Muhammad Nur Aidi

Pengantar Teori Peluang
Untuk Aktuaris

PENGANTAR TEORI PELUANG UNTUK AKTUARIS

Muhammad Nur Aidi

KATA SAMBUTAN PERSATUAN AKTUARIS INDONESIA

Persatuan Aktuaris Indonesia mengucapkan selamat atas penerbitan "Seri Catatan Kuliah Sains Aktuaria" dalam kerangka penyediaan bahan belajar bagi mereka yang menempuh pendidikan di bidang sains aktuaria. Pengajaran isi kurikulum pendidikan Persatuan Aktuaris Indonesia serta isi kurikulum pendidikan sains aktuaria di berbagai universitas di Indonesia secara umum akan terbantu dengan adanya pengadaan Seri Catatan Kuliah ini.

Sebagai organisasi profesi, Persatuan Aktuaris Indonesia akan senantiasa mendorong upaya berbagai pihak untuk menghasilkan karya bagi pembangunan di bidang sains aktuaria di Indonesia. Seri Catatan Kuliah ini dengan Editor Penerbitan yang juga sebagai Editor Utama Saudara Agah D. Garnadi merupakan salah satu kontribusi berharga dalam upaya meningkatkan kapasitas nasional di bidang sains aktuaria.

Akhir kata, Persatuan Aktuaris Indonesia menyatakan apresiasi kepada Saudara Agah D. Garnadi sebagai Editor Penerbitan atas penerbitan Seri Catatan Kuliah ini. Semoga Seri ini bisa dijadikan panduan belajar di bidang sains aktuaria serta mendapatkan tanggapan yang baik dari semua pihak.

Jakarta, 2 Mei 2016

Rianto Ahmadi Djojosugito

Ketua Persatuan Aktuaris Indonesia

INDEKS

Anak himpunan, 1-3,1- 4,1-5
Beda himpunan, 1-6
Bilangan kardinal, 1-2, 1-4, 1-5
Cara daftar, 1-1
Cara kaedah, 1-1
Diagram Ven, 1-5,1-6
Elemen, 1-1
Gabungan, 1-6, 1-7, 1-8, 1-11
Himpunan, 1-1, 1-2, 1-3, 1-4, 1-5, 1-6, 1-7, 1-8, 1-9
Himpunan bagian, 1-10
Himpunan kosong, 1-1, 1-2
Himpunan kuasa, 1-4, 1-5
Himpunan semesta, 1-1
Himpunan tak hingga, 1-2
Himpunan terhingga, 1-2, 1-3
Hukum asosiatif, 1-12
Hukum de Morgan, 1-8
Hukum distributif, 1-12
Hukum komutatif, 1-12
Hukum penyebaran, 1-8
Induk dari himpunan, 1-3
Irisan, 1-5, 1-7, 1-8, 1-11
Kejadian, 1-10, 1-11, 1-12
Kejadian majemuk, 1-11
Kejadian mustahil, 1-11
Kejadian terpisah, 1-11
Komplemen kejadian, 1-12
Ruang contoh, 1-10
Sifat keidentikan, 1-7
Sifat komplemen, 1-8
Sifat penyebaran, 1-8
Tandingan, 1-5
Hukum penggandaan, 2-1, 2-4
Hukum penjumlahan, 2-1
Koefisien binom, 2-11
Koefisien multinom, 2-12
Kombinasi, 2-1, 2-8, 2-9, 2-11
Kombinatorika, 2-1
Permutasi, 2-1, 2-4, 2-5, 2-6, 2-7, 2-8, 2-9, 2-10

Permutasi melingkar, 2-6, 2-7
 Teorema binom, 2-11
 Teorema multinom, 2-12
 Aturan penggandaan, 3-12
 Frekuensi relative, 3-3
 Harapan matematis, 3-1
 Kaidah Bayes, 3-17
 Kejadian-kejadian bebas, 3-20
 Kejadian-kejadian yang saling menysihkan, 3-17, 3-23
 Mutually exclusive, 3-2, 3-4
 Peluang, 3-1, 3-2, 3-3, 3-4, 3-6, 3-7, 3-8, 3-9, 3-10, 3-11, 3-12, 3-13, 3-14, 3-15,
 3-17, 3-18, 3-19, 3-20, 3-22, 3-23, 3-24, 3-25, 3-26, 3-27, 3-28, 3-29,3-30
 Peluang bersyarat, 3-10, 3-23
 Peluang kejadian, 3-10
 Preposisi, 3-4, 4-11
 Teori peluang, 3-1
 Binomial, 4-8, 4-13, 4-18, 4-19
 Fungsi massa peluang, 4-3
 Fungsi peluang diskrit, 4-3
 Fungsi peubah acak, 4-1
 Fungsi sebaran peluang kumulatif, 4-5
 Fungsi tak turun, 4-5
 Kontinu kanan, 4-5
 Peubah acak, 4-1, 4-3, 4-4, 4-6, 4-15, 4-18, 4-20, 4-21
 Peubah acak bernoulli, 4-8
 Peubah acak binom negatif, 4-20
 Peubah acak diskret, 4-1
 Peubah acak poisson, 4-15, 4-16, 4-17
 Sebaran bernoulli, 4-8
 Sebaran geometrik, 4-18
 Sebaran hipergeometrik, 4-21
 Sebaran multinomial, 4-13
 Sebaran peluang poisson, 4-15
 Sebaran zeta, 4-22
 Fungsi kepekatan peluang, 5-1, 5-2, 5-3, 5-4, 5-6, 5-14, 5-15, 5-16, 5-18, 5-19
 Fungsi kontinu kanan, 5-3
 Fungsi non negatif, 5-1
 Fungsi peluang normal, 5-5
 Fungsi peluang seragam, 5-4
 Fungsi sebaran (kumulatif) suatu peubah acak kontinu, 5-3
 Fungsi tidak turun, 5-3
 Pendekatan normal untuk kasus binomial, 5-11

Pendekatan normal untuk kasus poisson, 5-13
Peubah acak kontinu, 5-1, 5-3
Sebaran laplacian, 5-14
Sebaran normal, 5-5, 5-6, 5-7, 5-8
Sebaran peluang beta, 5-15
Sebaran peluang eksponensial, 5-14
Sebaran peluang gamma, 5-14
Sebaran peluang weibull, 5-15

Diskrit, 6-1
 Fungsi kepekatan peluang bersama, 6-13, 6-18
 Fungsi massa peluang bersama, 6-2
 Independen, 6-14, 6-15, 6-17, 6-21
 Peluang bersyarat bersama, 6-17
 Peubah acak ganda, 6-1,6-5
 Peubah acak independen bersama, 6-14
 Peubah acak kontinu bersama, 6-10
 Sebaran marginal, 6-7
 Sebaran peluang kumulatif bersama, 6-2,6-13
 Fungsi kepekatan peluang, 7-1, 7-2, 7-3, 7-4, 7-6, 7-13, 7-17,7-20,7-24, 7-26
 fungsi pembangkit momen, 7-22
 Independen, 7-13, 7-14, 7-15, 7-26
 Jumlah varian, 7-13
 Kejadian bersyarat, 7-19, 7-20, 7-21
 Korelasi, 7-13
 Kovarian, 7-13
 Nilai harapan, 7-1, 7-6, 7-7, 7-8, 7-17, 7-19, 7-21
 Peubah kontinu, 7-3
 Peubah acak, 7-2, 7-3, 7-4, 7-6, 7-7, 7-8, 7-10, 7-13, 7-15, 7-17, 7-20, 7-22, 7-23, 7-24, 7-25
 Ragam, 7-10,7-26
 Rata-rata terbobot, 7-1

