ANALISIS REAL 1

O L E H :

MUHAMMAD SUBHAN

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS NEGERI PADANG

2017

Kata Pengantar

Analisis Real adalah suatu studi kritis dan mendalam tentang kalkulus pada bilangan real dengan mendasarkan pada pemahaman tentang prinsip dasarnya. Tujuan penulisan buku ini adalah untuk membantu mahasiswa S1 Jurusan Matematika yang mengambil matakuliah Analisis Real 1 dalam memahami konsep-konsep dasar pada bilangan real. Buku ini dirancang untuk mahasiswa tahun kedua atau ketiga yang telah memahami pembuktian matematika pada matakuliah Pengantar Dasar Matematika dan Kalkulus. Selain mahasiswa, buku ini juga bisa dibaca oleh guru matematika sekolah menengah untuk pemantapan materi bilangan real.

Buku ini terdiri dari tiga bab. Pada Bab I diberikan gambaran tentang makna analisis real dan tinjauan ulang tentang materi-materi dasar seperti strategi pembuktian, himpunan, dan fungsi. Pada Bab II dijelaskan tentang sifat-sifat bilangan real, yang meliputi sifat aljabar, sifat urutan, nilai mutlak, sifat kelengkapan dan aplikasinya, serta interval. Sementara pada Bab III dijelaskan tentang konsep barisan bilangan real yang meliputi pengertian limit barisan, teorema-teorema limit, barisan monoton dan Teorema Kekonvergenan Monoton, subbarisan dan Barisan Cauchy. Pada setiap bab diberikan soal yang diselesaikan dan latihan yang cukup dengan soal yang bervariasi tingkat kesulitan maupun permasalahannya.

Penyelesaian buku ini tidak terlepas dari kontribusi banyak pihak. Untuk itu, penulis menyampaikan terima kasih yang tak terhingga kepada tim pembina mata kuliah Analisis Real 1 (Dra. Helma, M.Si, Dra. Arnellis, M. Si, Dra. Dewi Murni, M. Si, Defri Ahmad, S. Pd, M. Si) yang telah memberi masukan terhadap materi dalam buku ini sejak masih berbentuk hand-out sampai agak lengkap seperti sekarang ini. Ucapan terima kasih juga ditujukan kepada mahasiswa Jurusan Matematika UNP peserta mata kuliah yang telah mengkritisi tulisan dan cara penuturan materi dalam buku ini.

Padang, November 2016

Muhammad Subhan.

Daftar Isi

Kata Pengantar	ii
Daftar Isi	iii
1 Pengantar	1
1.1 Analisis Real	1
1.1.1 Apakah Analisis itu?	1
1.1.2 Bilangan Real	2
1.2 Strategi Pembuktian Deduktif	3
1.2.1 Strategi Pembuktian untuk Konklusi berupa Implikasi	4
1.2.2 Strategi Pembuktian untuk Konklusi berupa Negasi	6
1.2.3 Strategi Pembuktian Konklusi yang Memuat Kuantor	6
1.2.4 Strategi Pembuktian Konklusi berupa Biimplikasi	8
1.2.5 Strategi Pembuktian Konklusi berupa Disjungsi	8
1.3 Induksi Matematika	9
1.3.1 Prinsip Induksi Matematika	9
1.3.2 Prinsip Induksi Kuat	13
1.4 Himpunan	15
1.4.1 Operasi pada Himpunan	16
1.5 Fungsi	20
1.5.1 Fungsi Injektif, Surjektif dan Bijektif	23

1.5.2	Komposisi dan Invers	24
1.5.3	Peta dan Prapeta	25
1.6	Latihan	27
2	Sifat-sifat Bilangan Real	29
2.1	Sifat Aljabar $\mathbf{R}$	29
2.1.1	$(\mathbf{R}, +, \cdot)$ adalah Lapangan	29
2.1.2	Bilangan Rasional dan Irrasional	33
2.1.3	Soal yang Diselesaikan	35
2.1.4	Latihan	40
2.2	Sifat Urutan $\mathbf{R}$	41
2.2.1	Aksioma Sifat Urutan	41
2.2.2	Sifat Urutan Dasar	42
2.2.3	Beberapa Penggunaan Sifat Urutan	46
2.2.4	Soal yang Diselesaikan	47
2.2.5	Latihan	49
2.3	Nilai Mutlak	50
2.3.1	Sifat-sifat Nilai Mutlak	52
2.3.2	Soal yang Diselesaikan	57
2.3.3	Latihan	61
2.4	Sifat Kelengkapan $\mathbf{R}$	63
2.4.1	Himpunan Terbatas	63
2.4.2	Supremum dan Infimum	64
2.4.3	Soal yang Diselesaikan	67
2.4.4	Latihan	71
2.5	Aplikasi Supremum	72
2.5.1	Sifat Archimedes	73
2.5.2	Pembuktian adanya bilangan Irrasional $\sqrt{2}$ dll	74

2.5.3	Teorema Kerapatan Bilangan Rasional dan Irrasional	76
2.5.4	Soal yang Diselesaikan	78
2.5.5	Latihan	83
2.6	Interval dan Desimal	84
2.6.1	Interval	84
2.6.2	Desimal	85
2.6.3	Soal yang Diselesaikan	85
2.6.4	Latihan	87
3	Barisan Bilangan Real	89
3.1	Barisan dan Limitnya	89
3.1.1	Limit Barisan	91
3.1.2	Ekor Barisan	93
3.1.3	Soal yang Diselesaikan	94
3.1.4	Latihan	97
3.2	Teorema-teorema Limit	98
3.2.1	Barisan Konvergen selalu Terbatas	98
3.2.2	Kekonvergenan Barisan Hasil Operasi Aljabar Dua Barisan . . .	100
3.2.3	Kelestarian Urutan	102
3.2.4	Prinsip Apit	103
3.2.5	Kekonvergenan/Kedivergenan Barisan Bilangan Positif	104
3.2.6	Soal yang Diselesaikan	107
3.2.7	Latihan	110
3.3	Teorema Kekonvergenan Monoton	111
3.3.1	Soal yang Diselesaikan	113
3.3.2	Latihan	117
3.4	Subbarisan dan Kriteria Cauchy	117
3.4.1	Subbarisan	117

3.4.2	Barisan Cauchy	119
3.4.3	Soal yang Diselesaikan	121
3.4.4	Latihan	122

Referensi	123
------------------	------------

Bab 1

Pengantar

1.1 Analisis Real

1.1.1 Apakah Analisis itu?

Secara kasar, analisis berurusan dengan bilangan, himpunan bilangan, dan operasi pada bilangan. Secara khusus, analisis berkaitan dengan apa yang terjadi ketika sejumlah operasi tertentu dilakukan pada suatu bilangan waktu yang cukup besar, seringkali untuk waktu yang takberhingga. Jadi, berlawanan dengan matematika diskrit atau matematika hingga, analisis dapat dikatakan sebagai bentuk dari matematika takhingga. Posisinya dapat dikatakan sebagai salah satu dari kreasi yang terbesar, terkuat, dan terdalam dari pemikiran manusia.

