perubahan pola tersebut, sehingga dapat menjadi referensi dalam analisis kurs rupiah di masa mendatang. Selain itu, manfaat makalah ini dari segi keilmuan, dapat menunjukkan salah satu pendekatan metode statistik yang mampu mengidentifikasi beberapa pola perubahan dalam satu data, sehingga semua informasi dapat dijelaskan dengan optimal, dimana dalam pendekatan statistik lain, kemungkinan ada informasi yang terbuang.

2. Regresi Spline Terpenalti

Spline adalah potongan polinomial order p dengan titik bersama dari potongan-potongan tersebut disebut dengan knot. Titik knot merupakan perpaduan dua kurva yang menunjukkan pola perubahan perilaku kurva pada selang yang berbeda. Penggunaan titik knot banyak digunakan dalam regresi nonparametrik, karena secara visual dapat menunjukkan setiap perubahan pola perilaku yang terjadi dalam interval waktu tertentu (Hardle, 1990). Contohnya dalam regresi spline linear, secara visual dapat digambarkan sebagai berikut:

Gambar 1. Ilustrasi pola perubahan dalam regresi spline linear

Gambar 1 menunjukkan pola perubahan yang terjadi pada data sebanyak lima pola perubahan, dimana titik terjadinya pola perubahan tersebut disebut titik knot. Pola perubahan yang terjadi, yaitu pola pertama cenderung naik, kemudian menurun pada pola kedua. Selanjutnya pola ketiga juga menunjukkan kecenderungan turun tetapi penurunannya berbeda dengan pola kedua. Pola keempat mengalami kenaikan kembali dan terus naik pada pola kelima tetapi dengan kecenderungan naik yang berbeda pula. Contoh ini menunjukkan bahwa dengan penggunaan regresi spline, sangat memungkinkan dalam satu data terdapat beberapa pola perubahan dalam setiap interval waktu berbeda.

Spline orde p dengan knot $k_1, k_2, \dots, k_m$ diberikan dalam fungsi f dengan bentuk:

$$f(t_i) = \sum_{j=0}^p \beta_j t_i^j + \sum_{j=1}^m \beta_{j+p} (t_i - k_j)_+^p, \quad (2)$$

dengan $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{p+j}$ adalah parameter regresi, dan

$$(t_i - k_j)_+^p = \begin{cases} (t_i - k_j)_+^p & , (t_i - k_j) \geq 0 \\ 0 & , (t_i - k_j) < 0 \end{cases}$$

(Eubank, 1988).

Regresi spline terpenalti merupakan salah satu bentuk regresi spline yang memuat fungsi penalti dengan memperhitungkan parameter penghalus λ . Metode optimasi yang digunakan adalah *Penalized Least Square* (PLS), sebuah metode yang memberikan komponen penghalus pada metode *least square*. PLS yaitu kriteria optimasi yang menggabungkan antara kecocokan terhadap data (*goodness of fit*), dan kemulusan kurva (*penalty*).

Diberikan model regresi nonparametrik berdasarkan pers (1), dimana $f(t_i)$ adalah fungsi regresi spline yang memperhitungkan titik knot yang diberikan pers (2). Diperoleh optimasi fungsi spline melalui PLS, yaitu:

$$PLS = \sum_{i=1}^n [y_i - f(t_i)]^2 + \lambda \underline{\beta}^T \underline{D} \underline{\beta}$$

dimana :

$f(t_i)$	= fungsi spline dengan pendekatan titik knot
λ	= parameter penghalus
$\underline{D}$	= matriks semi definit positif = $diag(0_{p+1}, 1_k)$
$\sum_{i=1}^n [y_i - f(t_i)]^2$	= jumlah kuadrat galat
$\lambda \underline{\beta}^T \underline{D} \underline{\beta}$	= fungsi penalti

Hasil estimasi parameter melalui *least square* diperoleh:

$$\underline{\hat{\beta}} = (\underline{X}^T \underline{X} + \lambda \underline{D})^{-1} \underline{X}^T \underline{y}$$

Akibatnya estimasi kurva spline terpenalti dengan PLS diperoleh :

$$\begin{aligned}\underline{\hat{y}} &= \underline{X} \underline{\hat{\beta}} \\ \underline{\hat{y}} &= \underline{X} (\underline{X}^T \underline{X} + \lambda \underline{D})^{-1} \underline{X}^T \underline{y} \\ \underline{\hat{y}} &= \underline{H}(\underline{R}) \underline{y}\end{aligned}$$

dengan matriks $\underline{H}(\underline{R}) = \underline{X} (\underline{X}^T \underline{X} + \lambda \underline{D})^{-1} \underline{X}^T$.

