Open Journal of Mathematics and Physics | Volume 2, Article 166, 2020 | ISSN: 2674-5747
https://doi.org/10.31219/osf.io/dzjkr | published: 18 Sept 2020 | https://ojmp.org

[white paper]
Diamond Open Access

ω-Naturais

Colaboração Matemática Aberta[1]

18 de Setembro de 2020

Resumo

Definimos uma extensão do conjunto dos naturais que tem a mesma quantidade de elementos e inclui alguns dos ordinais transfinitos.

palavras-chave: números ordinais transfinitos, conjunto dos naturais estendidos

A versão mais atualizada deste artigo está disponível em
https://osf.io/dzjkr/download

Como ser coautor(a) deste artigo?

1. Envie-nos suas observações e responda às seguintes perguntas.
2. Quais discussões você adicionaria a este artigo?
3. Você encontrou algum erro ou argumento inconsistente? Dê uma justificativa detalhada.

[1]Todos os autores com suas afiliações aparecem no final deste artigo.

Introdução

4. Pré-requisitos [1, 2]

5. Leitura adicional [3–5]

6. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$

Extensão dos naturais

7. Definição:

   $\mathbb{N}^\omega = \{0, 1, 2, \dots, \omega, \omega{+}1, \dots, \omega{\cdot}2, \omega{\cdot}2{+}1, \dots, \omega{\cdot}3, \dots, \omega^2, \dots, \omega^3, \dots, \omega^N\}$

$$(x \in \mathbb{N}^\omega) \to (x < \omega^\omega)$$

$$N \in \mathbb{N}$$

Proposição

8. $\mathbb{N}^\omega$ *tem a mesma quantidade de elementos que o conjunto dos números naturais.*

Demonstração

9. Vamos colocar os elementos de $\mathbb{N}^\omega$ em uma tabela.

10. Na primeira linha, colocamos os naturais.

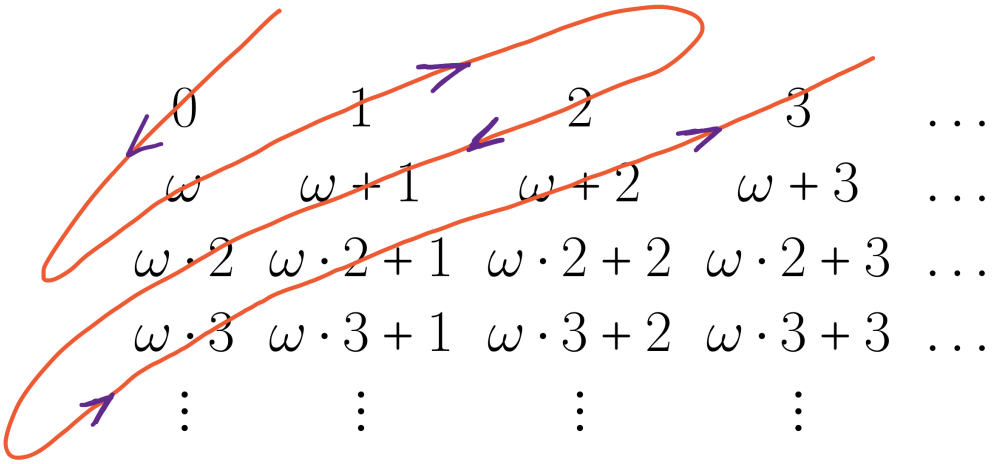
11. Na segunda linha, colocamos $\omega, \omega + 1, \dots$

12. Na terceira linha, colocamos $\omega \cdot 2, \omega \cdot 2 + 1, \dots$, e assim sucessivamente.

13.

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots \\ \omega & \omega+1 & \omega+2 & \omega+3 & \dots \\ \omega\cdot 2 & \omega\cdot 2+1 & \omega\cdot 2+2 & \omega\cdot 2+3 & \dots \\ \omega\cdot 3 & \omega\cdot 3+1 & \omega\cdot 3+2 & \omega\cdot 3+3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

14. Agora, ordenaremos os elementos de (13) na lista $\mathcal{L}_1$, conforme indica a seta da figura a seguir.



15. $\mathcal{L}_1 = \{0, \omega, 1, 2, \omega+1, \omega\cdot 2, \omega\cdot 3, \omega\cdot 2+1, \omega+2, 3, \dots\}$

16. Repetiremos o processo para $\omega^2, \omega^2+1, \dots$ e $\omega^3, \omega^3+1, \dots$, obtendo, assim, $\mathcal{L}_2$ e $\mathcal{L}_3$.