*The infinite! No other question has ever moved so profoundly the spirit of man
(David Hilbert, 1921)*

Pemikiran yang besar, dalam, dan kuat itu tidak bisa terjadi setiap malam. Pada kenyataannya, diperlukan waktu 2500 tahun dari masa penemuan pertama masalah Pythagoras, sampai ditemukannya dasar-dasar yang kuat dari analisis pada abad XIX. Sepanjang abad XVII dan XVIII kalkulus berkembang, menjadi cabang matematika

yang penting dan menjadi suatu alat berpengaruh, dapat menggambarkan fenomena fisika seperti pergerakan planet, perilaku gelombang, dan hukum-hukum termodinamika. Periode ini memunculkan hampir semua konsep-konsep yang sekarang bisa ditemukan dalam perkuliahan kalkulus dasar.

Jika perkembangan kalkulus terbentuk sepanjang abad XVII dan XVIII, maka akar-akarnya terbentuk sepanjang abad XIX. Kalkulus mengalami suatu revolusi dimana ide-ide fundamental dimunculkan dan teori yang mendasarinya dipahami untuk pertama kali. Dalam revolusi ini, kalkulus ditulis ulang dalam bentuk dasarnya oleh para perintis seperti Bernhard Bolzano, Augustin Cauchy, Karl Weierstrass, Richard Dedekind, and Georg Cantor. Anda akan sering menemukan nama-nama tersebut berulang kali pada buku-buku analisis karena atas usaha mereka lah sebagian besar dari apa yang kita kenal sebagai analisis saat ini dibentuk. Pekerjaan mereka memungkinkan kita mengenal sifat-sifat dari sistem bilangan kita dan memberi kita pemahaman pertama yang kokoh tentang konsep-konsep limit, kekontinuan, turunan, dan integral.

1.1.2 Bilangan Real

Bilangan real digunakan secara luas di universitas dan sekolah menengah atas, tetapi sering tidak didefinisikan secara mendalam. Jika bilangan bulat dan rasional secara cermat dipelajari di sekolah sejak sekolah dasar, maka bilangan real, karena kekontinuannya, sering terlupakan. Siswa mengetahui fakta bahwa ada bilangan yang tidak rasional, tetapi pertanyaan tentang "koleksi semua bilangan itu" diabaikan. Mahasiswa tahun pertama cukup puas dengan ilustrasi bahwa bilangan real adalah titik-titik pada garis bilangan. Kalkulus lanjut juga menghindari hal tersebut. Pada akhirnya, presentasi formalnya baru ditemukan pada perkuliahan Analisis Real.

Banyak dari kita, meskipun lulusan S1 Matematika, memiliki ide yang samar-samar tentang apa sesungguhnya bilangan real itu. Coba kita lihat, dari deretan pertanyaan berikut, berapakah yang bisa kita jawab dengan benar dan memuaskan?

1. Apa makna dari $0,99999\dots$? Apakah kurang dari 1? Sama dengan 1?
2. Bagaimana kita tahu bahwa $\sqrt[3]{2}$ adalah bilangan real?
3. Layar kalkulator (hanya bisa menampilkan 9 angka) menunjukkan angka 1,35353535. Dapatkah anda memastikan bahwa bilangan itu rasional?
4. Bagaimana kita menambahkan/mengalikan dua bilangan real (seperti $\sqrt{2}$, π)?
5. Bagaimana bilangan real dikenali? Dapatkah semua bilangan real dideskripsikan/dihitung?
6. Bagaimana kita memastikan bahwa sistem bilangan real tertutup terhadap operasi seperti eksponensial, logaritma, dan lain-lain?
7. Sejarahnya, contoh pertama bilangan takrasional dihasilkan dari pemecahan/solusi persamaan aljabar seperti $x^2 - 2 = 0$ (sewaktu mengukur diagonal dari persegi dengan sisi 1). Apakah ini motivasi kita untuk memperluas? Jika ya, mengapa tidak semua solusi persamaan aljabar (dengan koefisien rasional) merupakan suatu bilangan real (misalnya, $x^2 + 1 = 0$)?

Hanya setelah mengenal lebih dalam mengenai bilangan real, pertanyaan-pertanyaan di atas dapat dijawab dengan berarti.

1.2 Strategi Pembuktian Deduktif

Pada bagian ini, kita ingat lagi beberapa strategi atau format pembuktian deduktif, tetapi perlu ditegaskan bahwa **tidak ada cara yang pasti untuk sampai pada suatu bukti** dan juga tidak ada bukti yang terbaik. Mungkin perlu kita ingat filosofi tentang pembuktian yang dikemukakan oleh **Yu I. Manin** dalam bukunya *A Course in Mathematical Logic*:

A good proof is one that make us wiser

1.2.1 Strategi Pembuktian untuk Konklusi berupa Implikasi

Misalkan konklusi dari sebuah argumen adalah $P \Rightarrow Q$. Ada tiga strategi yang dapat digunakan, yaitu bukti langsung, kontraposisi, dan bukti taklangsung (kontradiksi).

Strategi 1(Langsung): Asumsikan P benar dan kemudian buktikan Q .

Contoh 1.1. Misalkan a dan b bilangan real. Buktikan bahwa jika $0 < a < b$, maka $a^2 < b^2$.