Terlihat bahwa pendugaan kurva spline dengan PLS merupakan kelas pendugaan linear dalam observasi respon $\underline{y}$ dan bergantung pada $\underline{R}$, dalam hal ini adalah titik knot k dan parameter penghalus λ .

Penentuan nilai λ tertentu akan memberikan kompromi antara kebaikan pengepasan dengan kehalusan kurva. Nilai λ dapat diperoleh melalui:

$$\lambda = \frac{\sigma_{\varepsilon}^2}{\sigma_y^2}.$$

Nilai λ yang terpilih adalah λ yang memberikan nilai GCV terkecil.(Djuraidah, 2006). Nilai GCV dapat dirumuskan sebagai berikut :

$$GCV(R) = \frac{MSE(R)}{(n^{-1}(n-p))^2}$$

dimana :

$$MSE(R) = n^{-1} \underline{y}^T \left((\underline{I} - \underline{H}(\underline{R}))^T (\underline{I} - \underline{H}(\underline{R})) \right) \underline{y}$$

$$\underline{H}(\underline{R}) = \underline{X}_R (\underline{X}_R^T \underline{X}_R)^{-1} \underline{X}_R^T$$

$\underline{X}$ = matriks variabel bebas yang digunakan dalam model

k = titik knot yang terpilih.

n = banyaknya data

p = jumlah orde

3. Identifikasi Pola Perubahan Nilai Kurs Rupiah dengan Regresi Spline Terpenalti

Nilai tukar mata uang suatu negara, yang biasa disebut kurs, merupakan salah satu indikator penting dalam suatu perekonomian. Kurs merupakan salah satu harga

yang lebih penting dalam perekonomian terbuka, karena ditentukan oleh adanya keseimbangan antara permintaan dan penawaran yang terjadi di pasar. Kurs juga mempunyai implikasi yang luas, baik dalam konteks ekonomi domestik maupun internasional, mengingat hampir semua negara di dunia melakukan transaksi internasional. Negara dengan pertumbuhan nilai mata uang yang stabil menunjukkan bahwa negara tersebut memiliki kondisi ekonomi yang relatif baik atau stabil (Salvator, 1997).

Nilai jual kurs rupiah di Indonesia mulai April 2009 hingga Maret 2012, mengalami fase naik turun, sehingga untuk mengidentifikasi pola perubahan yang terjadi selama kurun waktu tersebut diperlukan sebuah pendekatan statistik yang secara ilmiah dapat menunjukkan pola yang dimaksudkan sekaligus menjadi bahan analisis untuk mempelajari penyebab setiap perubahan pola, dan besar pengaruh yang diberikan oleh setiap pola perubahan terhadap kondisi kurs rupiah di Indonesia. Salah satu pendekatan statistik yang dapat digunakan dan ditunjukkan dalam makalah ini adalah regresi spline terpenalti, yang merupakan bagian dari regresi nonparametrik.

Plot data awal dari kurs rupiah, ditunjukkan pada Gambar 2 berikut.

Gambar 2. Plot data kurs rupiah April 2009 – Maret 2012

Berdasarkan Gambar 2, terlihat bahwa kurs rupiah terhadap dollar dalam kurun waktu April 2009 hingga Maret 2012 mengalami perubahan yang tidak stabil. Sangat terlihat di awal tahun 2009, nilai kurs rupiah mengalami peningkatan, kemudian turun hingga Juli 2012. Kondisi kurs rupiah yang turun, kadang mengalami peningkatan, tetapi kenaikan yang terjadi tidak mampu menyamai di awal tahun 2009. Plot data dari kurs rupiah tersebut, menunjukkan bahwa pola data selalu mengalami perubahan pada interval-interval waktu tertentu. Pola data untuk setiap interval waktu tersebut penting untuk diidentifikasi sebagai bahan kajian dalam menganalisis nilai kurs rupiah di masa mendatang. Pendekatan yang akan digunakan untuk mengidentifikasi setiap perubahan pola dalam interval waktu adalah regresi spline terpenalti.

