Free E-book
Teknik Hitung Manual
Analisis Regresi Linear Berganda
Dua Variabel Bebas

Oleh:

Budi Setiawan

Founder of Belajar dan Berbagi Bersama Budi Setiawan – B4S

facebook.com/budisetiawan999

<http://budisetiawan999.blogspot.com>

Sekapur Sirih

Alhamdulillahirobbil alamiin... segala puji dan syukur ke hadirat Allah SWT, *e-book* ini dapat saya tulis dan pada akhirnya sampai ke tangan anda semua. Pada *e-book* ini saya menulis secara singkat mengenai teknik hitung manual analisis regresi linear berganda (2 variabel bebas). Motivasi saya menulis *e-book* ini adalah dalam upaya belajar dan berbagi dan sebagai ikhtiar saya agar sedikit ilmu yang dimiliki dapat bermanfaat bagi orang lain. Selain itu, *e-book* ini juga sebagai koreksi kesalahan teknis cetak yang terdapat pada buku **“Menganalisis Statistik Bisnis dan Ekonomi dengan SPSS 21”** yang diterbitkan oleh Penerbit ANDI Yogyakarta (2013).

Analisis regresi linear berganda yang dilakukan secara manual sebagaimana dijelaskan pada *e-book* ini oleh sebagian orang dianggap sulit. Hal ini tidaklah salah, mengingat diperlukan pemahaman perhitungan matematika yang baik, misalnya dalam menghitung nilai matriks determinan dan menyelesaikan persamaan normal dengan menggunakan metode eliminasi. Itulah mengapa pada aplikasinya kita membutuhkan bantuan software olahdata statistik, agar data statistik yang ada dapat diolah secara cepat dan tepat. Banyak tersedia *software* olahdata statistik, dari mulai yang berbayar hingga yang gratis (*open source*). Namun demikian pemahaman dasar tentang teknik analisis regresi linear berganda (yang dibahas pada *e-book* ini) secara manual akan sangat membantu kita dalam memahami *output* hasil analisis data dengan menggunakan *software*.

Salah satu *software* yang dapat dipertimbangkan untuk dipilih dan digunakan dalam analisis data statistik adalah IBM-SPSS atau yang lebih dikenal dengan nama SPSS. Untuk dapat mengoperasikan dengan baik, saya menyarankan anda untuk membaca buku terkait cara menggunakan software SPSS yang banyak tersedia di pasaran. Salah satu referensi yang dapat anda pertimbangkan adalah buku saya yang berjudul **“Teknik Praktis Analisis Data Penelitian Sosial dan Bisnis dengan SPSS”** yang diterbitkan oleh Penerbit ANDI Yogyakarta (2015).

Segala kebenaran yang tertulis pada buku maupun *e-book* ini sepenuhnya berasal dari Allah SWT, sedangkan segala kesalahan dan kealpaan yang terjadi adalah bersumber dari kebodohan saya sebagai penulis. *E-book* ini dapat diunduh dan disebarluaskan secara GRATIS, saya izinkan dan iklaskan selama tidak untuk kepentingan komersial dan tidak mengubah sebagian maupun seluruh isi dari *e-book* ini.

Demikian, semoga bermanfaat.

“Ya Allah tambahilah ilmuku dan pertinggikanlah kecerdasanku”
“Ya Allah lapangkanlah dadaku, mudahkanlah urusanku dan jelaskanlah lisanku agar orang-orang memahami perkataanku”
Ammiin Yaa Robbal Alamiin