Analisis pendahuluan

Kita diberikan premis-premis bahwa " a dan b bilangan real". Konklusi kita berbentuk $P \Rightarrow Q$ dimana P adalah pernyataan " $0 < a < b$ " dan Q adalah pernyataan " $a^2 < b^2$ ". Dengan strategi ini, kita seharusnya mengasumsikan " $0 < a < b$ " benar dan menggunakannya untuk membuktikan " $a^2 < b^2$ ".

Bentuk Pembuktian Akhir

Misalkan a dan b bilangan real.

Misalkan $0 < a < b$.

Karena $a > 0$, jika dikalikan dengan a , maka pertidaksamaan $0 < a < b$ memenuhi $0 < a^2 < ab$. Begitu juga karena $b > 0$, jika dikalikan dengan b , maka pertidaksamaan $0 < a < b$ memenuhi $0 < ab < b^2$.

Dengan menyusun sesuai urutan, kita peroleh $0 < a^2 < ab < b^2$.

Jadi, jika $0 < a < b$, maka $a^2 < b^2$.

Strategi 2 (Kontraposisi): Asumsikan Q salah dan kemudian buktikan bahwa P juga salah.

Contoh 1.2. Misalkan a , b , dan c bilangan real dan $a > b$. Buktikan bahwa jika $ac \leq bc$, maka $c \leq 0$.

Analisis pendahuluan

Kita diberikan premis-premis bahwa " a , b , dan c bilangan real" dan " $a > b$ ". Konklusi kita berbentuk $P \Rightarrow Q$ dimana P adalah pernyataan " $ac \leq bc$ " dan Q adalah pernyataan " $c \leq 0$ ".

Berdasarkan strategi ini, kontraposisi dari tujuan kita berbentuk $\neg Q \Rightarrow \neg P$ dimana $\neg Q$ adalah pernyataan " $c > 0$ " dan $\neg P$ adalah pernyataan " $ac > bc$ ".

Bentuk Pembuktian Akhir

Misalkan a , b , dan c bilangan real dan $a > b$.

Misalkan $c > 0$.

Karena $a > b$, jika dikalikan dengan c positif, maka pertidaksamaan $a > b$ memenuhi $ac > bc$.

Jadi, jika $ac \leq bc$, maka $c \leq 0$.

Strategi 3 (Tidak Langsung): Asumsikan P dan $\neg Q$ dan kemudian temukan kontradiksi.

Contoh 1.3. Misalkan a , b , dan c bilangan real dan $a > b$. Buktikan bahwa jika $ac \leq bc$, maka $c \leq 0$.

Analisis pendahuluan

Kita diberikan premis-premis bahwa " a , b , dan c bilangan real" dan " $a > b$ ". Konklusi kita berbentuk $P \Rightarrow Q$ dimana P adalah pernyataan " $ac \leq bc$ " dan Q adalah pernyataan " $c \leq 0$ ".

Berdasarkan strategi ini, kita asumsikan anteseden " $ac \leq bc$ " dan negasi dari konsekuen yaitu " $c > 0$ " benar. Tujuan kita selanjutnya adalah menemukan kontradiksi.

Bentuk Pembuktian Akhir

Misalkan a , b , dan c bilangan real dan $a > b$.

Misalkan $ac \leq bc$.

Asumsikan $c > 0$.

Karena $a > b$, jika dikalikan dengan c positif, maka pertidaksamaan $a > b$ memenuhi $ac > bc$. Kontradiksi dengan $ac \leq bc$.

Jadi, jika $ac \leq bc$, maka $c \leq 0$.

1.2.2 Strategi Pembuktian untuk Konklusi berupa Negasi

Untuk membuktikan konklusi berbentuk $\neg P$, strateginya adalah:

Asumsikan P benar, kemudian temukan kontradiksi.

Contoh 1.4. Buktikan jika $a^2 + b = 13$ dan $b \neq 4$, maka $a \neq 3$.

Analisis pendahuluan

Kita diberikan premis-premis bahwa " $a^2 + b = 13$ " dan " $b \neq 4$ ". Konklusi kita berbentuk $\neg P$ yaitu pernyataan " $a \neq 3$ ".

Berdasarkan strategi pembuktian, premis-premis menjadi " $a^2 + b = 13$ " dan " $a = 3$ ". Tujuannya adalah menemukan suatu kontradiksi.

Bentuk Pembuktian Akhir

Misalkan $a^2 + b = 13$ dan $b \neq 4$ bilangan real.

Andaikan $a = 3$.

Maka, $a^2 + b = 9 + b \neq 13$. Kontradiksi dengan $a^2 + b = 13$.

Karena itu, $a \neq 3$.

Jadi, jika $a^2 + b = 13$ dan $b \neq 4$, maka $a \neq 3$.

1.2.3 Strategi Pembuktian Konklusi yang Memuat Kuantor

Kuantor Universal

Untuk membuktikan konklusi berbentuk $\forall x, P(x)$, strateginya adalah:

Ambil sebarang x , lalu buktikan $P(x)$.

Contoh 1.5. *Buktikan bahwa semua bilangan bulat yang genap mempunyai kuadrat yang genap.*

Analisis pendahuluan

Premis kita dalam masalah ini adalah "bilangan bulat genap". Konklusi kita berbentuk " $\forall x, P_x$ " dimana x kuadrat bilangan bulat dan P_x melambangkan x bilangan genap.

Berdasarkan strategi pembuktian, premis kita akan menjadi " x sebarang bilangan bulat genap" dan tujuan kita adalah membuktikan " x^2 juga bilangan bulat genap"

Bentuk Pembuktian Akhir

Ambil x sebarang bilangan bulat genap.

Maka, $x = 2n$ untuk suatu n bilangan bulat.

Jika dikuadratkan, maka diperoleh $x^2 = (2n)^2 = 4n^2 = 2(2n^2)$.

Karena $2n^2$ adalah bilangan bulat, $2(2n^2)$ adalah bilangan genap.

Karena x sebarang, kita dapat menyimpulkan bahwa $\forall x$ genap, x^2 genap.