LAMPIRAN : Kumpulan Soal Ujian PAI (Probabilitas dan Statistik)

1. Misalkan himpunan *universal* adalah $U = \{1, 2, \pi, Jamaal, water, gum\}$. Misalkan $A = \{1, 2, \pi\}$ dan $B = \{1, 2, Jamaal, gum\}$. Tentukanlah $(A \cup B)^c$.
2. Terdapat 7 karyawan di departemen Aktuaria dan 6 karyawan di departemen *Market Management*. Akan dibentuk suatu tim khusus untuk melakukan analisa terhadap suatu produk asuransi yang akan diluncurkan. Hitunglah banyaknya cara untuk membentuk tim khusus dengan memilih 3 karyawan dari departemen Aktuaria dan 2 karyawan dari departemen *Market Management*.
3. Di sebuah perusahaan asuransi terdapat 3 sub bagian di bagian *product development* yang akan diisi oleh 7 karyawan baru yang telah memenuhi seleksi. Sub bagian pertama tersedia 2 posisi, sub bagian kedua tersedia 2 posisi, dan sub bagian ketiga tersedia 3 posisi. Hitunglah banyaknya cara yang mungkin untuk menempatkan karyawan tersebut ke dalam posisi yang tersedia.
4. Kode peserta ujian dari suatu ujian profesi aktuaris terdiri dari satu *digit* angka, tiga huruf, dan 3 *digit* angka (contohnya 1SAM123), kecuali huruf I, O, dan Q tidak dimasukkan pada posisi *alphabet* pertama dan ketiga. Hitunglah banyaknya kode peserta ujian yang mungkin dari ujian profesi aktuaris tersebut.
5. Banyaknya kombinasi dari r obyek yang dipilih dari kumpulan n obyek yang berbeda diberikan oleh $\binom{n}{r}$. Tentukanlah persamaan yang tepat dari $\binom{n}{r}$.
6. Tentukanlah ekspansi dari $(x - 2y)^3$.

7. Dari soal nomor 2, hitunglah probabilitas bahwa tim khusus dari 5 karyawan yang dipilih secara acak tersebut, terdiri dari 3 karyawan dari departemen Aktuaria dan 2 karyawan dari departemen *Market Management*.
8. Misalkan N adalah jumlah klaim per bulan, dengan

$$\Pr(N = n) = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

dimana $0 \leq n$. Tentukanlah probabilitas dari sedikitnya satu klaim selama bulan tertentu, diberikan paling banyak empat klaim selama bulan tersebut.

9. Sebuah perusahaan asuransi menentukan bahwa N , jumlah klaim yang diterima dalam satu minggu, memenuhi $\Pr[N = n] = \frac{1}{2^{n+1}}$, dimana $n \geq 0$. Perusahaan juga menentukan bahwa jumlah klaim yang diterima dalam satu minggu adalah saling bebas dari jumlah klaim yang diterima dalam minggu yang lain. Tentukanlah probabilitas bahwa tepatnya tujuh klaim akan diterima selama periode dua minggu.
10. Misalkan kejadian A dan B saling bebas dengan $\Pr(A \cap B^c) = 0,2$ dan $\Pr(A^c \cap B) = 0,3$. Hitunglah $\Pr(A \cup B)$.
11. Misalkan $\Pr(A \cup B) = 0,7$, $\Pr(A^c) = 0,6$, dan $\Pr(A \cap B^c) = 0,3$. Hitunglah $\Pr(B)$.
12. Dari soal nomor 11, hitunglah $\Pr(A \cap B)$.
13. Misalkan dipilih sebuah angka W yang merupakan variabel acak dari 50, 55, 60, 65, 70. Hitunglah $\Pr[W \geq 55]$.
Petunjuk: $W = 5X + 45$, dimana X mempunyai distribusi uniform diskrit pada 1, 2, 3, 4, 5.
14. Misalkan X adalah variabel acak yang mempunyai distribusi binomial dengan $n = 10$ dan $\text{Var}[X] = 0,25E[X]$. Hitunglah probabilitas untuk $X = 7$.
15. Misalkan seorang peserta pertandingan memanah mempunyai kemampuan tepat mengenai sasaran adalah 65% dan mengambil $n = 5$ percobaan memanah sasaran. Misalkan X menunjukkan banyaknya percobaan memanah sasaran dimana X mempunyai distribusi *binomial*. Hitunglah $\Pr(X > E[X])$.

16. Misalkan X adalah variabel acak yang mempunyai distribusi geometrik dan standar deviasi $\sigma_X = \frac{\sqrt{15}}{2}$. Hitunglah $\Pr(X < E[X])$.
17. Misalkan $Z \sim \text{Poisson}(\lambda)$ dan $E[Z^2] = 12$.
Hitunglah $\Pr(Z = 1)$.
18. Fungsi probabilitas densitas untuk variabel acak X diberikan oleh

$$f(x) = k(10 + x)^{-2}; \quad 0 \leq x < \infty.$$

Hitunglah $\Pr(X \leq 15)$.

19. Masa beroperasi dari sebuah bagian mesin mempunyai distribusi kontinu pada interval $[0, 40]$ dengan fungsi probabilitas densitas, $f(x)$, yang proporsional dengan $(10 + x)^{-2}$. Hitunglah probabilitas untuk masa beroperasi dari sebuah bagian mesin yang lebih kecil dari 5.
20. Kerugian yang disebabkan oleh kebakaran pada sebuah bangunan dimodelkan dengan variabel acak X yang mempunyai fungsi probabilitas densitas

$$f(x) = \begin{cases} 0,005(20 - x) & , 0 < x < 20 \\ 0 & , \text{lainnya} \end{cases}$$

Diberikan bahwa kerugian kebakaran melebihi 8, hitunglah probabilitas bahwa kerugian kebakaran melebihi 16.

21. Misalkan variabel acak Y berdistribusi *uniform* kontinu pada interval $[-2, 5]$. Hitunglah $\Pr(Y = 1)$.
22. Misalkan Z adalah variabel acak yang berdistribusi normal standar. Hitunglah $\Pr(|Z| > 2,05)$.
23. Sebuah model aktuarial untuk lama penggunaan peralatan menggunakan variabel acak $Y = 10 \cdot X^{0,8}$, dimana X adalah variabel acak yang berdistribusi eksponensial dengan mean 1 tahun.
Tentukanlah fungsi probabilitas densitas $f(y)$, untuk $y > 0$, dari variabel acak Y .
24. Sebuah investasi memberikan tingkat bunga tahunan R yang mengikuti distribusi uniform pada interval $(0,04 ; 0,08)$. Untuk investasi awal sebesar 10.000 akan memberikan hasil setelah satu tahun mengikuti variabel acak $V = 10.000e^R$. Tentukanlah fungsi distribusi kumulatif, $F(v)$, untuk nilai v yang memenuhi $0 < F(v) < 1$.