Makalah ini membatasi penggunaan spline pada spline linear, dengan asumsi awal bahwa perubahan nilai kurs rupiah dalam setiap harinya selalu berubah secara linear. Namun, untuk penelitian selanjutnya, dapat dicobakan pada spline yang berorde di atas satu.

Pemilihan titik knots sangat mempengaruhi hasil estimasi yang optimal dalam regresi spline. Titik knot yang terpilih adalah titik knot yang memberikan nilai GCV minimum, dengan nilai λ yang digunakan sebagai hasil perbandingan antara varians respon dengan deviansi error, yaitu $\lambda = 844,5$. Selanjutnya dengan penambahan parameter penghalus λ tersebut, dilakukan pemilihan titik knot yang dimulai dari 1 titik knot hingga 5 titik knot pada spline linear seperti yang ditunjukkan pada Tabel 1. Titik knot yang ditampilkan hanya sebagian dari sekian banyak kemungkinan titik knot yang terpilih. Jumlah titik knot yang dicobakan hanya sampai pada 5 titik knot, karena setelah dicobakan, sebaran titik sampel terhadap garis estimasi sudah merata, sehingga hanya dilakukan sampai 5 titik knot.

Penggunaan 1 titik knot, diperoleh nilai GCV terkecil pada $k = 150$. Selanjutnya untuk 2 titik knot nilai GCV terkecil pada $k_1 = 105$ dan $k_2 = 550$, untuk 3 titik knot nilai GCV terkecil pada $k_1 = 105$, $k_2 = 550$, dan $k_3 = 650$, untuk 4 titik knot nilai GCV terkecil pada $k_1 = 30$, $k_2 = 105$, $k_3 = 125$, dan $k_4 = 570$, dan untuk 5 titik knot diperoleh nilai GCV terkecil pada $k_1 = 30$, $k_2 = 105$, $k_3 = 125$, $k_4 = 570$, dan $k_5 = 650$. Dari pemilihan jumlah titik knot, nilai GCV yang terkecil pada 5 titik knot yaitu sebesar 11.275,19, sehingga taksiran model spline linear terpenalti yang optimal digunakan adalah model spline linear dengan 5 titik knot.

Tabel 1. Nilai GCV pada titik knot dengan $\lambda = 844,5$ untuk spline linear terpenalti

Titik Knot					GCV
1	2	3	4	5	
30					93.345,41
60					79.352,06
65					77.321,18
105					61.844,54
150					48.262,22
325					49.062,37
440					56.987,35
550					54.978,87
650					93.250,26
65	105				61.507,17
65	325				37.326,18
65	550				25.478,32
105	425				33.786,84
105	550				21.115,52
315	550				36.436,01
65	105	550			39.648,29
105	500	600			23.107,92
105	550	650			20.462,60
105	570	710			21.083,40
65	105	550	650		20.433,69
65	105	310	550		19.924,10
65	105	275	570		18.663,54
65	105	265	570		18.285,37
65	105	225	570		17.366,05
65	105	205	570		17.070,25
65	105	125	570		15.466,81
55	105	125	570		14.702,84
35	105	125	570		13.009,54
30	105	125	570		12.882,36
30	105	125	500	650	17.460,74
30	105	125	570	650	11.275,19
40	105	125	570	650	11.650,82
20	105	125	570	650	12.089,52

Berdasarkan Tabel 1, terlihat bahwa pada penggunaan beberapa titik knot yang berbeda memberikan nilai GCV yang berbeda pula, baik pada penggunaan 1

titik knot, hingga 5 titik knots. Pada 1 titik knot terlihat nilai GCV terkecil diberikan pada titik 150 dengan nilai GCV sebesar 48.262,22. Gambar yang bersesuaian dengan titik knot pada 325 ditunjukkan pada Gambar 3(a). Untuk penggunaan 2 titik knot, diperoleh nilai GCV terkecil pada $k_1 = 105$ dan $k_2 = 550$, dengan gambar yang bersesuaian ditunjukkan pada Gambar 3(b).

