Valuasi Opsi Beli (*Call Options*) Eropa bervolatilitas Stokastik dengan menggunakan Modifikasi Metode Karakteristik dan Metode Elemen Hingga.

Agah D. Garnadi*

-

Abstract

Dalam tulisan ini, disajikan pemakaian Metode Elemen Hingga dikombinasikan dengan Modifikasi Metode Karakteristik untuk valuasi opsi beli Eropa bervolatilitas stokastik. Nilai opsi beli Eropa bervolatilitas stokastik ini, dinyatakan sebagai persamaan transport konveksi-difusi yang berevolusi, dengan koefisien bergantung secara spasial untuk suku konveksi dan difusinya, sehingga bersifat 'cacat' (*degenerate*). Dalam aproksimasi waktu, digunakan metode splitting 2-langkah. Pada langkah pertama, digunakan Modifikasi Metode Karakteristik, dan langkah kedua digunakan metode implisit (backward Euler). Sedangkan aproksimasi spasial digunakan Metode Elemen Hingga, dengan menggunakan basis elemen bilinear. Penggunaan Modifikasi Metode Karakteristik, memerlukan interpolasi untuk setiap langkahnya, dalam tulisan ini digunakan interpolasi biharmonik. Sebuah kasus dari Opsi beli Eropa untuk pertukaran mata uang asing akan disajikan sebagai contoh untuk hasil numeriknya.

Katakunci: Metode Elemen Hingga, Modifikasi Metode Karakteristik, Opsi Eropa, Volatilitas Stokastik, Matematika Finansial

Tulisan ini disusun menjadi 3 bagian, pada bagian pertama disajikan rumusan permasalahan. Pada bagian kedua, disajikan metode numerik untuk memecahkan masalah sebagaimana dinyatakan dalam bagian pertama, dengan mempergunakan metode elemen hingga sebagai bagian dari metode numeriknya. Dan pada bagian akhir, disajikan satu uji coba atas metode numerik yang dibahas.

Terkait dengan tulisan ini, ada baiknya ditinjau hasil yang berkaitan dengan metode numerik yang digunakan untuk memecahkan persoalan yang sama maupun serupa:

1. Metode Elemen Hingga dengan upwinding digunakan oleh [1] untuk menyelesaikan masalah yang sama. Digunakan elemen segi-tiga dengan kisi yang tak seragam.
2. Kombinasi Metode Elemen Hingga dan Metode Volum Hingga [3] digunakan untuk menyelesaikan masalah hampir serupa. Digunakan kisi segi-tiga baik untuk elemen hingga maupun volum hingga.
3. Masalah analitis secara umum disajikan secara rinci dalam [4]. Metode Monte Carlo digunakan secara langsung untuk permasalahan yang lebih umum.
4. Sementara itu, Metode Beda Hingga digunakan [6] dengan kisi tak-seragam untuk menyelesaikan masalah yang sama dengan hal yang dibahas tulisan ini.

*Departemen Matematika, FMIPA-IPB, Jl Raya Pajajaran, 16144 Bogor. E-mail: agah.garnadi@gmail.com

1 Rumusan Masalah

1.1 Nilai opsi dengan volatilitas stokastik model Heston

Perhatikan sebuah opsi yang merupakan fungsi dari asset S dan variansi v , yang dinyatakan oleh persamaan diferensial stokastik:

$$dS = \mu S dt + \sqrt{v} S dW_1 \quad (1.1)$$

$$dv = \kappa(\theta - v) dt + \xi \sqrt{v} dW_2 \quad (1.2)$$

dengan W_1 dan W_2 merupakan dua proses Wiener (gerak Brown) dengan korelasi ρ . Dengan parameter yang diberikan di bawah.

Fungsi nilai (*value function*) dari klaim kontingen umum $U(t, v, s)$ yang bernilai $g(S) = U(T, v, S)$ pada saat jatuh tempo T , memenuhi persamaan diferensial berikut yang diturunkan oleh Heston [5] untuk U :

$$\begin{aligned} U_t + \frac{1}{2} \xi^2 v U_{vv} + \rho \xi v S U_{vS} + \frac{1}{2} v S^2 U_{SS} \\ + [\kappa(\theta - v) - \lambda v] U_v + r S U_S - r U = 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

dengan:

- v : variansi
- S : spot
- t : waktu
- ξ : volatilitas dari volatilitas
- ρ : korelasi antar dua proses (pembangkit) Wiener
- $\kappa(> 0)$: laju dari reversi rata-rata (*rate of mean reversion*)
- $\theta(> 0)$: variansi jangka panjang
- r : laju tingkat bunga domestik

Uraian rinci bagaimana persamaan diferensial tersebut dengan proses Stokastik, serta uraian arti ekonomisnya dari model tersebut, dipersilahkan merujuk ke artikel Heston [5].