25. Misalkan variabel acak X berdistribusi uniform pada interval $[2,6]$. Misalkan variabel acak $Y = \frac{1}{X}$. Tentukanlah fungsi probabilitas densitas untuk variabel acak Y pada interval $[1/6, 1/2]$.
26. Suatu populasi mempunyai mean 100 dan standar deviasi 16. Hitunglah probabilitas bahwa mean sampel berada dalam interval ± 3 dari mean populasi jika ukuran sampel $n = 100$.
27. Suatu populasi mempunyai mean 100 dan standar deviasi 16. Hitunglah probabilitas bahwa mean sampel berada dalam interval ± 3 dari mean populasi jika ukuran sampel $n = 200$.
28. Misalkan S adalah variabel acak yang berdistribusi eksponensial dengan mean 1 dan T adalah variabel acak yang berdistribusi eksponensial dengan mean 2. Tentukanlah fungsi probabilitas densitas untuk $f_X(x)$, dimana $X = S + T$.
29. Misalkan X_1 dan X_2 adalah variabel-variabel acak dari distribusi normal standar. Tentukanlah fungsi densitas probabilitas dari $Y_1 = \frac{X_1}{X_2}$.
30. Dari soal nomor 53, tentukanlah mean dari variabel acak Y_1 .
31. Sebuah polis asuransi memberikan manfaat individu sebesar 100 per hari untuk biaya perawatan sampai 3 hari dan 25 per hari untuk biaya perawatan setelah 3 hari seterusnya. Jumlah hari perawatan, X , adalah variabel acak diskrit dengan fungsi probabilitas

$$P(X = k) = \begin{cases} \frac{6-k}{15} & \text{untuk } k = 1, 2, 3, 4, 5 \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases}$$

Hitunglah nilai variansi pembayaran biaya perawatan dari polis asuransi tersebut.

32. Sebuah polis asuransi memberikan manfaat individu sebesar 100 per hari untuk biaya perawatan sampai 3 hari dan 50 per hari untuk biaya perawatan setelah 3 hari seterusnya. Jumlah hari perawatan, X , adalah variabel acak diskrit dengan fungsi probabilitas

$$P(X = k) = \begin{cases} \frac{6-k}{15} & \text{untuk } k = 1, 2, 3, 4, 5 \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases}$$

Hitunglah nilai variansi pembayaran biaya perawatan dari polis asuransi tersebut.

33. Distribusi probabilitas dari ukuran klaim untuk sebuah polis asuransi diberikan dalam tabel berikut.

Ukuran klaim	20	30	40	50	60	70	80
Probabilitas	0,15	0,10	0,05	0,20	0,10	0,10	0,30

Tentukanlah persentase dari klaim yang terletak dalam nilai satu standar deviasi dari rata-rata ukuran klaim.

34. Distribusi probabilitas dari ukuran klaim untuk sebuah polis asuransi diberikan dalam tabel berikut.

Ukuran klaim	30	40	50	60	70	80	90
Probabilitas	0,15	0,10	0,05	0,20	0,10	0,1	0,30

Tentukanlah persentase dari klaim yang terletak dalam nilai satu standar deviasi dari *median* ukuran klaim.

35. Misalkan X adalah variabel acak yang mempunyai fungsi distribusi kumulatif

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < 1 \\ \frac{x^2-2x+2}{2} & , 1 \leq x < 2 \\ 1 & , x \geq 2 \end{cases}$$

Hitunglah variansi dari X .

36. Misalkan X berdistribusi *uniform* pada interval $[-2,6]$ dengan fungsi probabilitas densitas

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} & , -2 \leq x \leq 6 \\ 0 & , \text{lainnya} \end{cases}$$

Hitunglah nilai ekspektasi $g(X) = X^3 + \sqrt{X+2}$.

37. Misalkan X_1, X_2, X_3 adalah sampel acak dari distribusi diskrit dengan fungsi probabilitas

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & , x = 0 \\ \frac{2}{3} & , x = 1 \\ 0 & , \text{lainnya} \end{cases}$$

Tentukanlah fungsi pembangkit momen, $M_Y(t)$, dari perkalian $Y = X_1 \cdot X_2 \cdot X_3$.

38. Pemilik kendaraan mengasuransikan kendaraannya dari kerusakan dengan membeli sebuah polis asuransi dengan pematangan 250 dari total klaim yang dibayar. Dalam kejadian bahwa kendaraan mengalami

kerusakan, biaya perbaikan dapat dimodelkan dengan variabel acak uniform pada interval $[0,1500]$. Hitunglah standar deviasi dari manfaat polis asuransi untuk kejadian bahwa kendaraan tersebut mengalami kerusakan.

39. Usia dari sebuah mesin cetak dengan harga 200 mempunyai distribusi eksponensial dengan mean 2 tahun. Pabrik yang memproduksi mesin cetak akan membayar *full refund* kepada pembeli jika mesin cetak rusak selama tahun pertama dan *one-half refund* jika mesin cetak rusak selama tahun kedua. Jika pabrik tersebut menjual 100 mesin cetak, hitunglah nilai harapan dari *refund* yang akan dibayar.

40. Misalkan X adalah variabel acak yang berdistribusi eksponensial dengan variansi 9. Hitunglah $E(X^4)$.

41. Misalkan X adalah variabel acak dengan mean μ_x dan variansi σ_x^2 . X disebut sebagai variabel acak populasi. Misalkan $X_1, X_2, \dots, X_n$ adalah pengamatan-pengamatan yang berdistribusi identik dan saling bebas dari X .

$X_1, X_2, \dots, X_n$ adalah sampel acak dari X . Misalkan $S = \sum_{i=1}^n X_i$ dan $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$. $\bar{X}$ adalah mean dari sampel.

Manakah dari pernyataan berikut yang benar.

- (i) $E(S) = \mu_X$
- (ii) $Var(S) = n \cdot \sigma_X^2$
- (iii) $E(X) = n \cdot \mu_X$
- (iv) $Var(\bar{X}) = \frac{\sigma_X^2}{n}$

42. Misalkan X dan Y adalah variabel-variabel acak. Diberikan persamaan sebagai berikut:

- (i) $Cov[X, Y] = E[X \cdot Y] - E[X]E[Y]$
- (ii) $Cov[X, Y] = a \cdot Var[X]$ jika $Y = a \cdot X + b$
- (iii) $Cov[X, Y] = Var[Y]$

Manakah yang benar dari tiga persamaan diatas?

43. Sebuah koin yang kedua sisinya seimbang dilempar sebanyak dua kali. Misalkan X adalah banyaknya sisi pertama yang terlihat pada lemparan pertama. Misalkan Y adalah banyaknya sisi pertama yang terlihat pada dua lemparan pertama. Hitunglah $Var(X + Y)$.

44. Dari soal nomor 43, hitunglah $E(Y|X = 1)$.
45. Sebuah uji diagnostik mengenai ada atau tidaknya suatu penyakit mempunyai dua hasil yang mungkin: 1 untuk ada penyakit dan 0 untuk tidak ada penyakit. Misalkan X menunjukkan adanya atau tidaknya penyakit berdasarkan pernyataan pasien, dan Y menunjukkan hasil dari uji diagnostik. Fungsi probabilitas bersama dari X dan Y diberikan oleh

$$\begin{aligned}\Pr(X = 0, Y = 0) &= 0,800 & \Pr(X = 1, Y = 0) &= 0,050 \\ \Pr(X = 0, Y = 1) &= 0,025 & \Pr(X = 1, Y = 1) &= 0,125\end{aligned}$$

Hitunglah $Var(X + Y)$.

