PENGHITUNGAN KREDIBILITAS DENGAN PUSTAKA ACTUAR DALAM R

I. MAULIDI¹, W. ERLIANA², A.D. GARNADI², S. NURDIATI², I G. P. PURNABA²

Abstrak

Teori Kredibilitas (*Credibility Theory*) merupakan perangkat penting dalam pekerjaan aktuaria. Dengan menggunakan Kredibilitas dapat diduga besarnya pembayaran premi atau banyaknya klaim yang akan terjadi di masa mendatang secara kredibel. Dalam tulisan ini akan diperkenalkan konsep dalam teori kredibilitas dan aplikasinya dengan menggunakan paket Actuar yang ditulis menggunakan software R.

PENDAHULUAN

Kredibilitas adalah sebuah ukuran penilaian seorang aktuaris terhadap dugaan premi di masa mendatang. Data di masa lampau tidak sepenuhnya dapat digunakan untuk menduga di masa mendatang, sehingga revisi dari penduga pun sering dilakukan. Selain itu risiko untuk setiap kelompok individu sangat dimungkinkan berbeda beda. Oleh karena itu kita perlu mengembangkan suatu analisis dari data di masa lampau untuk menduga data di masa mendatang. Sering kali data di masa lampau tidak stabil apabila digunakan untuk memprediksi premi di masa mendatang, sehingga revisi pendugaan sering kali dilakukan. Oleh karena itu diperlukan suatu tool untuk menggunakan data di masa lampau sehingga dapat memprediksi besarnya tingkat premi dan banyaknya klaim di masa mendatang.

Misalkan $X_1, X_2, \dots, X_n$ merupakan besarnya kehilangan di n tahun yang lalu atau n pemegang polis yang lalu. Secara umum ini merupakan n unit exposure yang diamati.

Asumsi

$$\begin{aligned}E[X_j] &= \xi, \\ \text{Var}(X_j) &= \sigma^2, \\ \text{Var}(\bar{X}) &= \frac{\sigma^2}{n},\end{aligned}$$

untuk $j=1, \dots, n$ dan

¹ Program Studi Matematika Universitas Syiah Kuala, Banda Aceh. Email: ikhsanmath47@gmail.com.

² Departemen Matematika, Fakultas Ilmu Matematika dan Pengetahuan Alam, Jalan Meranti Kampus IPB, Dramaga Bogor, 16680.

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j$$

Ada pun untuk menyatakan kredibilitas untuk X kita harus mendefinisikan error relatif terlebih dahulu. Untuk suatu nilai peluang $p, p \in R, 0 \leq p \leq 1$ dan untuk tingkat error ε , jika dipenuhi

$$P\left(\left|\frac{\bar{X} - \xi}{\xi}\right| \leq \varepsilon\right) \geq p,$$

maka kita katakan X adalah credible untuk ξ .

BEBERAPA MODEL KREDIBILITAS

Model Buhlmann

Model ini merupakan model kredibilitas yang paling sederhana. Pada masing-masing pemegang polis (bergantung pada Θ), besarnya klaim dari masa lalu $X_1, \dots, X_n$ memiliki rata-rata dan ragam yang sama dan i.i.d. bergantung pada Θ .

Didefinisikan

$$\mu(\theta) = E(X_j | \Theta = \theta),$$

dan

$$v(\theta) = \text{Var}(X_j | \Theta = \theta).$$

Dalam hal ini $\mu(\theta)$ kita disebut sebagai *hypothetical mean* dan $v(\theta)$ disebut *process variance*.

Selanjutnya kita dapat menentukan rata-rata, ragam dan ragam X_j sebagai berikut:

$$E(X_j) = E[E(X_j | \Theta)] = E[\mu(\Theta)] = \mu,$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(X_j) &= E[\text{var}(X_j | \Theta) + \text{var}[E(X_j | \Theta)]] = \mu \\ &= E(v(\Theta)) + \text{var}(\mu(\Theta)) \\ &= v + a, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_i, X_j) &= E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j), i \neq j \\ &= E[E(X_i X_j | \Theta)] - \mu^2 \\ &= E(E(X_i | \Theta) \cdot E(X_j | \Theta)) - [E(\mu(\Theta))]^2 \\ &= E((\mu(\Theta))^2) - [E(\mu(\Theta))]^2 \\ &= \text{Var}(\mu(\Theta)) = a. \end{aligned}$$

Model pedugaan premi kredibilitas Buhlmann dihipotesiskan dengan suatu fungsi linear berikut:

$$\alpha_o + \sum_{j=1}^n \alpha_j X_j = Z \bar{X} + (1 - Z) \mu,$$

dengan $Z = \frac{n}{k+n}$, $k = \frac{v}{a} = \frac{E[\text{var}(X_j|\theta)]}{\text{var}[E(X_j)|\theta]}$. Penurunan formula ini dapat dilihat pada Klugman (2012).