Gambar 3. Estimasi kurva regresi spline terpenalti dengan 1 titik knot (a) dan 2 titik knot (b)

Selanjutnya, titik knot yang dicobakan adalah pemilihan 3 titik knot yang memberikan nilai GCV terkecil. Diperoleh $k_1 = 105$, $k_2 = 550$, dan $k_3 = 650$ yang memberikan nilai GCV terkecil yaitu 20.462,6, dengan estimasi kurva regresi spline bersesuaian dengan Gambar 4(a). Sedangkan untuk 4 titik, yang memberikan nilai GCV terkecil yaitu $k_1 = 30$, $k_2 = 105$, $k_3 = 125$, dan $k_4 = 570$ dan estimasi kurva regres splinenya bersesuaian dengan Gambar 4(b).

Gambar 4. Estimasi kurva regresi spline terpenalti dengan 3 titik knot (a) dan 4 titik knot (b)

Setelah dicobakan untuk penggunaan 4 titik knot, selanjutnya dalam makalah ini masih dilanjutkan dengan penggunaan 5 titik knot, meskipun berdasarkan Gambar 4, sudah terlihat hasil kurva regresi spline yang sudah mendekati titik sampel pada setiap garis estimasi yang terbentuk. Penggunaan 5 titik knot ternyata masih memberikan nilai GCV yang masih lebih kecil dari 4 titik knot yaitu 11.275,19, yaitu pada $k_1 = 30$, $k_2 = 105$, $k_3 = 125$, $k_4 = 570$, dan $k_5 = 650$, dengan hasil estimasi kurva regresi spline ditunjukkan pada Gambar 5 berikut.

Gambar 5. Estimasi kurva regresi spline terpenalti dengan 5 titik knot

Estimasi kurva regresi spline terpenalti yang terlihat pada Gambar 5, menunjukkan bahwa data tersebar di sekitar garis estimasi, sehingga pola yang terbentuk dari hasil estimasi tersebut dapat diinterpretasikan berdasarkan model optimal yang diperoleh dari penggunaan 5 titik knot. Model regresi spline linear terpenalti yang diperoleh berdasarkan 5 titik knot optimal, adalah sebagai berikut:

$$\hat{y} = 11364,88 - 31,46t + 25,37(t-30)_+^1 - 14(t-105)_+^1 + 18,76(t-125)_+^1 + 8,43(t-570)_+^1 - 5,29(t-650)_+^1$$

Model regresi spline di atas mempunyai GCV terkecil sebesar 11.275,19 dengan R^2 sebesar 95,46%. Hal ini menunjukkan bahwa model di atas merupakan model regresi spline terpenalti yang optimal dalam menjelaskan kondisi kurs rupiah terhadap dollar dalam setiap harinya, termasuk pola perubahan yang teridentifikasi dalam model tersebut.

Perubahan kurs rupiah terhadap dollar, berdasarkan model spline optimal yang diperoleh dengan 5 titik knot, menunjukkan terdapat 6 pola perubahan yang terjadi pada data kurs. Pola pertama pada interval hari pertama hingga hari ke-30 atau sekitar

1 bulan pertama yang memperlihatkan sebuah pola penurunan nilai kurs rupiah yang sangat tajam, pola kedua pada interval hari ke-30 hingga hari ke-105 atau sekitar 2,5 bulan yang memperlihatkan pola penurunan nilai kurs tetapi penurunannya tidak setajam bulan pertama. Pola ketiga pada interval hari ke-105 hingga 125 atau sekitar 20 hari yang kembali menurun secara tajam, pola keempat pada interval hari ke-125 hingga 570 yang juga terus mengalami penurunan. Selanjutnya pola kelima pada interval waktu hari ke-570 hingga 650 terlihat sudah mengalami peningkatan, tetapi setelah hari ke-650 ada penurunan meskipun tidak terlalu besar.