46. Dari soal nomor 45, hitunglah $Var(Y|X = 1)$.
47. Misalkan N_1 dan N_2 mewakili banyaknya klaim yang diajukan ke sebuah perusahaan asuransi di bulan April dan Mei. Fungsi probabilitas bersama dari N_1 dan N_2 adalah

$$p(n_1, n_2) = \begin{cases} \frac{1}{3}(\frac{1}{4})^{n_1-1}e^{-n_1}(1 - e^{-n_1})^{n_2-1} & , n_1 = 1, 2, 3, \dots, n_2 = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & , \text{lainnya} \end{cases}$$

Hitunglah nilai ekspektasi banyaknya klaim yang akan diajukan ke perusahaan asuransi di bulan Mei jika tepatnya 2 klaim diajukan di bulan April.

48. Misalkan X adalah variabel acak populasi dengan mean μ_X dan variansi σ_X^2 , dan misalkan $(X_i)_{i=1}^n$ adalah sampel acak dari X . Tentukanlah bentuk lain dari $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$.

Kumpulan Jawaban Soal Ujian PAI (Probabilitas dan Statistik)

1. Karena $A = \{1, 2, \pi\}$ dan $B = \{1, 2, Jamaal, gum\}$ maka

$$A \cup B = \{1, 2, \pi, Jamaal, gum\}$$

Oleh karena itu diperoleh

$$\begin{aligned}(A \cup B)^c &= U - (A \cup B) \\ &= \{1, 2, \pi, Jamaal, water, gum\} - \{1, 2, \pi, Jamaal, gum\} \\ &= \{water\}\end{aligned}$$

2. Banyaknya cara untuk membentuk tim khusus dengan memilih 3 karyawan dari departemen Aktuaria dan 2 karyawan dari departemen *Market Management* adalah

$$\binom{7}{3} \times \binom{6}{2} = 35 \times 15 = 525.$$

3. Banyaknya cara yang mungkin untuk menempatkan karyawan tersebut ke dalam posisi yang tersedia adalah

$$\binom{7}{2 \ 2 \ 3} = \frac{7!}{2!2!3!} = 210.$$

4. Misalkan $K_1 K_2 K_3 K_4 K_5 K_6 K_7$ menyatakan kode yang mungkin dari ujian profesi aktuaris tersebut.

Karena K_1, K_5, K_6 dan K_7 merupakan digit-digit angka maka 10 kemungkinan untuk masing-masing digit K_1, K_5, K_6 dan K_7 .

Sedangkan K_2 dan K_4 merupakan digit-digit huruf A,B,...,Z kecuali I,O dan Q, sehingga ada 23 kemungkinan untuk masing-masing digit K_2 dan K_4 .

Untuk K_3 mempunyai 26 kemungkinan.

Dengan menggunakan prinsip perkalian maka diperoleh banyaknya kode yang mungkin dari ujian profesi aktuaris tersebut adalah:

$$10 \times 23 \times 26 \times 23 \times 10 \times 10 \times 10 = 137.540.000$$

5.

$$\begin{aligned} \binom{n}{r} &= \frac{n!}{r!(n-r)!} \\ \binom{n}{r} &= \frac{(n-1)!n}{r!(n-r-1)!(n-r)} \\ \binom{n}{r} &= \frac{(n-1)!}{r!((n-1)-r)!} \frac{n}{n-r} \\ \binom{n}{r} &= \frac{(n-1)!}{r!((n-1)-r)!} \frac{(n-r)+r}{n-r} \\ \binom{n}{r} &= \frac{(n-1)!}{r!((n-1)-r)!} \left(1 + \frac{r}{n-r}\right) \\ \binom{n}{r} &= \frac{(n-1)!}{r!((n-1)-r)!} + \frac{(n-1)!r}{r!((n-1)-r)!(n-r)} \\ \binom{n}{r} &= \frac{(n-1)!}{r!((n-1)-r)!} + \frac{(n-1)!r}{(r-1)!((n-r)-1)!r(n-r)} \\ \binom{n}{r} &= \frac{(n-1)!}{r!((n-1)-r)!} + \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} \\ \binom{n}{r} &= \frac{(n-1)!}{r!((n-1)-r)!} + \frac{(n-1)!}{(r-1)!((n-1)-(r-1))!} \\ \binom{n}{r} &= \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1} \end{aligned}$$

6. Berdasarkan Teorema Multinomial, diperoleh:

$$(ax+by)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 x^n y^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 x^{n-1} y^1 + \dots + \binom{n}{n} a^0 b^n x^0 y^n.$$

Jadi ekspansi dari $(x-2y)^3$ adalah

$$\begin{aligned} (x-2y)^3 &= \binom{3}{0} 1^3 (-2)^0 x^3 y^0 + \binom{3}{1} 1^2 (-2)^1 x^2 y^1 + \binom{3}{2} 1^1 (-2)^2 x^1 y^2 \\ &\quad + \binom{3}{3} 1^0 (-2)^3 x^0 y^3 \\ &= x^3 - 6x^2 y + 12xy^2 - 8y^3. \end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned}
\binom{7}{0} \times \binom{6}{5} &= 1 \times 6 = 6. \\
\binom{7}{1} \times \binom{6}{4} &= 7 \times 15 = 105. \\
\binom{7}{2} \times \binom{6}{3} &= 21 \times 20 = 420. \\
\binom{7}{3} \times \binom{6}{2} &= 35 \times 15 = 525. \\
\binom{7}{4} \times \binom{6}{1} &= 35 \times 6 = 210. \\
\binom{7}{5} \times \binom{6}{0} &= 21 \times 1 = 21.
\end{aligned}$$

Jadi probabilitas bahwa tim khusus dari 5 karyawan yang dipilih secara acak tersebut, terdiri dari 3 karyawan dari departemen Aktuaria dan 2 karyawan dari departemen *Market Management* adalah

$$\frac{525}{6 + 105 + 420 + 525 + 210 + 21} = \frac{525}{1287} = 0,41.$$

8. Probabilitas dari sedikitnya satu klaim selama bulan tertentu adalah

$$\begin{aligned}
\Pr(N \geq 1 | N \leq 4) &= \frac{\Pr(1 \leq N \leq 4)}{\Pr(N \leq 4)} \\
&= \frac{\sum_1^4 \frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\sum_0^4 \frac{1}{(n+1)(n+2)}} \\
&= \frac{2}{5} \\
&= 0,4.
\end{aligned}$$

9. Probabilitas bahwa tepatnya tujuh klaim akan diterima selama periode dua minggu adalah

$$\begin{aligned}
&2(\Pr(N = 0) \Pr(N = 7) + \Pr(N = 1) \Pr(N = 6) + \Pr(N = 2) \Pr(N = 5) \\
&+ \Pr(N = 3) \Pr(N = 4)) \\
&= 2\left(\frac{1}{2^1} \frac{1}{2^8} + \frac{1}{2^2} \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^3} \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^4} \frac{1}{2^5}\right) \\
&= 2 \times 4 \times \frac{1}{2^9} \\
&= \frac{1}{64}.
\end{aligned}$$

10. Karena kejadian A dan B saling bebas maka diperoleh

$$\begin{aligned}\Pr(A \cap B) &= \Pr(A) \cdot \Pr(B) \\ \Pr(A \cap B) &= (\Pr(A \cap B^c) + \Pr(A \cap B))(\Pr(A^c \cap B) + \Pr(A \cap B)) \\ x &= (0,2 + x)(0,3 + x) \\ x &= 0,06 + 0,5x + x^2 \\ 0 &= x^2 - 0,5x + 0,06.\end{aligned}$$

Nilai $\Pr(A \cap B) = x$ yang memenuhi persamaan di atas adalah 0,2 atau 0,3. Karena $\Pr(A \cup B) = \Pr(A \cap B^c) + \Pr(A^c \cap B) + \Pr(A \cap B)$ maka nilai $\Pr(A \cup B)$ yang mungkin adalah 0,7 atau 0,8.

