[white paper]

Diamond Open Access

Números representáveis

Colaboração Matemática Aberta¹

17 de Dezembro de 2020

Resumo

Este artigo apresenta a demonstração de um dos teoremas que estão no livro *Proofs from THE BOOK* [1].

palavras-chave: números representáveis, primos, congruências

A versão mais atualizada deste artigo está disponível em

<https://osf.io/cq48x/download>

Como ser coautor(a) deste artigo?

1. Envie-nos suas observações e responda às seguintes perguntas.
2. Quais discussões você adicionaria a este artigo?
3. Você encontrou algum erro ou argumento inconsistente? Dê uma justificativa detalhada.

¹Todos os autores com suas afiliações aparecem no final deste artigo.

Introdução

4. Informações complementares sobre algumas propriedades que apresentamos neste trabalho estão disponíveis em [1–3].
5. Sabe-se que o menor número primo é 2, o único par. Os demais primos são ímpares e podem ser escritos na forma $4m + 1$ ou $4m + 3$, com $m \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ [2, 3].
6. O objetivo deste artigo é mostrar que um número será representável somente se todos os fatores primos da forma $4m + 3$ na decomposição de n possuírem expoentes pares.

Teorema

7. *Um número natural n pode ser representado como uma soma de dois quadrados se, e somente se, todo fator primo de n da forma $p = 4m + 3$ aparece com um expoente par na decomposição de n em números primos. [1]*

Preliminares

8. Sejam $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ e $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.
9. Para $k \in \mathbb{N}$, diz-se que a e b são congruentes se os restos da divisão euclidiana por k são iguais, e escreve-se: $a \equiv b \pmod{k}$.
10. Pela divisão euclidiana, adaptada de [4], $\forall n \in \mathbb{Z}, \exists m, r \in \mathbb{Z}$, únicos, tal que $n = km + r$, $r \in \{0, 1, 2, \dots, k - 1\}$.
11. Para $k = 4$, $n = 4m + r$, com $r \in \{0, 1, 2, 3\}$.
12. Por (11), $n = 4m + 0$, $n = 4m + 1$, $n = 4m + 2$ ou $n = 4m + 3$, ou seja, $n \equiv 0, 1, 2$ ou $3 \pmod{4}$, respectivamente.

13. Por (12), tem-se que os números da forma:

(i) $4m + 0$ e $4m + 2$ são pares, pois $n = 4m + 0 = 2 \cdot 2m = 2m'$ e $n = 4m + 2 = 2 \cdot (2m + 1) = 2m''$, com $m', m'' \in \mathbb{N}_0$; e

(ii) $n = 4m + 1$ e $n = 4m + 3$ são ímpares, pois $n = 4m + 1 = 2 \cdot 2m + 1 = 2m' + 1$ e $n = 4m + 3 = 2 \cdot (2m + 1) + 1 = 2m'' + 1$, com $m', m'' \in \mathbb{N}_0$.

14. Por (12) e (13), todo primo $p \neq 2$ é da forma $4m + 1$ ou $4m + 3$.

15. Teorema: *Seendo p um número primo, a equação $x^2 + y^2 = p$ tem solução se, e somente se, $p = 2$ ou $p = 4m + 1$.*

16. Para demonstração de (15), veja [5].

Prova do teorema (7)

17. Definição: *Um número $n \in \mathbb{N}$ é representável quando pode ser escrito como a soma dos quadrados de dois números naturais de $\mathbb{N}_0$.*

18. $5 = 2^2 + 1^2$, $9 = 3^2 + 0^2$, $13 = 3^2 + 2^2$ e $41 = 4^2 + 5^2$ são exemplos de números representáveis.

19. Seja $n \in \mathbb{N}$ um número representável, com $n = x^2 + y^2$, $x, y \in \mathbb{N}_0$.

20. Lema: O número natural n pode ser decomposto da seguinte forma:
 $n = 2^\alpha \cdot p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_r^{\alpha_r} \cdot q_1^{\beta_1} \cdot q_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot q_s^{\beta_s}$, com $p_i = 4m + 1 \equiv 1 \pmod{4}$ e $q_j = 4m + 3 \equiv 3 \pmod{4}$, $i = 1, 2, \dots, r$ e $j = 1, 2, \dots, s$, com $m \in \mathbb{N}_0$.

