Open Journal of Mathematics and Physics | Volume 4, Article 274, ISSN: 2674-5747
https://doi.org/10.31219/osf.io/dtcq4 | published: 10 Sept 2022 | https://ojmp.org
KT

[white paper]
Diamond Open Access
[awaiting peer review]

Um ensaio pedagógico com a demonstração de um lema do teorema de Heine-Borel

Colaboração Matemática Aberta[1]

10 de Setembro de 2022

Resumo

Neste white paper, provamos um dos lemas envolvidos na demonstração do teorema de Heine-Borel, com todos os passos desenvolvidos e com o menor número de símbolos matemáticos possíveis, sem perder informação.

palavras-chave: teorema de Heine-Borel, espaços topológicos compactos, topologia

A versão mais atualizada deste artigo está disponível em
https://osf.io/dtcq4/download
https://zenodo.org/record/7067050

Introdução

1. No início de cada seção, após a citação da referência bibliográfica utilizada, aparece o resultado principal (teorema ou definição).

2. Abaixo do teorema (ou da definição), são colocadas as definições subjacentes.

3. O símbolo $:=$ significa que o que está à esquerda é definido pelo que está à direita.

4. $A \vdash B$ significa que A prova B.

[1]Todos os autores com suas afiliações aparecem no final deste artigo.

O teorema de Heine-Borel

5. [1–3]

6. `Teorema`

$$((A, \mathcal{T}_A) \equiv \texttt{compacto}) \leftrightarrow (A \equiv \texttt{fechado} \text{ e } \texttt{limitado} \text{ em } \mathbb{R})$$

7. $A \subseteq \mathbb{R}$

8. $(A, \mathcal{T}_A) :=$ espaço topológico

Topologia em S

9. [1–3]

10. `Definição`

$$\mathcal{T} := \texttt{topologia em } S \text{ se}$$

   (i) $\varnothing, S \in \mathcal{T}$

   (ii) $X \subseteq \mathcal{T} \to \bigcup X \in \mathcal{T}$

   (iii) $(Y \subseteq \mathcal{T} \ \wedge \ Y := \text{finito}) \ \to \ \bigcap Y \in \mathcal{T}$

11. $(10.ii)$ significa que $\mathcal{T}$ *é fechado sob união arbitrária.*

12. $(10.iii)$ significa que $\mathcal{T}$ *é fechado sob interseção finita.*

13. $S :=$ conjunto

14. $\mathcal{T}, X, Y :=$ famílias (conjuntos de conjuntos)

Espaço Topológico

15. [1–3]

16. `Definição`

$$(S, \mathcal{T}) := \texttt{espaço topológico}$$

17. $S :=$ conjunto

18. $\mathcal{T} :=$ topologia em S

Cobertura

19. [1–3]

20. `Definição`

$$\left(\bigcup \mathcal{C} = S\right) \;\equiv\; (\mathcal{C} := \texttt{cobertura de } S)$$

21.

$$\mathcal{C} \texttt{ cobre } S$$

22. `Definição`

$$(\mathcal{C} \equiv \text{cobertura de } S) \;\wedge\; (\forall U \in \mathcal{C} : U \equiv \text{conjunto aberto}) \;\equiv$$
$$\equiv\; \mathcal{C} := \texttt{cobertura aberta de } S$$

23. $(S, \mathcal{T}) :=$ espaço topológico

24. $\mathcal{C} :=$ coleção de subconjuntos de S

Compacto, Subcobertura

25. [1–3]

26. `Definição`

$$(\forall \mathcal{C} : \exists_n \; \texttt{subcobertura} \text{ da cobertura}) \;\equiv\; ((S, \mathcal{T}) \coloneqq \texttt{compacto})$$

27. $(S, \mathcal{T}) \coloneqq$ espaço topológico

28. $\mathcal{C} \coloneqq$ coleção de subconjuntos de S

29. $\mathcal{C} \coloneqq$ cobertura aberta de S

30. $\exists_n \coloneqq$ existe um número finito de

31. `subcobertura` da cobertura $\coloneqq$ subcoleção que cobre S

Intervalo Aberto

32. [1–3]