11. Kita ketahui bahwa

$$\Pr(A) = 1 - \Pr(A^c) = 1 - 0,6 = 0,4.$$

Karena $\Pr(A) = \Pr(A \cap B) + \Pr(A \cap B^c)$ maka diperoleh

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A) - \Pr(A \cap B^c) = 0,4 - 0,3 = 0,1.$$

Berdasarkan aturan peluang, diketahui:

$$\begin{aligned}\Pr(A \cup B) &= \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B) \\ 0,7 &= 0,4 + \Pr(B) - 0,1\end{aligned}$$

sehingga diperoleh $\Pr(B) = 0,4$.

12. Kita ketahui bahwa

$$\Pr(A) = 1 - \Pr(A^c) = 1 - 0,6 = 0,4.$$

Karena $\Pr(A) = \Pr(A \cap B) + \Pr(A \cap B^c)$ maka diperoleh

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A) - \Pr(A \cap B^c) = 0,4 - 0,3 = 0,1.$$

13. Karena X mempunyai distribusi uniform diskrit pada 1, 2, 3, 4, 5, maka

$$\begin{aligned}\Pr[X = k] &= \frac{1}{5} \text{ untuk } k = 1, 2, 3, 4, 5 \\ \Pr[W \geq 55] &= 1 - \Pr[W < 55] \\ &= 1 - \Pr[W = 50] \\ &= 1 - \Pr[5X + 45 = 50] \\ &= 1 - \Pr[X = 1] \\ &= 1 - \frac{1}{5} \\ &= \frac{4}{5}.\end{aligned}$$

14. Karena X adalah variabel acak yang mempunyai distribusi binomial dengan $n = 10$ maka $E[X] = 10p$ dan $Var[X] = 10p(1 - p)$ dengan p merupakan peluang sukses.

Karena $Var[X] = 0,25E[X]$ maka diperoleh $10p(1 - p) = 0,25 \cdot 10p$. Nilai p yang memenuhi adalah $p = 0,75$.

Jadi

$$\Pr[X = 7] = \binom{10}{7} (0,75)^7 (0,25)^3 = 0,25.$$

15. Misalkan p menyatakan peluang peserta tersebut sukses memanah sasaran, maka diperoleh $p = 65\% = 0,65$. Karena $E[X] = n \cdot p$ maka untuk $n = 5$ diperoleh $E[X] = 5 \cdot (0,65) = 3,25$.

Jadi

$$\begin{aligned} \Pr(X > E[X]) &= \Pr(X > 3,25) \\ &= \Pr(X = 4) + \Pr(X = 5) \\ &= \binom{5}{4} (0,65)^4 (1 - 0,65)^1 + \binom{5}{5} (0,65)^5 (1 - 0,65)^0 \\ &= 0,4284. \end{aligned}$$

16. Hitunglah $\Pr(X < E[X])$. Misalkan p menyatakan peluang sukses.

Karena $\sigma_X = \sqrt{\frac{1-p}{p^2}}$ dan $\sigma_X = \frac{\sqrt{15}}{2}$ maka diperoleh $15p^2 + 4p - 4 = 0$.

Sedangkan $0 \leq p \leq 1$ maka nilai p yang memenuhi adalah $p = \frac{2}{5} = 0,4$.

Karena $E[X] = \frac{1-p}{p}$ maka diperoleh $E[X] = 1,5$. Jadi

$$\begin{aligned} \Pr(X < E[X]) &= \Pr(X < 1,5) \\ &= \Pr(X = 0) + \Pr(X = 1) \\ &= p(1 - p)^0 + p(1 - p)^1 \\ &= 0,4(1 - 0,4)^0 + 0,4(1 - 0,4)^1 \\ &= 0,4 + 0,24 \\ &= 0,64. \end{aligned}$$

17. Pertama akan ditentukan parameter λ .

Karena $Z \sim \text{Poisson}(\lambda)$ maka $E[Z] = Var[Z] = \lambda$.

Karena $Var[Z] = E[Z^2] - E[Z]^2$ maka diperoleh $\lambda^2 + \lambda - 12 = 0$ atau $\lambda = 3$.

Jadi,

$$\Pr[Z = 1] = \frac{3^1 e^{-3}}{1!} = 0,149.$$

18.

$$f(x) = k(10 + x)^{-2}; \quad 0 \leq x < \infty.$$

Karena $\int_0^\infty f(x)dx = 1$ maka diperoleh

$$\begin{aligned} \int_0^\infty k(10 + x)^{-2}dx &= 1 \\ \frac{k}{10} &= 1 \\ k &= 10 \end{aligned}$$

Jadi

$$\begin{aligned} \Pr(X \leq 15) &= \int_0^{15} 10k(10 + x)^{-2}dx \\ &= -10(10 + x)^{-1} \Big|_{x=0}^{x=15} \\ &= -\frac{10}{25} + 1 \\ &= \frac{15}{25} \\ &= 0,6. \end{aligned}$$

19. Misal $f(x) = k(10 + x)^{-2}$ untuk x pada interval $[0, 40]$.

Karena $\int_0^{40} k(10 + x)^{-2}dx = 1$ maka diperoleh $k = 12,5$.

Jadi

$$\begin{aligned} \Pr[X < 5] &= \int_0^5 12,5(10 + x)^{-2}dx \\ &= -\frac{12,5}{10 + x} \Big|_0^5 \\ &= -0,83 + 1,25 \\ &= 0,42. \end{aligned}$$

20.

$$f(x) = \begin{cases} 0,005(20 - x) & , 0 < x < 20 \\ 0 & , \text{lainnya} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P(X > 8) &= P(8 < X < 20) \\ &= \int_8^{20} 0,005(20 - x)dx \\ &= 0,005(20x - \frac{1}{2}x^2) \Big|_{x=8}^{x=20} \\ &= 0,36. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(X > 16) &= P(16 < X < 20) \\
&= \int_{16}^{20} 0,005(20 - x)dx \\
&= 0,005(20x - \frac{1}{2}x^2)|_{x=16}^{x=20} \\
&= 0,04
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(X > 16|X > 8) &= \frac{P(X > 16 \cap X > 8)}{P(X > 8)} \\
&= \frac{P(X > 16)}{P(X > 8)} \\
&= \frac{0,04}{0,36} \\
&= \frac{1}{9}.
\end{aligned}$$