17.

$$\begin{array}{cccc} \omega^2 & \omega^2+1 & \omega^2+2 & \omega^2+3 & \dots \\ \omega^2\cdot 2 & \omega^2\cdot 2+1 & \omega^2\cdot 2+2 & \omega^2\cdot 2+3 & \dots \\ \omega^2\cdot 3 & \omega^2\cdot 3+1 & \omega^2\cdot 3+2 & \omega^2\cdot 3+3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

18.

$$\begin{array}{cccc} \omega^3 & \omega^3+1 & \omega^3+2 & \omega^3+3 & \dots \\ \omega^3\cdot 2 & \omega^3\cdot 2+1 & \omega^3\cdot 2+2 & \omega^3\cdot 2+3 & \dots \\ \omega^3\cdot 3 & \omega^3\cdot 3+1 & \omega^3\cdot 3+2 & \omega^3\cdot 3+3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

19.
$$\mathcal{L}_2 = \{\omega^2, \omega^2 \cdot 2, \omega^2 + 1, \omega^2 + 2, \omega^2 \cdot 2 + 1, \omega^2 \cdot 3, \dots\}$$

20.
$$\mathcal{L}_3 = \{\omega^3, \omega^3 \cdot 2, \omega^3 + 1, \omega^3 + 2, \omega^3 \cdot 2 + 1, \omega^3 \cdot 3, \dots\}$$

21. Como N em (7) é finito, conseguimos construir $\mathcal{L}_N$.

22.
$$\mathcal{L}_N = \{\omega^N, \omega^N \cdot 2, \omega^N + 1, \omega^N + 2, \omega^N \cdot 2 + 1, \omega^N \cdot 3, \dots\}$$

23. Por fim, montaremos a seguinte tabela contendo $\mathcal{L}_i$ na i-ésima linha.

24.
$$\begin{array}{cccccc} 0 & \omega & 1 & 2 & \omega+1 & \omega\cdot 2 & \dots \\ \omega^2 & \omega^2\cdot 2 & \omega^2+1 & \omega^2+2 & \omega^2\cdot 2+1 & \omega^2\cdot 3 & \dots \\ \omega^3 & \omega^3\cdot 2 & \omega^3+1 & \omega^3+2 & \omega^3\cdot 2+1 & \omega^3\cdot 3 & \dots \\ \omega^4 & \omega^4\cdot 2 & \omega^4+1 & \omega^4+2 & \omega^4\cdot 2+1 & \omega^4\cdot 3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \end{array}$$

25. Utilizando a mesma orientação da seta de (14) em (24), obtemos a lista $\mathcal{L}$ que contém todas as listas $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3, \dots, \mathcal{L}_N$.

26.
$$\mathcal{L} = \{0, \omega^2, \omega, 1, \omega^2 \cdot 2, \omega^3, \omega^4, \omega^3 \cdot 2, \omega^2 + 1, 2, \dots\}$$

27. Note que todos os elementos de $\mathbb{N}^\omega$ estão em $\mathcal{L}$.

28. Dessa forma, é possível fazer uma correspondência um a um dos elementos de $\mathcal{L}$ com os elementos de $\mathbb{N}^\omega$, provando, assim, que esses dois conjuntos têm a mesma cardinalidade. □

Considerações Finais

29. O conjunto dos naturais estendidos menores do que ω^ω tem o mesmo número de elementos do conjunto dos naturais.

30.

$$\mathbb{N}^{\omega} = \{0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega{+}1, \ldots, \omega{\cdot}2, \omega{\cdot}2{+}1, \ldots, \omega{\cdot}3, \ldots, \omega^2, \ldots, \omega^3, \ldots, \omega^N\}$$

31.

$$|\mathbb{N}^{\omega}| = \aleph_0$$

Ciência Aberta

O **arquivo latex** para este artigo, juntamente com outros *arquivos suplementares*, estão disponíveis [6].

Referências

[1] Velleman, Daniel J. *How to prove it: A structured approach.* Cambridge University Press, 2019.

[2] Stillwell, John. *Roads to Infinity: The mathematics of truth and proof.* CRC Press, 2010.

[3] Lobo, Matheus P. "Aritmética Dos Ordinais Transfinitos." *OSF Preprints*, 10 Sept. 2020. `https://doi.org/10.31219/osf.io/h3t5f`

[4] Lobo, Matheus P. "Cardinais E Ordinais Transfinitos." *OSF Preprints*, 13 Sept. 2020. `https://doi.org/10.31219/osf.io/d24ae`

[5] Lobo, Matheus P. "Transdenumerability of the Reals." *OSF Preprints*, 7 Sept. 2020. `https://doi.org/10.31219/osf.io/fu7bx`

[6] Lobo, Matheus P. "Open Journal of Mathematics and Physics (OJMP)." *OSF*, 21 Apr. 2020. `https://doi.org/10.17605/osf.io/6hzyp`

Colaboração Matemática Aberta

Matheus Pereira Lobo (autor principal, mplobo@uft.edu.br)[1,2]
https://orcid.org/0000-0003-4554-1372

[1]Universidade Federal do Tocantins (Brasil)
[2]Universidade Aberta (UAb, Portugal)