33. `Definição`

$$(a, b) \coloneqq \{x \in X \mid a < x < b\}$$

34. $X \coloneqq$ conjunto

Conjunto Aberto

35. [1–3]

36. `Definição`

$$X \coloneqq \texttt{conjunto aberto} \text{ em } Y \text{ se}$$

   (*i*) $X \subseteq Y$

   (*ii*) $\forall x \in X,\ \exists (a, b) : (a, b) \subseteq X,\ x \in (a, b)$

37. X, Y := conjuntos

38. (a, b) := intervalo aberto

Conjunto fechado em $\mathbb{R}$, Complemento de um conjunto

39. [1–3]

40. `Definição`

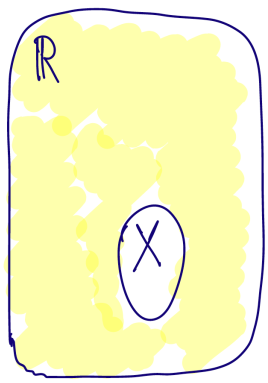
$$(\mathbb{R}\backslash X := \texttt{aberto} \text{ em } \mathbb{R}) \equiv (X := \texttt{fechado} \text{ em } \mathbb{R})$$

41. $X \subseteq \mathbb{R}$

42. $\mathbb{R}\backslash X$:= complemento de X em $\mathbb{R}$

43. Informalmente, $\mathbb{R}\backslash X$ *é o complemento do conjunto que, quando "adicionado" a* X*, resulta em* $\mathbb{R}$.

44. A seguir está uma figura ilustrando o complemento de um conjunto para um caso específico.



Limites Superior e Inferior em $\mathbb{R}$

45. [4]

46. `Definição`

$$(\exists m \in \mathbb{R} : \forall s \in S,\ s \leq m) \ \equiv \ (m := \text{limite superior de } S)$$

47. `Definição`

$$(\exists k \in \mathbb{R} : \forall s \in S,\ s \geq k) \ \equiv \ (k := \text{limite inferior de } S)$$

Conjunto limitado

48. [1–3]

49. `Definição`

$$\texttt{conjunto limitado} := \text{limitado superior e inferiormente}$$

Lema 1

50. [1–3]

51.

$$((A, \mathcal{T}_A) := \texttt{compacto}) \ \rightarrow \ (A := \texttt{limitado em } \mathbb{R})$$

52. $A \subseteq \mathbb{R}$

53. $(A, \mathcal{T}_A) :=$ espaço topológico

Demonstração do Lema 1

54. [1]

55. Seja $A \subseteq \mathbb{R}$.

56. Suponha: $(A, \mathcal{T}_A) \equiv$ compacto.

57. Vamos provar que A é limitado em $\mathbb{R}$.

58. Seja $\mathcal{C}$ uma cobertura aberta de A dada por $\mathcal{C} = \{(-k, k) \cap A \mid k \in \mathbb{Z}^+\}$.

59. $(-k, k) :=$ intervalo aberto

60. Vamos mostrar que $\mathcal{C}$ é uma cobertura de A, isto é, $(\bigcup \mathcal{C} = A)$.

61. Vamos provar: $\bigcup \mathcal{C} \subseteq A$.

62. Seja $x \in \bigcup \mathcal{C}$.

63. Precisamos concluir que $x \in A$.

64. Pela compacticidade de $(A, \mathcal{T}_A)$, $\mathcal{C}$ tem uma subcobertura finita $\mathcal{C}'$ de A.

65. Como $\mathcal{C}'$ é uma subcobertura, então $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$.

66. Suponha que o seguinte subconjunto seja uma cobertura $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{C}' = \{(-k_0, k_0) \cap A, (-k_1, k_1) \cap A, ...(-k_n, k_n) \cap A\}.$$

67. De (58) e (62), temos

$$\begin{aligned} &x \in \bigcup \{(-k, k) \cap A \mid k \in \mathbb{Z}^+\} \vdash \\ &\vdash x \in ((-1, 1) \cap A) \cup ((-2, 2) \cap A) \cup ... \end{aligned}$$