1.1.1 Syarat batas untuk Opsi Vanilla

Untuk persamaan diferensial parsial di atas, syarat batas berikut ini digunakan:

$$U(T, v, S) = [\phi(S - K)]^+, \quad (1.4)$$

$$U(t, v, 0) = \frac{1 - \phi}{2} K e^{-r_d \tau}, \quad (1.5)$$

$$U_S(t, v, \infty) = \frac{1 + \phi}{2} K \quad (1.6)$$

$$r U(t, 0, S) = r S U_S(t, 0, S) + \kappa \theta U_v(t, 0, S) + U_t(t, 0, S), \quad (1.7)$$

$$U(t, \infty, S) = \begin{cases} S & (\phi = +1) \\ S e^{-r\tau} & (\phi = -1), \end{cases} \quad (1.8)$$

dengan:

- K : harga 'strike'
- $\tau = T - t$: waktu sebelum jatuh tempo
- ϕ : variabel bernilai +1 untuk opsi beli

1.2 Penyederhanaan

Dengan memperkenalkan peubah (variabel) baru

$$x = \ln(S/K), \tau = (T - t),$$

dan mendefinisikan fungsi nilai akibat perubahan variabel

$$w(\tau, v, x) = U(t, v, S),$$

persamaan diferensial (1.3) menjadi:

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \nabla \bullet (\mathbf{D}(v, x) \nabla w) - \mathbf{v}(v, x) \bullet \nabla w - r w \quad (1.9)$$

$$w(0, v, x) = g(K e^x) \quad (1.10)$$

dengan:

$$\mathbf{D}(v, x) = \frac{1}{2} v \begin{bmatrix} \xi^2 & \rho \xi \\ \rho \xi & 1 \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

$$\mathbf{v}(v, x) = \begin{bmatrix} -\kappa(\theta - v) + \lambda v + \frac{1}{2} \xi^2 \\ -r + \frac{1}{2} v + \frac{1}{2} \rho \xi \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

Daerah setengah bidang (*semi-infinite domain*) dipancang menjadi daerah terbatas: $\Omega = (v_{\min}, v_{\max}) \times (x_{\min}, x_{\max}) \in R^2, T > 0, Q := \Omega \times T$

$$\begin{aligned} \Gamma_L &= \{(v_{\min}, x); x_{\min} \leq x \leq x_{\max}\} & ; & \quad \Gamma_R = \{(v_{\max}, x); x_{\min} \leq x \leq x_{\max}\} \\ \Gamma_B &= \{(v, x_{\min}); v_{\min} \leq v \leq v_{\max}\} & ; & \quad \Gamma_T = \{(v, x_{\max}); v_{\min} \leq v \leq v_{\max}\} \\ \Gamma_D &= \Gamma_B \cup \Gamma_L \cup \Gamma_R & \quad \Gamma_N &= \Gamma_T \\ \partial\Omega &= \Gamma_a \cup \Gamma_b \cup \Gamma_c \cup \Gamma_d \end{aligned}$$

Di batas $\partial\Omega$, ditetapkan :

- Syarat batas di Γ_D :

$$\Gamma_L : w(\tau, v_{\min}, x) = K e^x \Phi(d_+) - K e^{-r\tau} \Phi(d_-) \quad (1.13)$$

$$\Gamma_R : w(\tau, v_{\max}, x) = K e^x \quad (1.14)$$

$$\Gamma_B : w = \lambda w(\tau, v_{\max}, x_{\min}) + (1 - \lambda) w(\tau, v_{\min}, x_{\min}) \quad (1.15)$$

$$\lambda = \frac{v - v_{\min}}{v_{\max} - v_{\min}} \quad (1.16)$$

- di Γ_T ditetapkan syarat berikut :

$$\frac{\partial}{\partial \nu} w(\tau, v, x_{\max}) := \mathbf{D}(v, x) \bullet \vec{n} = \frac{1}{2} v K e^x \quad (1.17)$$

2 Metode Karakteristik dan Aproksimasi Elemen Hingga

Perhatikan bahwa persamaan diferensial parsial di atas, memiliki ciri yang cukup khas. Jika diambil $v \rightarrow 0$, maka koefisien $\mathbf{D}$ akan lenyap, sehingga persamaan diferensial parsial memiliki ciri sebagai sebuah persamaan hiperbolik. Dengan demikian persamaan tersebut merupakan persamaan parabolik yang cacat (*degenerate*).

Persamaan diferensial parsial parabolik yang cacat ini, ditemui pula di bidang teknologi perminyakan dengan koefisien $\mathbf{D}$ dan $\mathbf{v}$ yang konstan [2]. Biasanya, digunakan metode numerik yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan parabolik yang degenerate ialah mengkombinasikan metode karakteristik dengan metode elemen hingga/metode volum hingga/metode beda hingga.