Bogor, 20 Juni 2015
Budi Setiawan

Pendahuluan

Teknik regresi linear (garis lurus) berganda digunakan ketika kita ingin menganalisis pengaruh maupun memprediksi k variabel bebas (*independent variable*), yaitu $X_1, X_2, \dots, X_k$ dengan satu variabel terikat (*dependent variable*), yaitu Y . Untuk menghitung $b_0, b_1, b_2, \dots, b_k$ maka dapat kita gunakan Metode Kuadrat Terkecil (*Least Square Method*) yang menghasilkan persamaan normal sebagai berikut:

$$\begin{array}{cccccc} b_0 n & + b_1 \sum X_1 & + b_2 \sum X_2 & + \dots + b_k \sum X_k & = & \sum Y \\ b_0 \sum X_1 & + b_1 \sum X_1^2 & + b_2 \sum X_1 X_2 & + \dots + b_k \sum X_1 X_k & = & \sum X_1 Y \\ b_0 \sum X_2 & + b_1 \sum X_2 X_1 & + b_2 \sum X_2^2 & + \dots + b_k \sum X_2 X_k & = & \sum X_2 Y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_0 \sum X_k & + b_1 \sum X_k X_1 & + b_2 \sum X_k X_2 & + \dots + b_k \sum X_k^2 & = & \sum X_k Y \end{array}$$

Untuk $k = 2$, $Y' = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2$, satu variabel tak bebas (Y), dan dua variabel bebas (X_1 dan X_2) maka b_0, b_1 , dan b_2 dihitung dari persamaan normal berikut:

$$\begin{array}{cccc} b_0 n & + b_1 \sum X_1 & + b_2 \sum X_2 & = \sum Y \\ b_0 \sum X_1 & + b_1 \sum X_1^2 & + b_2 \sum X_1 X_2 & = \sum X_1 Y \\ b_0 \sum X_2 & + b_1 \sum X_2 X_1 & + b_2 \sum X_2^2 & = \sum X_2 Y \end{array}$$

(ada tiga persamaan dengan tiga variabel yang tidak diketahui nilainya, yaitu b_0, b_1 , dan b_2).

Metode Analisis

1. Metode Matriks

Persamaan tersebut di atas dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan matriks sebagai berikut:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} n & \sum X_1 & \sum X_2 \\ \sum X_1 & \sum X_1^2 & \sum X_1 X_2 \\ \sum X_2 & \sum X_2 X_1 & \sum X_2^2 \end{pmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}}_b = \underbrace{\begin{pmatrix} \sum Y \\ \sum X_1 Y \\ \sum X_2 Y \end{pmatrix}}_H$$

Dengan: A = Matriks (diketahui)

H = Vektor kolom (diketahui)

b = vektor kolom (tidak diketahui)

Untuk menentukan nilai b_0 , b_1 , dan b_2 dapat digunakan determinan matriks

$$b_0 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} \quad b_1 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} \quad b_2 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)}$$

Di mana:

$$A_1 = \begin{bmatrix} h_1 & a_{12} & a_{13} \\ h_2 & a_{22} & a_{23} \\ h_3 & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}; \quad A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & h_1 & a_{13} \\ a_{21} & h_2 & a_{23} \\ a_{31} & h_3 & a_{33} \end{bmatrix}; \quad A_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & h_1 \\ a_{21} & a_{22} & h_2 \\ a_{31} & a_{23} & h_3 \end{bmatrix}$$

Tabel 1.

Y	X ₁	X ₂	X ₁ Y	X ₂ Y	X ₁ X ₂	X ₁ ²	X ₂ ²
6	7	4	42	24	28	49	16
7	9	6	63	42	54	81	36
3	4	6	12	18	24	16	36
6	7	8	42	48	56	49	64
5	5	8	25	40	40	25	64
8	9	7	72	56	63	81	49
7	8	5	56	35	40	64	25
5	6	9	30	45	54	36	81
5	6	10	30	50	60	36	100
5	6	6	30	30	36	36	36
7	8	12	56	84	96	64	144
6	7	9	42	54	63	49	81
Σ = 70	82	90	500	526	614	586	732

$$\begin{pmatrix} n & \sum X_1 & \sum X_2 \\ \sum X_1 & \sum X_1^2 & \sum X_1 X_2 \\ \sum X_2 & \sum X_2 X_1 & \sum X_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum Y \\ \sum X_1 Y \\ \sum X_2 Y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 12 & 82 & 90 \\ 82 & 586 & 614 \\ 90 & 614 & 732 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 \\ 500 \\ 526 \end{pmatrix}$$