21. Karena Y berdistribusi *uniform* kontinu pada interval $[-2,5]$ maka

$$\Pr(Y = 1) = \int_1^1 \frac{1}{5 - (-2)} dy = 0.$$

22.

$$\begin{aligned}
\Pr(|Z| > 2,05) &= 1 - \Pr(|Z| \leq 2,05) \\
&= 1 - 2\Pr(0 \leq Z \leq 2,05) \\
&= 1 - 2(0,4798) \\
&= 0,0404.
\end{aligned}$$

23. Karena $X \sim \exp(\lambda = 1)$ maka diperoleh $f_X(x) = e^{-x}$.
 Karena $Y = 10 \cdot X^{0,8}$ adalah fungsi naik, maka

$$\begin{aligned}
f(y) = f_Y(y) &= f_X(x) \frac{dx}{dy} \\
&= e^{-x} \frac{dx}{dy} \\
&= e^{-(0,1y)^{1,25}} (0,125(0,1y)^{0,25}) \\
&= 0,125(0,1y)^{0,25} \exp(-(0,1y)^{1,25}).
\end{aligned}$$

24. Karena R mengikuti distribusi uniform pada interval $(0,04 ; 0,08)$ maka diperoleh $f(r) = \frac{1}{0,04}$.

$$\begin{aligned}
\Pr(R \leq r) &= \int_{0,04}^r f(s)ds \\
&= \int_{0,04}^r \frac{1}{0,04} ds \\
&= \frac{1}{0,04} r - 1.
\end{aligned}$$

Dengan demikian, diperoleh

$$\begin{aligned}
 F(v) &= \Pr(V \leq v) \\
 &= \Pr(10.000e^R \leq v) \\
 &= \Pr(\ln 10.000 + R \leq \ln v) \\
 &= \Pr(R \leq \ln v - \ln 10.000) \\
 &= \Pr\left(R \leq \ln\left(\frac{v}{10000}\right)\right) \\
 &= \frac{1}{0,04} \ln\left(\frac{v}{10000}\right) - 1 \\
 &= 25 \left[\ln\left(\frac{v}{10000}\right) - 0,04 \right].
 \end{aligned}$$

25. Karena $X \sim \text{uniform}[2, 6]$ maka diperoleh $f_X(x) = \frac{1}{4}$, $x \in [2, 6]$.
 Karena $Y = \frac{1}{X}$ adalah fungsi turun maka

$$\begin{aligned}
 f(y) = f_Y(y) &= -f_X(x) \frac{dx}{dy} \\
 &= -\frac{1}{4} \frac{dx}{dy} \\
 &= -\frac{1}{4} \left(-\frac{1}{y^2}\right) \\
 &= \frac{1}{4y^2}.
 \end{aligned}$$

26.

$$\begin{aligned}
 &\Pr(|\bar{X} - 100| \leq 3) \\
 &= \Pr(-3 \leq \bar{X} - 100 \leq 3) \\
 &= \Pr\left(\frac{-3}{16/\sqrt{100}} \leq \frac{\bar{X}-100}{16/\sqrt{100}} \leq \frac{3}{16/\sqrt{100}}\right) \\
 &= \Pr\left(\frac{-3}{16/\sqrt{100}} \leq Z \leq \frac{3}{16/\sqrt{100}}\right) \\
 &= \Pr(|Z| \leq \frac{3\sqrt{100}}{16}) \\
 &= \Pr(|Z| \leq 1,875) \\
 &= 2 \Pr(0 \leq Z \leq 1,875) \\
 &= 0,9392.
 \end{aligned}$$

27.

$$\begin{aligned}
 &\Pr(|\bar{X} - 100| \leq 3) \\
 &= \Pr(|Z| \leq \frac{3\sqrt{200}}{16}) \\
 &= \Pr(|Z| \leq 2,652) \\
 &= 2 \Pr(0 \leq Z \leq 2,652) \\
 &= 0,992.
 \end{aligned}$$

28. Perhatikan bahwa

$$S \sim f_S(s) = e^{-s}$$

dan

$$T \sim f_T(t) = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}.$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_0^x f_S(s)f_T(x-s)ds \\ &= \int_0^x e^{-s}\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}(x-s)}ds \\ &= \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} \int_0^x e^{-\frac{1}{2}s}ds \\ &= e^{-\frac{1}{2}x}(1 - e^{-\frac{1}{2}x}) \\ &= e^{-\frac{1}{2}x} - e^{-x}. \end{aligned}$$

29.

$$X_1 \sim f_{X_1}(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x_1^2/2}, \quad -\infty < x_1 < \infty$$

$$X_2 \sim f_{X_2}(x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x_2^2/2}, \quad -\infty < x_2 < \infty$$

$$\begin{aligned} g_1(y_1) &= 2 \int_0^\infty f_{X_2}(x_2)f_{X_1}(x_2y_1)x_2dx_2 \\ &= 2 \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x_2^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x_2^2y_1^2}{2}}x_2dx_2 \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-\frac{x_2^2(1+y_1^2)}{2}}x_2dx_2 \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{1}{(1+y_1^2)} e^{-\frac{x_2^2(1+y_1^2)}{2}} \Big|_{-\infty}^0 \\ &= \frac{1}{\pi(1+y_1^2)}. \end{aligned}$$

30.

$$E[Y_1] = \int_{-\infty}^\infty y_1 \frac{1}{\pi(1+y_1^2)} dy_1$$

Karena $f(y_1) = \frac{y_1}{\pi(1+y_1^2)}$ adalah fungsi ganjil, maka

$$E[Y_1] = 0.$$

31.

$$P(X = k) = \begin{cases} \frac{6-k}{15} & \text{untuk } k = 1, 2, 3, 4, 5 \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases}$$

Misal B merupakan variabel acak yang menyatakan biaya perawatan, maka diperoleh:

$$B(x) = \begin{cases} 100x & ; \quad x = 1, 2, 3 \\ 25x & ; \quad x = 4, 5 \end{cases}$$

Jadi,

$$\begin{aligned} E[B(x)] &= \sum_{k=1}^{k=5} B(k)P(X = k) \\ &= 100 \cdot (1 \cdot \frac{6-1}{15} + 2 \cdot \frac{6-2}{15} + 3 \cdot \frac{6-3}{15}) + 25 \cdot (4 \cdot \frac{6-4}{15} + 5 \cdot \frac{6-5}{15}) \\ &= 168,33. \\ E[B^2(x)] &= \sum_{k=1}^{k=5} B^2(k)P(X = k) \\ &= 100^2 \cdot (1^2 \cdot \frac{6-1}{15} + 2^2 \cdot \frac{6-2}{15} + 3^2 \cdot \frac{6-3}{15}) + 25^2 \cdot (4^2 \cdot \frac{6-4}{15} + 5^2 \cdot \frac{6-5}{15}) \\ &= 34375. \\ Var[B(x)] &= E[B^2(x)] - (E[B(x)])^2 \\ &= 34375 - (168,33)^2 \\ &= 6038,9. \end{aligned}$$

32.

$$P(X = k) = \begin{cases} \frac{6-k}{15} & \text{untuk } k = 1, 2, 3, 4, 5 \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases}$$