2.1 Metode Karakteristik

Kita tuliskan (1.9) menjadi bentuk berikut:

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} + \mathbf{v}(v, x) \bullet \nabla w - \nabla \bullet (\mathbf{D}(v, x) \nabla w) + r w = 0 \quad (2.18)$$

Observasi berikut:

$$\frac{\partial w}{\partial c} = \frac{\partial w}{\partial \tau} + \mathbf{v}(v, x) \bullet \nabla w \quad (2.19)$$

dengan c menyatakan 'satu satuan waktu sepanjang karakteristik', menunjukkan bahwa dapat dinyatakan satu suku dapat ditafsirkan sebagai transport sepanjang karakteristik dalam waktu c akibat adveksi $\mathbf{v}$. Sehingga persamaan diferensial parsialnya dapat dituliskan yang dinyatakan dalam arah lintasan karakteristik:

$$\frac{\partial w}{\partial c} - \nabla \bullet (\mathbf{D}(v, x) \nabla w) + r w = 0 \quad (2.20)$$

2.2 Masalah Kontinu

Misal $H_{\Gamma_D}^1 = \{\phi \in H^1(\Omega); \phi|_{\Gamma_D} = 0\}$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial c} \phi + \int_{\Omega} \mathbf{D} \nabla w \bullet \nabla \phi + \int_{\Omega} r w \phi = \int_{\Gamma_N} w_N \phi - \int_{\Omega} \mathbf{D} \nabla w_D \bullet \nabla \phi, \quad \forall \phi \in H_{\Gamma_D}^1$$

2.3 Masalah Diskret

Misal $V_h \subset H^1, \dim(V_h) = n < \infty$.

Misal $V_{h:D} = V_h \cap H_{\Gamma_D}^1, \dim(V_{h:D}) = n - m < \infty, n > m \geq 2$.

$$\int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial c} \phi_h + \int_{\Omega} \mathbf{D} \nabla w \bullet \nabla \phi_h + \int_{\Omega} r w \phi_h = \int_{\Gamma_N} w_N \phi_h - \int_{\Omega} \mathbf{D} \nabla w_D \bullet \nabla \phi_h, \quad \forall \phi_h \in V_{h:D}$$

2.4 Masalah dimensi hingga

Misal $\{\phi_i\}_{i=1}^n$ merupakan basis dari V_h .

$$\int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial c} \phi_i + \int_{\Omega} \mathbf{D} \nabla w \bullet \nabla \phi_i + \int_{\Omega} r w \phi_i = \int_{\Gamma_N} w_N \phi_i - \int_{\Omega} \mathbf{D} \nabla w_D \bullet \nabla \phi_i, \quad \forall \phi_i \in V_{h:D}$$

2.5 Masalah Waktu-diskret

Misalkan interval waktu $[0, T]$ di sekat menjadi $0 = \tau_0 < \tau_0 + d\tau < \dots < \tau_0 + N \cdot d\tau = T$.

Untuk $k = 1, \dots, N$, tulis: $w^{(k)} = w(k \cdot d\tau, v, x)$.

Dengan menuliskan $w_h^{(k)} = \sum_{i=1}^n w_i^{(k)} \phi_i$ yang dinyatakan dengan mempergunakan fungsi basis, kita peroleh :

$$\bar{M}\mathbf{w}^{(k+1)} + A\mathbf{w}^{(k+1)} + \hat{M}\mathbf{w}^{(k+1)} = \bar{M}\tilde{\mathbf{w}}^{(k)} + \mathbf{b}_N^{(k+1)} - A\mathbf{w}_D^{(k+1)},$$

dengan $\bar{M} = \frac{1}{d\tau}M$ dan $\tilde{M} = r_d M$, serta secara berturut-turut M dan A menyatakan matriks massa dan kekakuan elemen. Sehingga untuk setiap $k = 0, 1, 2, \dots, N$, harus diselesaikan sistem persamaan linear berikut:

$$((\frac{1}{d\tau} + r_d)M + A)\mathbf{w}^{(k+1)} = \bar{M}\tilde{\mathbf{w}}^{(k)} + \mathbf{b}_N^{(k+1)} - A\mathbf{w}_D^{(k+1)}$$

2.6 Interpolasi Biharmonik

Perhatikan bahwa diperlukan interpolasi untuk setiap langkah k . Pada diskretisasi (waktu) metode karakteristik, didasarkan dengan cara: pada suatu titik-koordinat di waktu langkah- k , maka ditentukan ke posisi mana nilai di titik tersebut, pada langkah waktu ke- $(k+1)$, akan pindah akibat kecepatan $\mathbf{v}$.

Pad modifikasi metode karakteristik, runtut berpikir dengan cara mundur: pada suatu titik koordinat di waktu langkah $(k+1)$, maka ditentukan dari posisi mana nilai di titik tersebut berasal saat langkah waktu ke- k yaitu solusi waktu ke- k . Dengan demikian diperlukan metode interpolasi untuk menentukan nilai-nilai yang diperlukan berasal dari solusi ke- k .