Kuantor Eksistensial

Untuk membuktikan tujuan berbentuk $\exists x, P(x)$ strateginya adalah:

Temukan/Pilih suatu x yang memenuhi $P(x)$

Contoh 1.6. *Buktikan bahwa terdapat bilangan real x yang memenuhi $x + 9 = 1$*

Analisis pendahuluan Konklusi kita pada masalah ini berbentuk " $\exists x, P_x$ " dimana x bilangan real dan P_x melambangkan $x + 9 = 15$.

Berdasarkan strategi pembuktian, premis kita akan menjadi "pilih x suatu bilangan bulat" dan tujuan kita adalah membuktikan " $x + 9 = 15$ ".

Bentuk Pembuktian Akhir

Pilih $x = -8$.

Maka, $x + 9 = (-8) + 9 = 1$.

Jadi, $\exists x = -8$ sehingga $x + 9 = 1$.

1.2.4 Strategi Pembuktian Konklusi berupa Biimplikasi

Untuk membuktikan konklusi berbentuk $P \Leftrightarrow Q$, strateginya adalah:

Buktikan $P \Rightarrow Q$ dan $Q \Rightarrow P$ secara terpisah.

Contoh 1.7. Misalkan $y > 0$. Buktikan bahwa $xy = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$.

Analisis pendahuluan

Pada masalah ini, premisnya adalah " $y > 0$ " dan konklusi " $(xy = 0) \Leftrightarrow (x = 0)$ ".

Berdasarkan strategi pembuktian, premis kita akan menjadi " $y > 0$ " dan konklusi ada dua, yaitu " $(xy = 0) \Rightarrow (x = 0)$ " dan " $(x = 0) \Rightarrow (xy = 0)$ ".

Bentuk Pembuktian Akhir

Misalkan $y > 0$.

Misalkan $xy = 0$.

Karena $y > 0$, maka $\frac{1}{y} \in \mathbf{R}$ sehingga

$$\begin{aligned} x \cdot y = 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{y}(x \cdot y) = \frac{1}{y} \cdot 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

Terbukti jika $xy = 0$, maka $x = 0$.

Misalkan $x = 0$.

Maka, $xy = 0 \cdot y = 0$.

Terbukti jika $x = 0$, maka $xy = 0$.

Jadi, untuk $y > 0$, $xy = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$.

1.2.5 Strategi Pembuktian Konklusi berupa Disjungsi

Untuk membuktikan tujuan berbentuk $P \vee Q$, strateginya adalah:

Jika P berlaku, maka bukti selesai. Jika P tidak berlaku, buktikan Q .

Contoh 1.8. Buktikan bahwa jika $a \cdot b = 0$ maka $a = 0$ atau $b = 0$.

Analisis pendahuluan

Pada masalah ini premisnya adalah " $a \cdot b = 0$ " dan konklusinya " $a = 0$ atau $b = 0$ "

Berdasarkan strategi pembuktian, premisnya menjadi " $a \cdot b = 0$ " dan " $a = 0$ " berakibat bukti selesai atau " $a \neq 0$ " berakibat " $b = 0$ ".

Bentuk Pembuktian Akhir

Misalkan $a \cdot b = 0$.

Jika $a = 0$, maka bukti selesai.

Sekarang, andaikan $a \neq 0$

$$\begin{aligned} \text{maka } \frac{1}{a} \in \mathbf{R} \text{ sehingga } a \cdot b = 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{a}(a \cdot b) = \frac{1}{a} \cdot 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{a} \cdot a\right) \cdot b = 0 \\ &\Leftrightarrow 1 \cdot b = 0 \\ &\Leftrightarrow b = 0 \end{aligned}$$

Jadi, jika $a \cdot b = 0$, maka $a = 0$ atau $b = 0$.

1.3 Induksi Matematika

Sebagian besar metode pembuktian dalam Matematika adalah metode deduksi, yaitu mengikuti sejumlah pemikiran (premis yang bersifat umum) untuk memperoleh suatu konklusi/kesimpulan yang sifatnya khusus. Namun, adakalanya metode deduksi tidak dapat digunakan, misalnya untuk membuktikan jumlah berhingga bilangan ganjil yang pertama merupakan suatu kuadrat sempurna. Pada kasus seperti itu digunakan metode induksi, yaitu memperoleh kesimpulan yang bersifat umum dari informasi-informasi (premis yang bersifat khusus). Alat bukti yang bisa digunakan pada permasalahan ini adalah Prinsip Induksi Matematika.

1.3.1 Prinsip Induksi Matematika

Prinsip induksi matematika menggunakan bilangan asli karena bilangan asli memiliki sifat terurut dengan baik (*well-ordering property*).

(Sifat Terurut dengan Baik)

Setiap subhimpunan takkosong dari $\mathbf{N}$ mempunyai elemen terkecil.

Lebih detailnya, misalkan $S \subseteq \mathbf{N}$, $S \neq \emptyset$, maka $\exists m \in S$ sedemikian sehingga $m \leq x, \forall x \in S$.

Teorema 1.1. (*Prinsip Induksi Matematika*)

Misalkan S subhimpunan takkosong dari $\mathbf{N}$ yang memiliki sifat berikut:

1. $1 \in S$
2. Jika $k \in S$, maka $k + 1 \in S$.

Maka $S = \mathbf{N}$

Bukti. Karena $S \subseteq \mathbf{N}$, kita tinggal membuktikan $\mathbf{N} \subseteq S$.

Andaikan $\mathbf{N} \not\subseteq S$, maka $\mathbf{N} \setminus S$ takkosong. Menurut sifat terurut dengan baik, $\mathbf{N} \setminus S$ memiliki elemen terkecil, misalkan m . Perhatikan bahwa $m \neq 1$ karena $1 \in S$. Karena itu, $m > 1$ sehingga $(m - 1) \in \mathbf{N}$. Tetapi, karena m elemen terkecil dari $\mathbf{N} \setminus S$ dan $m - 1 < m$, maka $m - 1$ haruslah anggota S .