Sehingga diketahui

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 82 & 90 \\ 82 & 586 & 614 \\ 90 & 614 & 732 \end{pmatrix} \quad A_1 = \begin{pmatrix} 70 & 82 & 90 \\ 500 & 586 & 614 \\ 526 & 614 & 732 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 12 & 70 & 90 \\ 82 & 500 & 614 \\ 90 & 526 & 732 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 12 & 82 & 70 \\ 82 & 586 & 500 \\ 90 & 614 & 526 \end{pmatrix}$$

Gunakan function =MDETERM(Array) di Excel untuk memudahkan perhitungan matriks determinan. Sehingga diketahui:

Determinan A = 17.544

Determinan A1 = -3.272

Determinan A2 = 14.832

Determinan A3 = 586

Sehingga dengan demikian dapat diperoleh hasil:

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{\det(A_1)}{\det(A)} & b_1 &= \frac{\det(A_2)}{\det(A)} & b_2 &= \frac{\det(A_3)}{\det(A)} \\ &= \frac{-3272}{17544} & &= \frac{14832}{17544} & &= \frac{568}{17544} \\ &= -0,186 & &= 0,845 & &= 0,032 \end{aligned}$$

Persamaan regresi linear bergandanya adalah $Y' = -0,186 + 0,845 X_1 + 0,032 X_2$

2. Metode Persamaan Normal (Metode Eliminasi)

$$b_0 n + b_1 \sum X_1 + b_2 \sum X_2 = \sum Y$$

$$b_0 \sum X_1 + b_1 \sum X_1^2 + b_2 \sum X_1 X_2 = \sum X_1 Y$$

$$b_0 \sum X_2 + b_1 \sum X_2 X_1 + b_2 \sum X_2^2 = \sum X_2 Y$$

$$b_0 12 + b_1 82 + b_2 90 = 70 \dots\dots\dots (1)$$

$$b_0 82 + b_1 586 + b_2 614 = 500 \dots\dots\dots (2)$$

$$b_0 90 + b_1 614 + b_2 732 = 526 \dots\dots\dots (3)$$

$$b_0 \cdot 12 + b_1 \cdot 82 + b_2 \cdot 90 = 70 \quad \text{I X 82} \rightarrow 984 b_0 + 6724 b_1 + 7380 b_2 = 5740$$

$$b_0 \cdot 82 + b_1 \cdot 586 + b_2 \cdot 614 = 500 \quad \text{I X 12} \rightarrow \underline{984 b_0 + 7032 b_1 + 7368 b_2 = 6000 \quad (-)}$$

$$- 308 b_1 + 12 b_2 = -260 \dots (4)$$

$$b_0 \cdot 82 + b_1 \cdot 586 + b_2 \cdot 614 = 500 \quad \text{I X 90} \rightarrow 7380 b_0 + 52740 b_1 + 55260 b_2 = 45000$$

$$b_0 \cdot 90 + b_1 \cdot 614 + b_2 \cdot 732 = 526 \quad \text{I X 82} \rightarrow \underline{7380 b_0 + 50348 b_1 + 60024 b_2 = 43132 \quad (-)}$$

$$2392 b_1 - 4764 b_2 = 1868 \dots (5)$$

$$-308 b_1 + 12 b_2 = -260 \quad \text{I X } -397 \rightarrow 122276 b_1 - 4764 b_2 = 103220$$

$$2392 b_1 - 4764 b_2 = 1868 \quad \text{I X 1} \rightarrow 2392 b_1 - 4764 b_2 = 1868$$

$$119884 b_1 = 101352$$

$$b_1 = 0,8454$$

$$-308 b_1 + 12 b_2 = -260$$

$$-308 (0,8454) + 12 b_2 = -260$$

$$-260,389 + 12 b_2 = -260$$

$$12 b_2 = -260 + 260,389$$

$$b_2 = 0,0324$$

$$b_0 \cdot 12 + b_1 \cdot 82 + b_2 \cdot 90 = 70$$

$$12 b_0 + 82 (0,8454) + 90 (0,0324) = 70$$

$$12 b_0 + 69,3228 + 2,916 = 70$$

$$12 b_0 = 70 - 72,2388$$

$$b_0 = -0,1866$$

Persamaan regresi linear bergandanya adalah **$Y' = -0,186 + 0,845 X_1 + 0,032 X_2$**