Model Buhlmann Straub

Model kredibilitas Buhlmann-Straub adalah pengembangan dari model kredibilitas Buhlmann dengan beberapa asumsi tambahan. Diberikan $\theta, X_1, \dots, X_{n+1}$ saling bebas untuk $j = 1, 2, \dots, n+1$, misalkan pula m_j menyatakan banyaknya individu pada tahun ke- j maka berlaku:

$$E[X_j|\theta] = \mu(\theta),$$

$$\text{Var}(X_j|\theta) = \frac{v(\theta)}{m_j}.$$

Selanjutnya kita notasikan sebagai berikut:

$$\mu = E[\mu(\theta)], a = \text{Var}(\mu(\theta))$$

$$v = E[v(\theta)], k = \frac{v}{a}.$$

Kuantitas-kuantitas di atas dapat digunakan untuk menentukan premi kredibilitas.

Premi kredibilitas untuk model Buhlmann-Straub ini adalah

$$(1 - Z)\mu + Z\bar{X},$$

dengan $\bar{X} = \sum_{j=1}^n \frac{m_j X_j}{m}$, $Z = \frac{m}{m+k}$, dan $\sum_{j=1}^n m_j = m$.

BEBERAPA CONTOH DAN APLIKASI

Contoh 1

Misalkan banyaknya klaim tahunan untuk seorang individu yang diasuransikan memiliki sebaran Poisson. Nilai harapan frekuensi klaim tahunan (parameter Poisson Δ) dari anggota populasi yang diasuransikan menyebar seragam (0,1). Rataan frekuensi klaim tahunan individu adalah konstan sepanjang waktu. Tentukan faktor kredibilitas Buhlman Z jika ada n amatan.

Jawab:

Hypothetical mean dapat ditentukan sebagai berikut:

$$\mu(\Delta) = E(X|\Delta) = \Delta,$$

hal ini karena $X|\Delta$ menyebar Poisson(Δ). Proses

variance dapat ditentukan sebagai berikut:

$$V(\Delta) = \text{var}(X|\Delta) = \Delta$$

sehinggadiperolehkuantitas:

$$\mu = E(X) = E(E(X|\Delta)) = E(\mu(\Delta)) = E(\Delta) = 0.5$$

$$v = E(V(\Delta)) = E(\Delta) = 0.5$$

$$\alpha = \text{var}(\mu(\Delta)) = \text{var}(\Delta) = \frac{1}{12}$$

sehinggadiperolehfaktorkredibilitasBuhlmann

$$Z = \frac{n}{n + \frac{1/2}{1/12}} = \frac{n}{n + 6}.$$

Contoh 2

Misalkan N_j menyatakan banyaknya klaim di tahun j , dimana terdapat m_j anggota di tahun j tersebut. Diberikan $\theta = \theta, N_j | (\theta = \theta) \sim \text{Poisson}(m_j \theta)$ dan $\theta \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$. Selanjutnya dari informasi tersebut kita dapat menentukan Buhlmann-Straub *credibility premium* dari rata rata banyaknya klaim pada tahun $n + 1$ untuk setiap anggota.