Sekarang, jika $m - 1 \in S$, maka menurut sifat S yang kedua $(m - 1) + 1 = m \in S$. Hal ini kontradiksi dengan $m \in \mathbf{N} \setminus S$. Jadi, pengandaian salah sehingga haruslah $\mathbf{N} \subseteq S$. Akibatnya, $S = \mathbf{N}$. ■

Secara praktis, penggunaan prinsip induksi matematika dapat dilakukan dengan cara berikut:

Misalkan untuk setiap $n \in N$, $P(n)$ adalah pernyataan yang berkaitan dengan n . Jika dipenuhi kedua pernyataan berikut:

- $P(n_0)$ benar. (Ini disebut **Langkah Awal**)
- Jika $P(k)$ benar, maka $P(k+1)$ benar. (Ini disebut **Langkah Induktif**)

maka $P(n)$ benar untuk setiap $n \geq n_0 \in N$.

Contoh 1.9. Buktikan dengan induksi bahwa untuk semua $n \in N$

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Bukti. Disini $P(n) : 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

- Langkah awal:

Untuk $n=1$,

$$1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

sehingga disimpulkan $P(1)$ benar.

- Langkah induksi:

Sekarang, misalkan $P(k)$ benar, yaitu

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

maka untuk $n=k+1$, kita peroleh

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + k + (k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ &= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+2)(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2} \end{aligned}$$

yang menunjukkan $P(k+1)$ benar.

Dengan demikian, kita bisa menyimpulkan $P(n)$ benar untuk semua $n \in \mathbf{N}$. Dengan kata lain, untuk semua $n \in \mathbf{N}$ berlaku

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

■

Contoh 1.10. *Tunjukkan bahwa untuk setiap $n \in \mathbf{N}$, $n^3 + 5n$ habis dibagi 6.*

Bukti. Disini $P(n)$: $n^3 + 5n$ habis dibagi 6.

- Langkah awal:

Untuk $n=1$,

$$1^3 + 5(1) = 6$$

habis dibagi 6. Jadi, $P(1)$ benar.

- Langkah induksi:

Sekarang, misalkan misalkan $P(k)$ benar, yaitu $k^3 + 5k$ habis dibagi 6. Dengan kata lain, $k^3 + 5k = 6a$ untuk suatu bilangan asli a .

Maka untuk $n=k+1$, kita peroleh

$$\begin{aligned} (k+1)^3 + 5(k+1) &= (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) + (5k + 5) \\ &= (k^3 + 5k) + (3k^2 + 3k) + 6 \\ &= 6a + 3k(k+1) + 6 \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa k dan $k+1$ adalah bilangan asli berurutan sehingga salah satunya pasti genap dan yang satunya ganjil. Akibatnya, perkaliannya akan genap.

Jadi, $k(k+1) = 2b$ untuk suatu bilangan asli b . Jadi, kita peroleh

$$\begin{aligned} (k+1)^3 + 5(k+1) &= 6a + 3k(k+1) + 6 \\ &= 6a + 3(2b) + 6 \\ &= 6(a + b + 1) \end{aligned}$$

yang menunjukkan bahwa $(k+1)^3 + 5(k+1)$ habis dibagi 6. Hal ini menunjukkan $P(k+1)$ benar.

Dengan demikian, kita bisa menyimpulkan $P(n)$ benar untuk semua $n \in \mathbf{N}$. Atau, untuk semua $n \in \mathbf{N}$, $n^3 + 5n$ habis dibagi 6. ■

1.3.2 Prinsip Induksi Kuat

Teorema 1.2. (*Prinsip Induksi Kuat*)

Misalkan S subhimpunan dari $\mathbf{N}$ sehingga $1 \in S$ dan jika $\{1, 2, \dots, k\} \subseteq S$, maka $k+1 \in S$. Maka $S = \mathbf{N}$

Secara praktis, penggunaan prinsip induksi matematika kuat dapat dilakukan dengan cara berikut:

Misalkan untuk setiap $n \in \mathbf{N}$, $P(n)$ adalah pernyataan yang berkaitan dengan n . Jika dipenuhi kedua pernyataan berikut:

- $P(n_0)$ benar. (Ini disebut **Langkah Awal**)
- Jika $P(n_0), P(n_0 + 1), \dots, P(k)$ benar, maka $P(k + 1)$ benar. (Ini disebut **Langkah Induktif**)

maka $P(n)$ benar untuk setiap $n \geq n_0 \in \mathbf{N}$.

Dengan demikian induksi matematika berdasar pada tautologi berikut:

$$[P(n_0) \wedge ([P(n_0) \wedge P(n_0 + 1) \wedge \dots \wedge P(k)] \Rightarrow P(k + 1))] \Rightarrow \forall n \geq n_0, P(n)$$

Contoh 1.11. Pandang barisan berikut:

$$b_1 = 1$$

$$b_2 = 1$$

$$b_n = 2b_{n-1} + b_{n-2} \text{ untuk } n > 2$$

sehingga diperoleh barisan $1, 1, 3, 7, 17, \dots$. Buktikan bahwa b_n ganjil untuk setiap $n \in \mathbf{N}$.

Bukti. Disini $P(n)$: b_n adalah bilangan ganjil.

- Langkah awal:

Untuk $n=1$, $b_1 = 1$ adalah bilangan ganjil.

Jadi, $P(1)$ benar.

- Langkah induksi:

Sekarang, misalkan misalkan $P(1), P(2), \dots, P(k)$ benar, yaitu $b_1, b_2, \dots, b_k$ bilangan ganjil.

Maka untuk $n=k+1$, kita peroleh $b_{k+1} = 2b_k + b_{k-1}$ juga bilangan ganjil karena suku pertama pada ruas kanan adalah bilangan genap dan b_{k-1} adalah bilangan ganjil.

Dengan demikian, kita bisa menyimpulkan $P(n)$ benar untuk semua $n \in \mathbf{N}$. Atau, untuk semua $n \in \mathbf{N}$, b_n adalah bilangan ganjil. ■

Satu hal yang perlu diingat adalah kadang-kadang penggunaan prinsip induksi kuat bisa memberikan kesimpulan yang salah.

Contoh 1.12. Pada kasus pernyataan "Semua bilangan asli adalah bilangan ganjil".

Dengan prinsip induksi kuat, kita tunjukkan bahwa 1 adalah bilangan ganjil. Kemudian, jika $\{1, 2, \dots, k\}$ bilangan ganjil, tentu saja $k+1$ juga bilangan ganjil. Akibatnya, kita bisa menunjukkan bahwa semua bilangan asli adalah ganjil yang merupakan suatu pernyataan yang keliru.