3. Uji Parsial (Uji t)

Uji t dikenal dengan uji parsial, yaitu untuk menguji bagaimana pengaruh masing-masing variabel bebasnya secara sendiri-sendiri (parsial) terhadap variabel terikatnya. Uji ini dapat dilakukan dengan membandingkan t_{hitung} dengan t_{tabel} .

Statistik uji adalah : $t_{hitung} = b_i / Sb_i$

di mana:

b_i = koefisien regresi variabel bebas ke-i ($i = 1, 2$). Pada contoh soal pada *e-book* ini diketahui nilai koefisien $b_1 = 0,845$ dan nilai koefisien $b_2 = 0,032$

Sb_i = Kesalahan baku/standard error penduga b_i ($i = 1, 2$), dapat dihitung dengan rumus:

$$Sb_1 = S_{Y.X1.X2} : \sqrt{\{(\sum X_1^2 - n\tilde{X}_1^2)(1 - r_{X1X2}^2)\}}$$

$$Sb_2 = S_{Y.X1.X2} : \sqrt{\{(\sum X_2^2 - n\tilde{X}_2^2)(1 - r_{X1X2}^2)\}}$$

di mana:

Sb_1 : Standard error penduga b_1

Sb_2 : Standard error penduga b_2

$S_{Y.X1.X2}$: Standard error variabel Y berdasarkan variabel X yang diketahui, dengan rumus:

$$S_{Y.X1.X2} = \sqrt{SSE : (n - (k + 1))}$$

$\sum X_1^2$: Jumlah X_1 kuadrat

$\tilde{X}_1^2$: Kuadrat dari X_1 rata-rata

$\sum X_2^2$: Jumlah X_2 kuadrat

$\tilde{X}_2^2$: Kuadrat dari X_2 rata-rata

Untuk mempermudah anda memahaminya, saya sampaikan dalam bentuk tabel sebagai berikut:

Tabel 2.

Tahun	Y	X ₁	X ₂	X ₁ ²	X ₂ ²	Ŷ	Yi - Ŷ	(Yi - Ŷ) ²	— (Ŷ - Y)	— (Ŷ - Y) ²
2007	6	7	4	49	16	5,857	0,143	0,020449	0,02367	0,00056
2008	7	9	6	81	36	7,611	-0,611	0,373321	1,77767	3,1601
2009	3	4	6	16	36	3,386	-0,386	0,148996	-2,4473	5,98944
2010	6	7	8	49	64	5,985	0,015	0,000225	0,15167	0,023
2011	5	5	8	25	64	4,295	0,705	0,497025	-1,5383	2,36647
2012	8	9	7	81	49	7,643	0,357	0,127449	1,80967	3,27489
2013	7	8	5	64	25	6,734	0,266	0,070756	0,90067	0,8112
2014	5	6	9	36	81	5,172	-0,172	0,029584	-0,6613	0,43736
2015	5	6	10	36	100	5,204	-0,204	0,041616	-0,6293	0,39606
2016	5	6	6	36	36	5,076	-0,076	0,005776	-0,7573	0,57355
2017	7	8	12	64	144	6,958	0,042	0,001764	1,12467	1,26488
2018	6	7	9	49	81	6,017	-0,017	0,000289	0,18367	0,03373
Jumlah	70	82	90	586	732			1,31725		18,3313