Berbagai pola tersebut, dapat dijadikan sebagai bahan kajian dalam menganalisis kondisi perubahan kurs rupiah terhadap dollar Amerika untuk kedepannya. Setiap pola perubahan mengindikasikan sesuatu yang terjadi pada interval waktu tersebut sehingga menyebabkan terjadinya pola perubahan nilai kurs rupiah. Pola pertama yang terlihat pada estimasi kurva hingga pola keempat yang semuanya memperlihatkan pola penurunan nilai kurs rupiah sehingga terlihat nilainya sangat anjlok dibandingkan di hari-hari pertama. Hal ini disebabkan karena pada kurun waktu 2009 – 2010 telah terjadi krisis Amerika yang menyebabkan nilai Kurs Rupiah terhadap Dollar Amerika sangat mengalami penurunan hingga sangat sulit untuk mencapai nilai seperti di awal. Pola penurunan yang berbeda, karena dalam kurun waktu tersebut, berbagai usaha tetap dilakukan oleh pasar dunia termasuk Indonesia, sehingga penurunan tajam yang terjadi pada pola pertama dapat dikurangi. Tetapi karena krisis Amerika yang sangat berdampak dalam pasar dunia, kemungkinan menjadi pemicu kembali menurunnya nilai kurs rupiah secara tajam yang terlihat pada pola ketiga dalam Gambar 5. Penurunan nilai kurs rupiah terlihat sangat lama pada pola keempat, karena selain krisis Amerika, di tahun 2011 telah terjadi krisis Eropa yang semakin memperpuruk kondisi kurs rupiah di Indonesia. Setelah berakhir krisis Eropa, perlahan nilai kurs rupiah sudah terlihat mengalami peningkatan pada pola berikutnya, tetapi masih sulit untuk mencapai angka seperti di awal tahun 2009.

Informasi-informasi tersebut, menjadi bahan referensi dalam meramalkan kondisi nilai kurs rupiah, sekaligus dapat mengetahui strategi-strategi yang harus dilakukan jika terjadi kondisi serupa. Informasi lain, bahwa penyebab-penyebab kenaikan nilai kurs rupiah juga dapat diidentifikasi lebih lanjut dalam analisis statistik yang lain.

4. Penutup

Regresi spline terpenalti dapat digunakan untuk mengidentifikasi perubahan pola yang terjadi pada data. Khusus untuk data kurs rupiah terhadap dollar Amerika yang diteliti, yaitu mulai bulan April 2009 hingga bulan Maret 2012, teridentifikasi 6 pola perubahan yang berbeda pada setiap interval waktu yang berbeda. Terdapat 5 pola yang mengalami penurunan tetapi pola penurunan yang berbeda, dan 1 pola perubahan nilai kurs yang mengalami peningkatan.

Sebagai bahan kajian bersama, permasalahan dalam makalah ini dapat dikembangkan dalam spline kuadratik dan kubik. Selain itu, karena data memperhitungkan waktu, sehingga dapat dikembangkan juga ke dalam pendekatan regresi nonparametrik dengan deret fourier.

5. Daftar Pustaka

- Eilers, P.H.C. dan Marx, B.D., (1996), Flexible smoothing with B-splines and penalties (with discussion), *Statistical Science*, 11: 89-121.
- Eubank, R. L. (1988), *Spline smoothing and Nonparametrik Regression*, Marcel Dekker, New York.
- Hardle, W. (1990), *Applied Nonparametric Regression*, Canbrige Univercity Press, New York
- Islamiyati, Anna. (2007), Model Spline Kubik dengan Titik Titik Knot dalam Regresi Nonparametrik, *Jurnal Inferensi*, Vol. 3, ITS Surabaya.
- Islamiyati, Anna., (2008), *Estimasi Spline untuk Data Longitudinal dengan Penalized Likelihood*, Proseding Seminar Nasional Matematika IV, Jurusan Matematika ITS, Surabaya.
- Islamiyati, Anna., (2010), Spline Polynomial Truncuted dalam Regresi Nonparametrik, *Jurnal Matematika, Statistika, dan Komputasi*, Vol. 6, Unhas , Makassar.
- Jacqmin, G.H., Joly, P., Commenges, D., Binquet, C., dan Chene, G., (2002), Penalized Likelihood Approach to Estimate a Smooth Mean Curve on Longitudinal Data, *Statistics In Medicine*, **21**, 2391-2402.