Salah satu interpolasi yang mungkin digunakan ialah menggunakan metode interpolasi biharmonik sebagaimana diuraikan oleh [9] dan diimplementasikan di lingkungan MATLAB. Dengan demikian, secara otomatis teori yang diberikan oleh [7, 8] terwujud.

3 Uji Numerik

Metode numerik di atas di implementasikan mempergunakan MATLAB.

Untuk uji numerik, kita gunakan parameter berikut ini :

r_d	$\log(1.052)$	r_f	$\log(1.048)$	
θ	0.06	κ	2.5	
ξ	0.5	ρ	0.1	λ 0
K	1	T	0.25	

Dalam implementasi, digunakan elemen segi empat pada kisi yang tak seragam dan terstruktur.

Daerah terpancung yang digunakan: $[v_{\min}, v_{\max}] \times [x_{\min}, x_{\max}]$, $v_{\min} = 0.025$, $v_{\max} = 0.5$, $x_{\min} = -x_{\max}$, $x_{\max} = 5.0$ dengan kisi tak-seragam yang merupakan produk kisi tak seragam di selang $[v_{\min}, v_{\max}]$ dengan kisi seragam di selang $[x_{\min}, x_{\max}]$.

Penutup

Dari uji coba numerik serta uraian metode numerik, sejumlah rekomendasi serta penggunaan lebih lanjut dapat dinyatakan:

1. Metode numerik di atas, pada prinsipnya dapat diperulas untuk digunakan dalam memecahkan permasalahan dalam Matematika Keuangan untuk beberapa produk, misalnya Opsi

Amerika dengan volatilitas stokastik, *Convertible Bond*, serta beberapa jenis produk lainnya.

2. Pada implementasi metode numerik di atas, digunakan interpolasi bersifat global. Dari pengamatan, langkah ini sangat mendominasi waktu eksekusi setiap langkah, perlu dipertimbangkan metode *Domain Decomposition*, karena interpolasi diperlukan yang bersifat lokal.
3. Metode adaptive refinement. Pada tulisan ini, kisi dipilih secara tetap yang secara apriori diharapkan masih mampu menangkap resolusi ruang. Dengan mempergunakan adaptiver refinement, diharapkan secara dinamik, kisi dapat berubah sesuai kebutuhan.

Terima kasih.

Tulisan ini ditulis saat penulis menjadi tamu di Departemen Matematika, FMIPA-ITB. Penulis menghaturkan terima kasih atas segala bantuannya, dan kepada Majelis Departemen Matematika atas persetujuannya.

References

- [1] T. Appel, G. Winkler, & U. Wystup, Valuation of Options in Heston's Stochastic Volatility Model Using Finite Element Methods, In: J. Häkälä & U. Wystup (eds.), *Foreign Exchange Risk. Models, Instruments and Strategies*, Risk Publications, London, 2002.
- [2] C.Y. Chiang, M.F. Wheeler, & P.B. Bedient, A Modified method of characteristic technique and mixed finite elements method for simulation of groundwater solute transport *Water Resour. Res.*, **25**(7), (1989) 1541-1549
- [3] P.A. Forsyth, K.R. Vetzal, & R. Zwan, A Finite Element Approach to the pricing of Discrete Lookbacks with stochastic volatility, *Appl. Math. Finance*, **6** (1999) 87-106
- [4] E. Fournie, J.M. Lasry, & N. Touzi, Monte Carlo Methods for Stochastic Volatility Models, in: L.C.G. Rogers & D. Talay, *Numerical Methods in Finance*, Cambridge University Press, 1997.
- [5] S. Heston, A Closed-form solution for options with Stochastic volatility with applications to bond and currency options, *The Review of Financial Studies*, **6**(2), 1993
- [6] T. Kluge, Pricing derivatives in stochastic volatility models using the finite difference method, Diplom Thesis, Fak. Mathematik, TU-Chemnitz, Chemnitz, 2002.
- [7] J.L. Lions & O. Pironneau, High precision with low order finite elements. in: A. Sulem (ed) *Proc. Conf. in honour of A. Bensoussan: on Optimal Control and Partial Differential Equations*, Springer, 2000
- [8] O. Pironneau, The Method of Characteristics with Gradients and integrals, in J. Periaux (ed), *Proc. Euro days 2000*, Wiley, 2001
- [9] D.T. Sandwell, Biharmonic splines interpolation of GEOS-3 and SEASAT altimeter data, *Geophys. Res. Lett.*, **2** (1987), 139-142
- [10] R.E. White, *An Introduction to The Finite Element Method with Applications to Nonlinear Problems*, John-Wiley, New York, 1985.