Jawab:

Misalkan $X_j = \frac{N_j}{m_j}$, maka

$$\mu(\theta) = E[X_j | \theta] = \frac{1}{m_j} E[N_j | \theta] = \frac{1}{m_j} m_j \theta = \theta,$$

$$v(\theta) = \text{Var}(X_j | \theta) = \frac{1}{m_j^2} \text{Var}(N_j | \theta) = \frac{1}{m_j^2} m_j \theta = \frac{\theta}{m_j},$$

$$\mu = E[\mu(\theta)] = E[\theta] = \alpha\beta,$$

$$v = m_j E[v(\theta)] = m_j \frac{1}{m_j} E[\theta] = \alpha\beta,$$

$$a = \text{Var}(\mu(\theta)) = \text{Var}(\theta) = \alpha\beta^2,$$

$$k = \frac{v}{a} = \frac{1}{\beta},$$

sehinggadiperoleh *credibility factor* $Z = \frac{m}{m+k} = \frac{m\beta}{m\beta+1}$, dengan demikian Buhlmann-Straub *Credibility* untuk model ini adalah

$$\frac{m\beta}{m\beta+1} \bar{X} + \frac{1}{m\beta+1} \alpha\beta.$$

PENGUNAAN PACKAGES “ACTUAR” UNTUK KREDIBILITAS

Simulasi Data Hachemeister

Berikut ini kami sajikan sebuah contoh simulasi menentukan besarnya premi dengan menggunakan model kredibilitas. Simulasi dilakukan dengan menggunakan software R dan packages "actuar" yang diperoleh dari CRAN. Data yang digunakan dalam simulasi adalah data dari Hachemesiter (1975) yang memuat besarnya klaim dan banyaknya klaim dari pemegang polis asuransi. Data ini terdapat dalam packages berupa matriks dengan banyaknya baris 5 dan banyaknya kolom adalah 25. Kolom 1 merepresentasikan kelompok dari pemegang polis, kolom 2-13 merepresentasikan rata-rata besarnya klaim setiap periode dan kolom 14-25 merepresentasikan banyaknya klaim setiap periode.

```
> data(hachemeister)
> hachemeister
      state ratio.1 ratio.2 ratio.3 ratio.4 ratio.5 ratio.6 ratio.7 ratio.8
[1,]      1  1738   1642   1794   2051   2079   2234   2032   2035
[2,]      2  1364   1408   1597   1444   1342   1675   1470   1448
[3,]      3  1759   1685   1479   1763   1674   2103   1502   1622
[4,]      4  1223   1146   1010   1257   1426   1532   1953   1123
[5,]      5  1456   1499   1609   1741   1482   1572   1606   1735
      ratio.9 ratio.10 ratio.11 ratio.12 weight.1 weight.2 weight.3 weight.4
[1,]   2115    2262    2267    2517    7861    9251    8706    8575
[2,]   1464    1831    1612    1471    1622    1742    1523    1515
[3,]   1828    2155    2233    2059    1147    1357    1329    1204
[4,]   1343    1243    1762    1306    407    396    348    341
[5,]   1607    1573    1613    1690    2902    3172    3046    3068
      weight.5 weight.6 weight.7 weight.8 weight.9 weight.10 weight.11 weight.12
[1,]   7917    8263    9456    8003    7365    7832    7849    9077
[2,]   1622    1602    1964    1515    1527    1748    1654    1861
[3,]    998    1077    1277    1218    896    1003    1108    1121
[4,]    315    328    352    331    287    384    321    342
[5,]   2693    2910    3275    2697    2663    3017    3242    3425
> |
```

Fungsi yang digunakan untuk model kredibilitas adalah fungsi *icm*. Untuk model Buhlmann tidak mempertimbangkan adanya pembobotan, premi dapat ditentukan sebagai berikut:

```
> cm(~state, hachemeister, ratios=ratio.1:ratio.12)
Call:
cm(formula = ~state, data = hachemeister, ratios = ratio.1:ratio.12)

Structure Parameters Estimators

Collective premium: 1671.017

Between state variance: 72310.02
Within state variance: 46040.47
```

Berikut hasil simulasi untuk model Buhlmann-Straub (memperhitungkan adanya pembobotan) yang menggunakan model Bichsel Straub:

```
> cm(~state, hachemeister, ratios=ratio.1:ratio.12, weights=weight.1:weight.12)
Call:
cm(formula = ~state, data = hachemeister, ratios = ratio.1:ratio.12,
  weights = weight.1:weight.12)

Structure Parameters Estimators

Collective premium: 1683.713

Between state variance: 89638.73
Within state variance: 139120026
```

Dari simulasi di atas diperoleh nilai premi kredibilitas untuk model Buhlmann adalah 1671.017, sedangkan untuk model Buhlmann-Straub diperoleh premi kredibilitas sebesar 1683.713.