Tetapi, kalau kita menggunakan prinsip induksi yang umum, kita tidak akan bisa menunjukkan hal itu. Meskipun kita bisa menunjukkan 1 bilangan ganjil, tetapi kita tidak bisa menunjukkan bahwa jika k bilangan ganjil, maka $k+1$ bilangan ganjil.

Jadi, sekali lagi, gunakanlah prinsip induksi yang umum, kecuali pada situasi yang memang membutuhkan prinsip induksi yang kuat.

1.4 Himpunan

Sampai saat ini, belum ada definisi yang tepat untuk himpunan sehingga secara matematis himpunan tidak didefinisikan. Meskipun demikian, kita akan tampilkan juga definisi himpunan yang bisa dikatakan takresmi.

Definisi 1.1. (*Himpunan*)

Himpunan adalah koleksi objek yang memiliki karakteristik tertentu yang jelas.

Keanggotaan suatu objek dilambangkan dengan tanda " $\in$ " yang pertama kali diperkenalkan oleh Peano (1889), sementara lambang untuk bukan anggota adalah " $\notin$ ".

Misalkan $A = \{a, b\}$ maka $a \in A$, dan $c \notin A$.

Representasi dari himpunan dilakukan dengan dua cara, yaitu:

1. Cara enumerasi/pendaftaran.

Pada cara ini, semua elemen dituliskan dan diletakkan diantara kurung kurawal.

Contoh 1.13. *Himpunan bilangan prima yang kecil dari 10 ditulis $\{2, 3, 5, 7\}$.*

2. Notasi pembuat himpunan.

Pada cara ini, diantara kurung kurawal diletakkan variabel, kemudian dengan dibatasi tanda "|" dituliskan sifat yang mengatur variabel tersebut.

Contoh 1.14. *Himpunan bilangan prima yang kurang dari 10 ditulis $\{x|x \text{ prima}, x < 10\}$.*

Banyaknya elemen berbeda dari suatu himpunan disebut **kardinalitas himpunan**, biasanya dilambangkan dengan $n(..)$ atau $|..|$.

Perbandingan dua himpunan dapat kita selidiki dengan konsep himpunan bagian dan kesamaan himpunan.

Definisi 1.2. (*Himpunan Bagian*)

Misalkan A dan B himpunan. Jika untuk setiap $x \in A$, berlaku $x \in B$ (dengan kata

lain, $x \in A \Rightarrow x \in B$), maka kita katakan A adalah **himpunan bagian** dari B yang dilambangkan dengan $A \subseteq B$.

Aksioma 1.1. (*Aksioma Kesamaan*)

Misalkan A, B adalah himpunan. Maka,

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ dan } B \subseteq A$$

Kita juga perlu mengenal sebuah konsep himpunan yang khusus berikut.

Aksioma 1.2. (*Himpunan Kosong*)

Terdapat sebuah himpunan yang tidak memiliki anggota yang dilambangkan dengan $\emptyset$ atau $\{\}$.

Himpunan kosong ini memiliki status yang khusus seperti dijelaskan dalam teorema berikut

Teorema 1.3. Misalkan A suatu himpunan. Maka berlaku $\emptyset \subseteq A$.

Bukti. Kita akan buktikan dengan menggunakan kontradiksi. Andaikan $\emptyset \not\subseteq A$. Ini berarti terdapat $x \in \emptyset$ dimana $x \notin A$. Kontradiksi dengan $\emptyset$ tidak memiliki anggota. Jadi pengandaian salah, haruslah $\emptyset \subseteq A$. ■

1.4.1 Operasi pada Himpunan

Ada tiga operasi yang bisa dilakukan pada himpunan, yaitu: gabungan, irisan, dan selisih. Berikut definisi dari masing-masing operasi

Definisi 1.3. (*Operasi Himpunan*)

Misalkan A dan B himpunan. Maka:

1. Gabungan dari A dan B yang dilambangkan dengan $A \cup B$ didefinisikan sebagai himpunan $\{x | x \in A \text{ atau } x \in B\}$.

Secara matematis, hal ini dapat kita nyatakan sebagai

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ atau } x \in B$$

2. Irisan dari A dan B yang dilambangkan dengan $A \cap B$ didefinisikan sebagai himpunan $\{x | x \in A \text{ dan } x \in B\}$.

Secara matematis, hal ini dapat kita nyatakan sebagai

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ dan } x \in B$$

3. Selisih dari A dan B yang dilambangkan dengan $A \setminus B$ didefinisikan sebagai himpunan $\{x | x \in A \text{ dan } x \notin B\}$.

Secara matematis, hal ini dapat kita nyatakan sebagai

$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \text{ dan } x \notin B$$

Terkait operasi himpunan di atas, kita juga mengenal koleksi berhingga gabungan dan irisan himpunan yang didefinisikan sebagai berikut

Definisi 1.4. (*Koleksi Berhingga Gabungan dan Irisan Himpunan*)

Misalkan A_i himpunan untuk semua $i = 1, \dots, n$. Maka,

1. Koleksi berhingga gabungan himpunan didefinisikan sebagai

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \{x \mid x \in A_i, \text{ untuk salah satu } i = 1, \dots, n\}$$

2. Koleksi berhingga irisan himpunan didefinisikan sebagai

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = \{x \mid x \in A_i, \text{ untuk semua } i = 1, \dots, n\}$$

Masih terkait operasi himpunan, kita juga mengenal beberapa sifat untuk masing-masing operasi seperti dalam teorema berikut.

Teorema 1.4. (*Sifat Operasi Gabungan*)

Misalkan A , B , dan C himpunan. Maka berlaku

1. $A \cup \emptyset = A$
2. $A \cup B = B \cup A$
3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$

$$4. A \cup A = A$$

$$5. A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$$

Bukti.

1. Akan dibuktikan $A \cup \emptyset \subseteq A$ dan $A \subseteq A \cup \emptyset$.

Misalkan $x \in A \cup \emptyset$. Ini berarti $x \in A$ atau $x \in \emptyset$. Karena $\emptyset$ tidak punya anggota, maka haruslah $x \in A$. Jadi, $A \cup \emptyset \subseteq A$.