Sehingga dengan demikian diketahui:

$$\text{Sum Square of Error (SSE)} = 1,317$$

$$\text{Sum Square of Regression (SSR)} = 18,331$$

$$S_{Y.X_1.X_2} = \sqrt{\text{SSE} : (n - (k + 1))} \rightarrow \text{gunakan Excel:} = \text{SQRT}(1,317 / (12 - (2 + 1))) = 0,38257$$

$$r_{X_1 X_2} \rightarrow \text{gunakan Excel:} = \text{Pearson}(\text{Array1}; \text{Array2}) = -0,0261$$

$$\text{Maka } 1 - r_{X_1 X_2}^2 = 0,9993$$

$$S_{b_1} = S_{Y.X_1.X_2} : \sqrt{\{(\sum X_1^2 - n\bar{X}_1^2)(1 - r_{X_1 X_2}^2)\}}$$

$$S_{b_1} = 0,3825 : \sqrt{((586 - 560,33) \times (0,9993))}$$

$$= 0,0755$$

$$t \text{ hitung variabel } X_1 = 0,845 / 0,0755 = 11,1869$$

Nilai t tabel dapat diketahui dengan memasukkan rumus berikut ini pada Excel:

$$= \text{TINV}(0,05; (12 - 1))$$

$$= 2,2009$$

Nilai t hitung $11,1869 > t \text{ tabel } 2,2009$ sehingga dengan demikian H_0 ditolak dan H_1 diterima, yakni X_1 berpengaruh signifikan terhadap Y .

$$Sb_2 = S_{Y.X_1.X_2} : \sqrt{\{(\sum X_2^2 - n\bar{X}_2^2)(1 - r_{X_1X_2}^2)\}}$$

$$Sb_2 = 0,3825 : \sqrt{((732 - 675) \times (0,9993))}$$

$$= 0,0507$$

$$t \text{ hitung variabel } X_2 = 0,032/0,0507 = 0,6313$$

Nilai t tabel dapat diketahui dengan memasukkan rumus berikut ini pada Excel:

$$=TINV(0,05;(12-1))$$

$$= 2,2009$$

Nilai t hitung $0,6313 < t \text{ tabel } 2,2009$ sehingga dengan demikian H_0 diterima dan H_2 ditolak, yakni X_2 tidak berpengaruh signifikan terhadap Y .

4. Uji Simultan (Uji F)

Uji F dilakukan untuk mengetahui apakah variabel X_1 dan X_2 secara bersama-sama (simultan) berpengaruh terhadap Y . Untuk menjawab hal tersebut maka perlu dibandingkan nilai F hitung dengan F tabel dengan derajat kebebasan pembilang (Numerator, df) menggunakan $K-1$ atau jumlah variabel dikurangi 1. Derajat kebebasan penyebut (Denominator, df) menggunakan $n - K$ atau jumlah sampel dikurangi jumlah variabel.

F hitung dapat diketahui dengan rumus sebagai berikut:

$$F \text{ hitung} = \frac{MSR}{MSE}$$

di mana:

$$MSR = \frac{SSR}{k}$$

$$MSE = \frac{SSE}{n - k - 1}$$

$$MSR = \frac{SSR}{k}$$

Mengacu pada Tabel 2 diketahui:

$$\begin{array}{ll} SSE = 1,31725 & SSR = 18,3313 \\ MSE = 0,1463611 & MSR = 9,16563 \end{array}$$

Sehingga dengan demikian nilai F hitung adalah: $9,16563/0,14636 = 62,634$

Menggunakan bantuan Excel dapat diketahui nilai F tabel dengan menggunakan rumus sebagai berikut:

=FINV(0,05;2;9)

= 4,256

Nilai F hitung $62,634 > F$ tabel 4,256 sehingga keputusannya adalah tolak H_0 . Interpretasinya adalah X_1 dan X_2 secara bersama-sama berpengaruh signifikan terhadap Y , atau terdapat minimal satu variabel bebas yang berpengaruh signifikan terhadap Y yaitu variabel X_1 .

Referensi

Setiawan, B. (2013). Menganalisa Statistik Bisnis dan Ekonomi dengan SPSS 21. Andi: Yogyakarta

_____. (2015). Teknik Praktis Analisis Data Penelitian Sosial dan Bisnis dengan SPSS. Andi: Yogyakarta