Simulasi Contoh 1

Untuk menguji hasil dari contoh 1, kami melakukan simulasi dengan membangkitkan data besarnya klaim. Data tersebut kami sajikan sebagai berikut:

```
> simulasi
periode bulan.1 bulan.2 bulan.3 bulan.4 bulan.5 bulan.6
1      1 0.6376503 0.6033292 0.06649485 0.06783176 0.0809631 0.07325076
2      2 0.9284553 0.8202483 0.50642640 0.80434591 0.7779573 0.79099336
```

Dari data tersebut diketahui $\bar{X} = 0.513$. Dengan menggunakan formula Z dalam contoh 1, diperoleh

$$Z = \frac{n}{n+6} = \frac{12}{12+6} = 0.67,$$

diperoleh hasil dugaan premi Buhlmann secara teoritis sebagai berikut:

$$(1 - Z)\mu + Z\bar{X} = 0.5088.$$

Dengan menggunakan perintah *cm* dalam package *actuar* diperoleh hasil berikut:

```
> cm(~periode, simulasi, ratios=bulan.1:bulan.6)
Call:
cm(formula = ~periode, data = simulasi, ratios = bulan.1:bulan.6)

Structure Parameters Estimators

Collective premium: 0.5131622

Between periode variance: 0.1250378
Within periode variance: 0.0500418
```

Terlihat bahwa hasil dugaan premi yang diperoleh adalah 0.5132.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penelitian ini didanai oleh PUPT-IPB *under contract* no: 079/SP2H/LT/DRPM/I I/2016.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Hachemeister CA. 1975. Credibility for regression models with application to trend. In *credibility, theory and applications*, Proceeding of the Berkeley Actuarial Research Conference on Credibility, pages 129-163. New York: Academic Press.
- [2] Buhlmann H, Gisler A. 2005. *A course in credibility theory and its applications*. Springer, ISBN 3-5402575-3-5.
- [3] Buhlmann H, Straub E. 1970. Glaubwürdigkeit für Schadensatz. *Bulletin of the Swiss Association of Actuaries*, 70: 111-133.
- [4] Klugman SA, et al. 2012. *Loss Models: From Data to Decisions*. Wiley, ISBN 1118315324.

J M A

Journal of Mathematics and Its Applications

Volume 16, No. 2
Desember 2017

Department of Mathematics
FMIPA – Institut Pertanian Bogor
Jln. Meranti, Kampus IPB
Dramaga - Bogor

Phone/Fax: (0251) 8625276
E-mail: math@ipb.ac.id
jma.mathipb@gmail.com

**Kombinasi Varian Metode Newton dan Metode Halley
untuk Menyelesaikan Persamaan Tak Linear**
D. A. Pratamasyari, B.P. Silalahi, dan S. Guritman

1

**Penyusunan Algoritme Operasi Grup yang Dibangkitkan
Oleh Kurva Hipereliptik $y^2 + xy = x^5 + x^2 + x$ atas**

Lapangan $\mathbb{F}_{2^m}$

S. Nurmalasari, S. Guritman, dan B. P. Silalahi

15

**Model Matematika Penyebaran Penyakit Demam
Berdarah Dengue Tipe SEIR Infeksi Ganda**
E. N. Bano, P. Sianturi, dan Jaharuddin

29

**Penghitungan Kredibilitas Dengan Pustaka Actuar
Dalam R**

I Maulidi, W. Erliana, A.D. Garnadi, S. Nurdiati, dan I G. P. Purnaba

47

**Solusi Semi-Analitik Persamaan Laplace dengan Syarat
Batas Campuran**

I. Maulidi, A.D. Garnadi, M. N. Indro, M.T. Julianto, dan A. Pribadi

55

**Penyelesaian Masalah Syarat Batas Persamaan Diferensial
Biasa Menggunakan Metode Fungsi Green Secara Symbolic**
R. Kurnia, W. Erliana, A.D. Garnadi, S. Nurdiati, I G. P. Purnaba