21. Por exemplo, em $700 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7$, tem-se $p = 5$ e $q = 7$.

22. Note que $n = 1 = 1^2 + 0^2$ e $n = 2 = 1^2 + 1^2$ são representáveis.

23. Por (14) e (20), se p é primo, $p \neq 2$, então $p \equiv 1 \pmod{4}$ ou $p \equiv 3 \pmod{4}$.

24. Por (9), tem-se

- (i) $x = 0 \Rightarrow x^2 = 0^2 = 0 \equiv 0 \pmod{4}$;
- (ii) $x = 1 \Rightarrow x^2 = 1^2 = 1 \equiv 1 \pmod{4}$;
- (iii) $x = 2 \Rightarrow x^2 = 2^2 = 4 \equiv 0 \pmod{4}$;
- (iv) $x = 3 \Rightarrow x^2 = 3^2 = 9 \equiv 1 \pmod{4}$.

25. Assim, por (24), $\forall x \in \mathbb{N}_0$,

- (i) se x é par $\Rightarrow x^2 = (2w)^2 = 4w^2 \equiv 0 \pmod{4}$, $w \in \mathbb{N}_0$;
- (ii) se x é ímpar $\Rightarrow x^2 = (2w+1)^2 = 4(w^2+w)+1 = 4m+1 \equiv 1 \pmod{4}$,
 $m = w^2 + w$, $w \in \mathbb{N}_0$.

26. Por (25), $\forall x, y \in \mathbb{N}_0$ e $(x, y) = 1$,

- (i) $x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod{4}$, se x e y são pares;
- (ii) $x^2 + y^2 \equiv 1 \pmod{4}$, se x e y possuem paridade distintas;
- (iii) $x^2 + y^2 \equiv 2 \pmod{4}$, se x e y são ímpares.

27. Por (15) e (26.ii), $p = x^2 + y^2 \equiv 1 \pmod{4}$, ou seja, $p = 4m + 1$ é representável.

28. Se $n_1 = x_1^2 + y_1^2$ e $n_2 = x_2^2 + y_2^2$ são representáveis, então

$$\begin{aligned} n_1 \cdot n_2 &= (x_1^2 + y_1^2) \cdot (x_2^2 + y_2^2) \\ &= x_1^2 x_2^2 + x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2 + y_1^2 y_2^2 \\ &= x_1^2 x_2^2 + 2x_1 x_2 y_1 y_2 + y_1^2 y_2^2 + x_1^2 y_2^2 - 2x_1 x_2 y_1 y_2 + x_2^2 y_1^2 \\ &= (x_1 x_2 + y_1 y_2)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 \end{aligned}$$

é representável.

29. Se $n = x^2 + y^2$ é representável, então $n \cdot w^2 = (x^2 + y^2) \cdot w^2 = (xw)^2 + (yw)^2$, $w \in \mathbb{N}$, é representável.

30. Se o primo $q = 4m + 3 \mid n = x^2 + y^2 \Rightarrow q \mid x$ e $q \mid y$.

31. Por (30), se $q^2 \mid n = x^2 + y^2 \Rightarrow q^2 \mid x^2$ e $q^2 \mid y^2$.

32. O número $q = 4m + 3$ não é representável.

(i) Suponha, por contradição, que $q = 4m + 3$ seja representável.

(ii) Por (15), $x \not\equiv 0 \pmod{q} \Rightarrow \exists \bar{x}; x \cdot \bar{x} \equiv 1 \pmod{q}$.

(iii) Por (30), $q \mid x^2 + y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod{q}$.

(iv) Multiplicando a congruência $x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod{q}$ por $\bar{x}^2$, tem-se:

$$\begin{aligned}(x^2 + y^2) \cdot \bar{x}^2 &\equiv 0 \cdot \bar{x}^2 \pmod{q} \Rightarrow (x\bar{x})^2 + (\bar{x}y)^2 \equiv 0 \pmod{q} \\ &\Rightarrow 1 + (\bar{x}y)^2 \equiv 0 \pmod{q},\end{aligned}$$

que é impossível para $q = 4m + 3$.