Misal $B(x)$ menyatakan biaya perawatan ,

$$\begin{aligned} B(X = k) &= \begin{cases} 100k & , k = 1, 2, 3 \\ 300 + 50(k - 3) & , k = 4, 5 \end{cases} \\ E[B(x)] &= \sum_{k=1}^{k=5} B(k)P(X = k) \\ &= 100 \cdot \frac{6-1}{15} + 200 \cdot \frac{6-2}{15} + 300 \cdot \frac{6-3}{15} + 350 \cdot \frac{6-4}{15} + 400 \cdot \frac{6-5}{15} \\ &= 220. \\ E[(B(x))^2] &= \sum_{k=1}^{k=5} (B(k))^2 P(X = k) \\ &= 100^2 \cdot \frac{6-1}{15} + 200^2 \cdot \frac{6-2}{15} + 300^2 \cdot \frac{6-3}{15} + 350^2 \cdot \frac{6-4}{15} + 400^2 \cdot \frac{6-5}{15} \\ &= 59000. \\ Var[B(x)] &= E[(B(x))^2] - (E[B(x)])^2 \\ &= 59000 - 220^2 \\ &= 10600. \end{aligned}$$

33. Rata-rata ukuran klaim

$$\begin{aligned} &= 20 \cdot 0,15 + 30 \cdot 0,10 + 40 \cdot 0,05 + 50 \cdot 0,20 + 60 \cdot 0,10 + 70 \cdot 0,10 + 80 \cdot 0,30 \\ &= 3 + 3 + 2 + 10 + 6 + 7 + 24 \\ &= 55 \end{aligned}$$

Rata-rata ukuran klaim kuadrat

$$\begin{aligned} &= 20^2 \cdot 0,15 + 30^2 \cdot 0,10 + 40^2 \cdot 0,05 + 50^2 \cdot 0,20 + 60^2 \cdot 0,10 + 70^2 \cdot 0,10 + 80^2 \cdot 0,30 \\ &= 60 + 90 + 80 + 500 + 360 + 490 + 1920 \\ &= 3500 \end{aligned}$$

Standar deviasi ukuran klaim $= \sqrt{3500 - 3025} = \sqrt{475} = 21,8$ Jadi persentase dari klaim yang terletak dalam nilai satu standar deviasi dari rata-rata ukuran klaim (ukuran klaim yang terletak pada interval $[55-21,8; 22+21,8]=[33,2; 76,8]$) adalah 45%.

34. Median ukuran klaim $= \frac{60+70}{2} = 65$. Rata-rata ukuran klaim

$$\begin{aligned} &= 30 \cdot 0,15 + 40 \cdot 0,10 + 50 \cdot 0,05 + 60 \cdot 0,20 + 70 \cdot 0,10 + 80 \cdot 0,10 + 90 \cdot 0,30 \\ &= 4,5 + 4 + 2,5 + 12 + 7 + 8 + 27 \\ &= 65 \end{aligned}$$

Rata-rata ukuran klaim kuadrat

$$\begin{aligned} &= 30^2 \cdot 0,15 + 40^2 \cdot 0,10 + 50^2 \cdot 0,05 + 60^2 \cdot 0,20 + 70^2 \cdot 0,10 + 80^2 \cdot 0,10 + 90^2 \cdot 0,30 \\ &= 135 + 160 + 125 + 720 + 490 + 640 + 2430 \\ &= 4700 \end{aligned}$$

Standar deviasi ukuran klaim $= \sqrt{4700 - 4225} = \sqrt{475} = 21,8$ Jadi persentase dari klaim yang terletak dalam nilai satu standar deviasi dari median ukuran klaim (ukuran klaim yang terletak pada interval $[65-21,8; 65+21,8]=[43,2; 86,8]$) adalah 45%.

35.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < 1 \\ \frac{x^2-2x+2}{2} & , 1 \leq x < 2 \\ 1 & , x \geq 2 \end{cases}$$

Berdasarkan fungsi distribusi kumulatif di atas, maka diperoleh fkp sebagai berikut:

$$f(x) = x - 1, \quad 1 \leq x < 2$$

$$\begin{aligned}
E[X] &= \int_1^2 x(x-1)dx \\
&= \int_1^2 (x^2 - x)dx \\
&= \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right) \Big|_1^2 \\
&= \frac{7}{3} - \frac{3}{2} \\
&= \frac{5}{6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[X^2] &= \int_1^2 x^2(x-1)dx \\
&= \int_1^2 (x^3 - x^2)dx \\
&= \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_1^2 \\
&= \frac{15}{4} - \frac{7}{3} \\
&= \frac{17}{12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Var[X] &= E[X^2] - (E[X])^2 \\
&= \frac{17}{12} - \frac{25}{36} \\
&= \frac{13}{18}.
\end{aligned}$$

36.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \begin{cases} \frac{1}{8} & , -2 \leq x \leq 6 \\ 0 & , \text{lainnya} \end{cases} \\
E[g(X)] &= \int_{-2}^6 g(x) \cdot f(x)dx \\
&= \int_{-2}^6 (x^3 + \sqrt{x+2}) \cdot \frac{1}{8} \\
&= \frac{1}{8} \left[\left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}(x+2)^{3/2} \right) \right]_{-2}^6 \\
&= 41,89.
\end{aligned}$$

37.

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & , x = 0 \\ \frac{2}{3} & , x = 1 \\ 0 & , \text{lainnya} \end{cases}$$

X_1	X_2	X_3	e^{tY}	$p(y)$	$e^{tY}p(y)$
0	0	0	1	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{27}$
0	0	1	1	$\frac{2}{27}$	$\frac{2}{27}$
0	1	0	1	$\frac{2}{27}$	$\frac{2}{27}$
0	1	1	1	$\frac{4}{27}$	$\frac{4}{27}$
1	0	0	1	$\frac{2}{27}$	$\frac{2}{27}$
1	0	1	1	$\frac{4}{27}$	$\frac{4}{27}$
1	1	0	1	$\frac{4}{27}$	$\frac{4}{27}$
1	1	1	e^t	$\frac{8}{27}$	$e^t \frac{8}{27}$

Jadi diperoleh

$$E[e^{tY}] = \sum e^{ty}p(y) = \frac{19}{27} + \frac{8}{27}e^t.$$

38. Misal X adalah variabel acak yang menyatakan biaya perbaikan, $X \sim \text{uniform}[0, 1500]$ sehingga $f(x) = \frac{1}{1500}$, $x \in [0, 1500]$.