Sebaliknya, jelas jika $x \in A$, maka $x \in A \cup \emptyset$ sehingga $A \subseteq A \cup \emptyset$.

2. Latihan.

3. Latihan.

4. Latihan.

5. Akan dibuktikan $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$ dan $A \cup B = B \Rightarrow A \subseteq B$

Misalkan $A \subseteq B$. Ini berarti untuk setiap $x \in A$ berlaku $x \in B$. Akan ditunjukkan $A \cup B \subseteq B$ dan $B \subseteq A \cup B$. Hal yang kedua trivial sehingga kita hanya perlu membuktikan yang pertama. Misalkan $x \in A \cup B$. Ini berarti $x \in A$ atau $x \in B$. Jika $x \in A$, maka $x \in B$ karena $A \subseteq B$. Jadi, $A \cup B \subseteq B$.

Sebaliknya, misalkan $A \cup B = B$. Meskipun ini berarti $A \cup B \subseteq B$ dan $B \subseteq A \cup B$, disini yang kita gunakan hanyalah $A \cup B \subseteq B$ untuk menunjukkan $A \subseteq B$.

Misalkan $x \in A$. Maka $x \in A \cup B$. Karena $A \cup B \subseteq B$, maka $x \in B$. Jadi, $A \subseteq B$.

■

Teorema 1.5. (*Sifat Operasi Irisan*)

Misalkan A , B , dan C himpunan. Maka berlaku

$$1. A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$2. A \cap B = B \cap A$$

$$3. A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

$$4. A \cap A = A$$

$$5. A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$$

Bukti.

1. Andaikan $A \cap \emptyset \neq \emptyset$. Maka terdapat $x \in A \cap \emptyset$. Hal ini berarti terdapat $x \in A$ dan $x \in \emptyset$. Kontradiksi, karena $\emptyset$ tidak punya anggota. Jadi, pengandaian salah. Haruslah $A \cap \emptyset = \emptyset$

2. Latihan.

3. Latihan.

4. Latihan.

5. Latihan.

■

Selain kedua teorema di atas, juga ada teorema yang menyangkut sifat distributif gabungan dan irisan serta teorema De Morgan.

Teorema 1.6. (*Sifat Distributif*)

Misalkan A , B , dan C himpunan. Maka berlaku

$$1. A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$2. A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Bukti.

1. Akan ditunjukkan $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$ dan $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$

- (a) Misalkan $x \in A \cap (B \cup C)$. Ini berarti $x \in A$ dan $x \in (B \cup C)$. Hal ini ekuivalen dengan $x \in A$ dan $(x \in B \text{ atau } x \in C)$. Selanjutnya, ekuivalen

dengan $(x \in A \text{ dan } x \in B)$ atau $(x \in A \text{ dan } x \in C)$ yang berarti $x \in A \cap B$ atau $x \in A \cap C$. Jadi, $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

(b) Ikuti bukti (a) dengan arah berlawanan.

2. Latihan.

■

Teorema 1.7. (*De Morgan*)

Misalkan A , B , dan C himpunan. Maka berlaku

$$1. A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

$$2. A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

Bukti.

1. Akan ditunjukkan $A \setminus (B \cup C) \subseteq (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ dan $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) \subseteq A \setminus (B \cup C)$

(a) Misalkan $x \in A \setminus (B \cup C)$. Ini berarti $x \in A$ dan $x \notin (B \cup C)$. Hal ini ekuivalen dengan $x \in A$ dan $(x \notin B \text{ dan } x \notin C)$. Selanjutnya, ekuivalen dengan $(x \in A \text{ dan } x \notin B)$ dan $(x \in A \text{ dan } x \notin C)$ yang berarti $x \in A \setminus B$ dan $x \in A \setminus C$. Jadi, $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

(b) Ikuti bukti (a) dengan arah berlawanan.

2. Latihan.

■

1.5 Fungsi

Dari dua himpunan, kita juga bisa membuat himpunan baru yang berisi pasangan terurut dari anggota-anggota kedua himpunan.

Definisi 1.5. (*Hasilkali Kartesius*)

Misalkan A dan B himpunan. Hasilkali Kartesius dari A dan B yang dilambangkan dengan $A \times B$ didefinisikan sebagai $\{(a, b) | a \in A, b \in B\}$

Contoh 1.15. Misalkan $A = \{1, 2\}$ dan $B = \{a, b, c\}$.

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}.$$

$$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}.$$

Dari konsep Hasilkali Kartesius kita turunkan konsep relasi berikut.

Definisi 1.6. (*Relasi*)

Relasi dari A ke B adalah himpunan bagian takkosong dari $A \times B$.

Jadi, jika R relasi dari A ke B , maka $R \subseteq (A \times B)$ dan $R \neq \emptyset$. Dari konsep relasi ini kita turunkan konsep fungsi yang merupakan relasi dengan aturan setiap anggota himpunan I **berpasangan dengan tepat satu** anggota himpunan II.

Definisi formal dari fungsi adalah sebagai berikut.

Definisi 1.7. (*Fungsi*)

Misalkan A, B himpunan.

Fungsi f dari A ke B adalah suatu relasi $f \subseteq A \times B$ dimana

setiap $x \in A$ berpasangan dengan tepat satu $y \in B$.

Dalam bahasa teori himpunan, fungsi $f : A \rightarrow B$ dapat dinyatakan sebagai

$$f = \{(x, y) \in A \times B | x \in A, y \in B\}$$

Pasangan (x, y) di dalam fungsi dapat juga dinyatakan dengan $y = f(x)$.

Selanjutnya, kita punya

$$D_f = \{x \in A | ((x, y) \in f \text{ untuk suatu } y \in B)\}$$

yang disebut **daerah asal** dari fungsi f dan

$$R_f = \{y \in B | ((x, y) \in f \text{ untuk suatu } x \in A)\}$$

yang disebut **range(daerah hasil)** dari fungsi f .

Dengan demikian, jika $f : A \rightarrow B$ suatu fungsi, maka $D_f = A$ dan $R_f \subseteq B$.

Jadi, $f : A \rightarrow B$ adalah fungsi jika memenuhi:

1. $D_f = A$
2. jika (a, b) dan $(a, b') \in f$, maka $b = b'$

Contoh 1.16. $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dimana $f(x) = x^2$ adalah suatu fungsi.