33. De (20), tem-se $q_j^{\beta_j} = (4m + 3)^{\beta_j}$, $j = 1, 2, \dots, s$.

34. Por (33),

$$(i) \text{ se } \beta_j \text{ é ímpar: } \beta_j = 2\beta'_j + 1 \Rightarrow q_j^{\beta_j} = q_j^{2\beta'_j + 1} = q_j^{2\beta'_j} \cdot q_j = \left(q_j^{\beta'_j}\right)^2 \cdot q_j.$$

$$(ii) \text{ se } \beta_j \text{ é par: } \beta_j = 2\beta'_j \Rightarrow q_j^{\beta_j} = q_j^{2\beta'_j} = \left(q_j^{\beta'_j}\right)^2.$$

35. Por (32), a igualdade de (34.i), $q_j^{\beta_j} = \left(q_j^{\beta'_j}\right)^2 \cdot q_j$, não é representável.

36. De (34), conclui-se que apenas q_j^2 é representável, pois $q_j^2 = q_j^2 + 0^2$.

37. Portanto, o número natural $n = x^2 + y^2 = 2^\alpha \cdot p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_r^{\alpha_r} \cdot q_1^{\beta_1} \cdot q_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot q_s^{\beta_s}$ é representável $\Leftrightarrow \beta_j$ for par, $j = 1, 2, \dots, s$.

Considerações Finais

38. Portanto, foi mostrado

(i) que na decomposição em fatores primos do número natural

$$n = x^2 + y^2 = 2^\alpha \cdot p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_r^{\alpha_r} \cdot q_1^{\beta_1} \cdot q_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot q_s^{\beta_s},$$

tem-se que os fatores primos 2 e $p_i = 4m + 1$, $m \in \mathbb{N}$, são representáveis;

(ii) que o quadrado de um fator primo e o produto de dois números representáveis também são representáveis;

(iii) que o fator primo $q_j = 4m + 3$, $m \in \mathbb{N}_0$, é representável somente se possuir um expoente par; e

(iv) por fim, que o número natural $n = x^2 + y^2$ é representável se, e somente se, em sua decomposição, todos os fatores primos da forma $4m + 3$, possuírem expoentes pares.

Ciência Aberta

O **arquivo latex** para este artigo, juntamente com outros *arquivos suplementares*, estão disponíveis [6].

Referências

- [1] AIGNER, Martin; ZIEGLER, Günter M.. **Proofs from THE BOOK**. 6. ed. Berlim: Springer, 2018. 326 p.
- [2] FREIRE, Benedito Tadeu V. **Números primos: Os argumentos de euclides e aplicações**. CD da Revista do Professor de Matemática (RPM), São Paulo: IME USP, 2012. Disponível em <<http://rpm.org.br/cdrpm/11/2.htm>>. Acesso em: 26 out. 2020.

- [3] PINTO, Ana Carolina Neves et al. **Inteiros que são soma de dois quadrados**. 2011. 18 f. Monografia (Especialização) - Curso de Matemática, Departamento de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas - Sp, 2011. Disponível em: <<https://cutt.ly/IgQbwsR>>. Acesso em: 26 out. 2020.
- [4] HEFEZ, Abramo. **Aritmética**: coleção profmat. 2. ed. Rio de Janeiro: Sbm, 2016. 288 p.
- [5] SANTOS, João Evangelista Cabral dos. **Números Inteiros como soma de Quadrados**. 2013. 60 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Profmat, Departamento de Matemática, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa - Pb, 2013. Disponível em: <<https://cutt.ly/agQvc9y>>. Acesso em: 26 out. 2020.
- [6] Lobo, Matheus P. “Open Journal of Mathematics and Physics (OJMP).” *OSF*, 21 Apr. 2020.
<https://doi.org/10.17605/osf.io/6hzyp>

Colaboração Matemática Aberta

Giordane Lima Santana (autor principal,
giordanesantana@hotmail.com)^{1,2}
<https://orcid.org/0000-0002-2935-3761>

Matheus Pereira Lobo (mplobo@uft.edu.br)^{1,3}
<https://orcid.org/0000-0003-4554-1372>

Davi Santana de Oliveira Silva^{1,4}

Hans Müller Silva Oliveira^{1,5}

Francisco Djalma da Silva Paulo^{1,6}

¹Universidade Federal do Tocantins (Brasil)

²Escola Paroquial Luiz Augusto (Tocantins, Brasil)

³Universidade Aberta (UAb, Portugal)

⁴Escola Municipal Turma da Mônica (Tocantins, Brasil)

⁵Colégio Invictos (Tocantins, Brasil)

⁶Colégio Militar do Tocantins, Unidade 3 (Tocantins, Brasil)