64

JMA

Journal of Mathematics and Its Applications

Editor In Chief

I Wayan Mangku, *Institut Pertanian Bogor*

Executive Editor

Windiani Erliana, *Institut Pertanian Bogor*

Managing Editor

M. Tito Julianto, *Institut Pertanian Bogor*

Editorial Boards

Alhadi Bustamam	<i>Universitas Indonesia</i>
Amril Aman	<i>Institut Pertanian Bogor</i>
Fahren Bukhari	<i>Institut Pertanian Bogor</i>
I Gusti Putu Purnaba	<i>Institut Pertanian Bogor</i>
Kiki Arianti Sugeng	<i>Universitas Indonesia</i>
Paian Sianturi	<i>Institut Pertanian Bogor</i>
Saib Suwilo	<i>Universitas Sumatera Utara</i>
Siswadi	<i>Institut Pertanian Bogor</i>
Subchan	<i>Institut Teknologi Sepuluh Nopember</i>
Sugi Guritman	<i>Institut Pertanian Bogor</i>
Suhartono	<i>Institut Teknologi Sepuluh Nopember</i>
Tulus	<i>Universitas Sumatera Utara</i>

Department of Mathematics

FMIPA – Institut Pertanian Bogor

Jalan Meranti, Kampus IPB Dramaga Bogor

Phone/Fax: (0251) 8625276

Email: math@ipb.ac.id, jma.mathipb@gmail.com

Website: www.math.ipb.ac.id/ojs

JMA is published twice in a year, in July and December. Editor receives original research papers and critical survey articles in all area of mathematics. In preparing the manuscript, please follow the author guideline (attached on the back cover).

GUIDELINES FOR AUTHORS

JMA is published twice in a year, in July and December and managed by Department of Mathematics, Institut Pertanian Bogor. Editor receives original research papers and critical survey articles in all area of mathematics. Article can be written in English or Indonesian. Article will be reviewed by editor using some criteria. Those are *originality, significancy, technical strength, written presentation, and relevance to the journal*. Author will be given for revising based on recommendation from reviewer/editorial boards. Manuscript could be submitted to:

**Department of Mathematics
FMIPA – Institut Pertanian Bogor
Jalan Meranti, Kampus IPB Dramaga Bogor
Phone/Fax: (0251) 8625276
Email: math@ipb.ac.id, jma.mathipb@gmail.com**

Article is written using microsoft word, A4 paper, one column, Times New Roman font (14 size for title and 12 size for body text), single spacing. Upper/bottom/right margin is 3 cm and left margin is 4 cm (mirrored margin). No more than 20 pages.

Abstract is written in English or Indonesian, no more than 250 words. Keywords: 3-5 words.

Acknowledgment is written at the end of the paper before references.

References should be listed in alphabetical order according to the surnames of the authors at the end of the paper. The following reference style should be used:

- [1] Brown RL. 1997. *Introduction to the Mathematics of Demography*. 3rd Ed. Winsted: Actec Publications.
- [2] Guritman S, Hooweg F, Simonis J. 2001. The Degree of Functions and Weights in Linear Codes. *Discrete Applied Mathematics*. 111(1): 87-102.

For specific details, please download JMA template in the website www.math.ipb.ac.id/ojs.

JMA

Journal of Mathematics and Its Applications

Vol. 16, No. 2, December 2017

<i>Kombinasi Varian Metode Newton dan Metode Halley untuk Menyelesaikan Persamaan Tak Linear</i> D. A. Pratamasyari, B.P. Silalahi, dan S. Guritman	1
<i>Penyusunan Algoritme Operasi Grup yang Dibangkitkan Oleh Kurva Hipereliptik $y^2 + xy = x^5 + x^2 + x$ atas Lapangan $\mathbb{F}_{2^{97}}$</i> S. Nurnalasari, S. Guritman, dan B. P. Silalahi	15
<i>Model Matematika Penyebaran Penyakit Demam Berdarah Dengue Tipe SEIR Infeksi Ganda</i> E. N. Bano, P. Sianturi, dan Jaharuddin	29
<i>Penghitungan Kredibilitas Dengan Pustaka Actuar Dalam R</i> I. Maulidi, W. Erlana, A.D. Garnadi, S. Nurdianti, dan I G. P. Purnaba	47
<i>Solusi Semi-Analitik Persamaan Laplace dengan Syarat Batas Campuran</i> I. Maulidi, A.D. Garnadi, M. N. Indro, M.T. Julianto, dan A. Pribadi	55
<i>Penyelesaian Masalah Syarat Batas Persamaan Diferensial Biasa Menggunakan Metode Fungsi Green Secara Symbolic</i> R. Kurnia, W. Erlana, A.D. Garnadi, S. Nurdianti, dan I G. P. Purnaba	64