68. A propriedade arquimediana é dada por

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \exists n \in \mathbb{Z}^+ : n > x.$$

69. (68), $x \in ((-1,1) \cap A) \cup ((-2,2) \cap A) \cup \ldots \ \vdash \ x \in A$

70. (62,69) $\vdash \ x \in \bigcup \mathcal{C} \ \rightarrow \ x \in A \ \vdash \ \bigcup \mathcal{C} \subseteq A$

71. Vamos provar que $A \subseteq \bigcup \mathcal{C}$.

72. Seja $x \in A$.

73. Precisamos provar que $x \in \bigcup \mathcal{C}$.

74. $\mathcal{C}$ é uma cobertura aberta $\vdash$ todos os elementos de $\mathcal{C}$ são conjuntos abertos

75. A união de conjuntos abertos em $\mathbb{R}$ é aberta em $\mathbb{R}$.

76. (74,75) $\vdash \ \bigcup \mathcal{C} \equiv$ aberto em $\mathbb{R}$

77.

$$\mathcal{C} = \{(-k,k) \cap A \mid k \in \mathbb{Z}^+\} \ \vdash$$
$$\vdash \bigcup \mathcal{C} = ((-1,1) \cap A) \cup ((-2,2) \cap A) \cup \ldots$$

78. Seja: $a = |\min A|, \ \ b = |\max A|$.

79. Seja $c = \max \{a,b\}$.

80. (68,79) $\vdash \ \exists n \in \mathbb{Z}^+ : n > c$

81. Seja $n_0 > c$.

82. (80) $\vdash \ A = (-n_0, n_0) \cap A$

83. (72,82) $\vdash \ x \in (-n_0, n_0)$

84. (77) $\vdash \ (-n_0, n_0) \subseteq \bigcup \mathcal{C}$

85. $x \in (-n_0, n_0) \subseteq \bigcup \mathcal{C} \ \vdash \ x \in \bigcup \mathcal{C}$

86. (72,85) $\vdash \ x \in A \ \rightarrow \ x \in \bigcup \mathcal{C} \ \vdash \ A \subseteq \bigcup \mathcal{C}$

87. (70,86) $\vdash \ \bigcup \mathcal{C} = A$ $\square$

Considerações Finais

88. A demonstração do teorema de Heine-Borel é composta por cinco lemas [1], aqui demonstramos apenas um.

Ciência Aberta

O **arquivo latex** para este artigo, juntamente com outros *arquivos suplementares*, estão disponíveis em [5, 6]. Seja coautor(a) deste artigo, envie sua contribuição para `mplobo@uft.edu.br`.

Consentimento

O autor concorda com [7].

Como citar este artigo?

`https://doi.org/10.31219/osf.io/dtcq4`
`https://zenodo.org/record/7067050`

Licença

Referências

[1] Warner, Steve. *Topology for Beginners*. GET 800, 2019. `https://books.google.com/books?id=pNAvxQEACAAJ`

[2] Lobo, Matheus P. "Theorems in Topology." *OSF Preprints*, 21 Feb. 2022. `https://doi.org/10.31219/osf.io/zm56w`

[3] CC. Creative Commons. *Attribution 4.0 International* (CC BY 4.0)
https://creativecommons.org/licenses/by/4.0

[4] Warner, Steve. *Pure Mathematics for Beginners*. GET 800, 2018.
https://books.google.com/books?vid=dcWrvAEACAAJ

[5] Lobo, Matheus P. "Open Journal of Mathematics and Physics (OJMP)." *OSF*, 21 Apr. 2020.
https://doi.org/10.17605/osf.io/6hzyp

[6] https://zenodo.org/record/7067050

[7] Lobo, Matheus P. "Simple Guidelines for Authors: Open Journal of Mathematics and Physics." *OSF Preprints*, 15 Nov. 2019.
https://doi.org/10.31219/osf.io/fk836

Colaboração Matemática Aberta

Matheus Pereira Lobo[1] (autor principal, mplobo@uft.edu.br)
https://orcid.org/0000-0003-4554-1372

Rayanne Pinheiro de Oliveira[1]

[1]Universidade Federal do Norte do Tocantins (Brasil)