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_0^{1500} \frac{1}{1500} x dx \\ &= \frac{1}{3000} x^2 \Big|_0^{1500} \\ &= \frac{1}{3000} 1500^2 \\ &= 750. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \int_0^{1500} \frac{1}{1500} x^2 dx \\ &= \frac{1}{4500} x^3 \Big|_0^{1500} \\ &= \frac{1}{4500} 1500^3 \\ &= 750000. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma(X) &= \sqrt{E[X^2] - (E[X])^2} \\ &= \sqrt{750000 - 750^2} \\ &= 433. \end{aligned}$$

39. Misal X adalah variabel acak yang menyatakan usia sebuah mesin cetak. Karena $X \sim \text{eksponensial}(1/2)$ maka diperoleh $f(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$. Misal $R(x)$ menyatakan *refund* yang akan dibayar untuk satu mesin cetak, maka diperoleh

$$R(X = x) = \begin{cases} 200 & , 0 \leq x \leq 1 \\ 100 & , 1 < x \leq 2 \\ 0 & , \text{selainnya} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
E[R(X)] &= \int_0^1 200 \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x} + \int_1^2 100 \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x} \\
&= 200[-e^{-\frac{1}{2}x}]_0^1 + 100[-e^{-\frac{1}{2}x}]_1^2 \\
&= 200(1 - e^{-\frac{1}{2}}) + 100(e^{-\frac{1}{2}} - e^{-1}) \\
&= 102,56.
\end{aligned}$$

Jadi jika pabrik tersebut menjual 100 mesin cetak, maka nilai harapan dari *refund* yang akan dibayar adalah

$$E[100R(X)] = 100 \cdot E[R(X)] = 10256.$$

40. Karena X merupakan peubah acak yang berdistribusi eksponensial dengan variansi 9 maka diperoleh parameter λ sebagai berikut

$$Var[X] = \frac{1}{\lambda^2} = 9$$

sehingga diperoleh $\lambda = \frac{1}{3}$ dan fkp peubah acak X :

$$f(x) = \frac{1}{3} e^{-\frac{1}{3}x}$$

$$\begin{aligned}
E[X^4] &= \int_0^\infty x^4 \frac{1}{3} e^{-\frac{1}{3}x} dx \\
&= -\frac{1}{3} (3x^4 + 36x^3 + 324x^2 + 1944x + 5832) e^{-\frac{1}{3}x} \Big|_0^\infty \\
&= \frac{1}{3} \times 5832 \\
&= 1944.
\end{aligned}$$

41. Pernyataan yang benar adalah (ii) dan (iv).

42. Yang benar adalah persamaan (i) dan (ii).

43. Dengan menggunakan tabel di bawah ini,

Luaran	X	Y	$Z = X + Y$	$\Pr(Z = z)$
$S_1 S_1$	1	2	3	1/4
$S_1 S_2$	1	1	2	1/4
$S_2 S_1$	0	1	1	1/4
$S_2 S_2$	0	0	0	1/4

$$E(Z) = \frac{1}{4}(0 + 1 + 2 + 3) = 3/2$$

$$E(Z^2) = \frac{1}{4}(0 + 1 + 4 + 9) = 7/2$$

$$Var(X + Y) = Var(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2 = \frac{7}{2} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} = 1,25.$$

44. Dengan menggunakan tabel di bawah ini,

$x y$	0	1	2	$p_X(x)$
0	1/4	1/4	0	1/2
1	0	1/4	1/4	1/2
$p_Y(y)$	1/4	1/2	1/4	1

$$\begin{aligned}
 E(Y|X=1) &= \sum y \cdot p(y|x=1) \\
 &= 0 \cdot p(0|x=1) + 1 \cdot p(1|x=1) + 2 \cdot p(2|x=1) \\
 &= 0 \cdot \frac{p(1,0)}{p_X(1)} + 1 \cdot \frac{p(1,1)}{p_X(1)} + 2 \cdot \frac{p(1,2)}{p_X(1)} \\
 &= 0 \cdot \frac{0}{1/2} + 1 \cdot \frac{1/4}{1/2} + 2 \cdot \frac{1/4}{1/2} \\
 &= 0 + \frac{1}{2} + 1 \\
 &= \frac{3}{2} = 1,50.
 \end{aligned}$$

45. Dengan menggunakan tabel di bawah ini,

		Y		$\Pr(X=x)$
		0	1	
X	0	0,800	0,025	0,825
	1	0,050	0,125	0,175
$\Pr(Y=y)$		0,850	0,150	1

X	Y	$Z = X + Y$	$\Pr(Z=z)$
0	0	0	0,800
0	1	1	0,025
1	0	1	0,050
1	1	2	0,125

$$\begin{aligned}
 E(Z) &= 0 \cdot 0,800 + 1 \cdot (0,025 + 0,050) + 2 \cdot 0,125 = 0,325 \\
 E(Z^2) &= 0^2 \cdot 0,800 + 1^2 \cdot (0,025 + 0,050) + 2^2 \cdot 0,125 = 0,575 \\
 Var(X+Y) &= Var(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2 = 0,575 - (0,325)^2 = 0,4694.
 \end{aligned}$$

46.

$$\begin{aligned}
 \Pr(Y=0|X=1) &= \frac{\Pr(X=1,Y=0)}{\Pr(X=1)} = \frac{0,050}{0,175} = 0,286 \\
 \Pr(Y=1|X=1) &= \frac{\Pr(X=1,Y=1)}{\Pr(X=1)} = \frac{0,125}{0,175} = 0,714 \\
 E(Y|X=1) &= \Pr(Y=1|X=1) = 0,714 \\
 E(Y^2|X=1) &= \Pr(Y=1|X=1) = 0,714 \\
 Var(Y|X=1) &= E(Y^2|X=1) - (E(Y|X=1))^2 = 0,714 - (0,714)^2 = 0,20.
 \end{aligned}$$

47.

$$\begin{aligned} E[N_2|N_1 = 2] &= \sum_{n_2=1}^{\infty} n_2 p(n_2|N_1 = 2) \\ &= \sum_{n_2=1}^{\infty} n_2 \frac{p(2, n_2)}{p(N_1 = 2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(N_1 = 2) &= \sum_{n_2=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3} \frac{1}{4} e^{-2} (1 - e^{-2})^{n_2-1} \right) \\ &= \frac{1}{12e^2} \sum_{n_2=0}^{\infty} (1 - e^{-2})^{n_2} \\ &= \frac{1}{12e^2} \frac{1}{1 - (1 - e^{-2})} \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Oleh karena itu diperoleh

$$\begin{aligned} E[N_2|N_1 = 2] &= \sum_{n_2=1}^{\infty} n_2 \frac{\frac{1}{3} \frac{1}{4} e^{-2} (1 - e^{-2})^{n_2-1}}{\frac{1}{12}} \\ &= \sum_{n_2=1}^{\infty} n_2 e^{-2} (1 - e^{-2})^{n_2-1} \\ &= \sum_{n_2=0}^{\infty} n_2 e^{-2} (1 - e^{-2})^{n_2} \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa nilai ekspektasi di atas adalah nilai ekspektasi untuk peubah acak geometri N_2 . Maka diperoleh

$$\begin{aligned} E[N_2|N_1 = 1] &= \frac{1 - e^{-2}}{e^{-2}} \\ &= e^2 - 1. \end{aligned}$$

48.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 &= \sum_{i=1}^n ((X_i - \mu_X) - (\bar{X} - \mu_X))^2 \\ &= \sum_{i=1}^n ((X_i - \mu_X)^2 - 2(X_i - \mu_X)(\bar{X} - \mu_X) + (\bar{X} - \mu_X)^2) \\ &= \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_X)^2 - 2(\bar{X} - \mu_X) \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_X) + \sum_{i=1}^n (\bar{X} - \mu_X)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_X)^2 - 2(\bar{X} - \mu_X)(n\bar{X} - n\mu_X) + n(\bar{X} - \mu_X)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_X)^2 - 2n(\bar{X} - \mu_X)^2 + n(\bar{X} - \mu_X)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_X)^2 - n(\bar{X} - \mu_X)^2. \end{aligned}$$