Bukti.

1. Karena f terdefinisi untuk semua $x \in \mathbf{R}$, maka $D_f = \mathbf{R}$.
2. Misalkan (x, y) dan $(x, y') \in f$. Ini berarti $y = x^2$ dan $y' = x^2$ sehingga $y = y'$.

Jadi, f adalah fungsi. ■

Contoh 1.17. $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dimana $f(x) = \ln x$ bukan suatu fungsi.

Bukti. Karena f hanya terdefinisi untuk $x > 0$, maka $D_f \neq \mathbf{R}$.

Jadi, $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dimana $f(x) = \ln x$ bukan suatu fungsi. ■

Tetapi, $f : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ dimana $f(x) = \ln x$ adalah suatu fungsi.

Contoh 1.18. $f : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ dimana $f(x) = \pm\sqrt{x}$ bukan suatu fungsi.

Bukti.

1. Karena f terdefinisi untuk semua $x \in \mathbf{R}^+$, maka $D_f = \mathbf{R}^+$.
2. Persyaratan kedua tidak dipenuhi. Untuk menyangkal, kita ambil satu kasus, misalkan $(4, 2)$ dan $(4, -2) \in f$, tetapi $2 \neq -2$.

Jadi, f bukan fungsi. ■

1.5.1 Fungsi Injektif, Surjektif dan Bijektif

Fungsi Injektif

Fungsi injektif atau yang kita kenal sebagai fungsi satu-satu atau fungsi into didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 1.8. (*Fungsi Injektif*)

Fungsi $f : A \rightarrow B$ dikatakan fungsi *injektif* jika

$$(x, y) \text{ dan } (x', y) \in f, \text{ maka } x = x'.$$

Contoh 1.19. $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dimana $f(x) = 2x + 5$ adalah fungsi injektif.

Bukti. Misalkan (x, y) dan $(x', y) \in f$. Ini berarti $y = 2x + 5$ dan $y = 2x' + 5$ sehingga kita peroleh $2x + 5 = 2x' + 5$. Dengan sama-sama menambah kedua sisi dengan -5 dan mengalikan kedua sisi dengan $\frac{1}{2}$, diperoleh $x = x'$. Jadi, fungsi $f(x) = 2x + 5$ injektif. ■

Contoh 1.20. $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dimana $f(x) = x^2$ bukan fungsi injektif.

Bukti. Untuk menyangkal, cukup kita ambil suatu kasus, misalnya untuk $y = f(x) = 4$, terdapat 2 dan -2 yang jelas tidak sama, tetapi $2^2 = (-2)^2 = 4$. Jadi, $f(x) = x^2$ bukan fungsi injektif. ■

Fungsi Surjektif

Fungsi surjektif atau yang kita kenal sebagai fungsi pada atau fungsi onto didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 1.9. (*Fungsi Surjektif*)

Fungsi $f : A \rightarrow B$ dikatakan fungsi *surjektif* jika $f(A) = B$.

Pernyataan di atas dapat juga dinyatakan sebagai

$$\forall y \in B, \exists x \in A \ni y = f(x)$$

Contoh 1.21. $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dimana $f(x) = 2x + 5$ adalah fungsi surjektif.

Bukti. Ambil sebarang $y \in \mathbf{R}_f$. Maka terdapat $x = \frac{y-5}{2}$ sehingga $f(x) = f(\frac{y-5}{2}) = 2(\frac{y-5}{2}) + 5 = y - 5 + 5 = y$. Jadi, fungsi $f(x) = 2x + 5$ surjektif. ■

Contoh 1.22. $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dimana $f(x) = x^2$ bukan fungsi surjektif.

Bukti. Untuk menyangkal, cukup kita ambil suatu kasus, misalnya untuk $y = f(x) = -1$, tidak terdapat x yang memenuhi $f(x) = x^2 = -1$. Jadi, $f(x) = x^2$ bukan fungsi surjektif. ■

Fungsi Bijektif

Fungsi bijektif adalah fungsi yang injektif dan surjektif. Fungsi ini juga dikenal sebagai fungsi satu-satu pada.

Contoh 1.23. $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dimana $f(x) = 2x + 5$ adalah fungsi bijektif karena injektif dan surjektif.

1.5.2 Komposisi dan Invers

Fungsi Komposisi

Definisi 1.10. (*Fungsi Komposisi*)

Misalkan $f : A \rightarrow B$ dan $g : B \rightarrow C$. Fungsi komposisi $g \circ f : A \rightarrow C$ didefinisikan sebagai $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ untuk setiap $x \in A$.

Fungsi komposisi memiliki sifat mempertahankan kekhususan bentuk dari fungsi pembentuknya seperti diperlihatkan dalam teorema berikut

Teorema 1.8. Untuk fungsi komposisi berlaku

1. Jika $f : A \rightarrow B$ dan $g : B \rightarrow C$ injektif, maka $g \circ f : A \rightarrow C$ injektif
2. Jika $f : A \rightarrow B$ dan $g : B \rightarrow C$ surjektif, maka $g \circ f : A \rightarrow C$ surjektif

Bukti.

1. Pertama, akan diperlihatkan bahwa $g \circ f : A \rightarrow C$ adalah suatu fungsi. Misalkan (a, c) dan $(a, c') \in g \circ f$. Maka terdapat b dan $b' \in B$ dimana $(a, b), (a, b') \in f$ dan $(b, c), (b', c') \in g$. Karena f fungsi dan $(a, b), (a, b') \in f$, maka $b = b'$. Dan karena g fungsi dan $(b, c), (b', c') \in g$ serta $b = b'$, maka $c = c'$. Jadi, $g \circ f$ fungsi. Selanjutnya, untuk menunjukkan $g \circ f$ injektif, misalkan $(a, c), (a', c') \in g \circ f$. Maka terdapat b dan $b' \in B$ dimana $(a, b), (a', b') \in f$ dan $(b, c), (b', c') \in g$. Karena g injektif dan $(b, c), (b', c') \in g$, maka $b = b'$. Dan karena f injektif dan $(a, b), (a', b') \in f$ serta $b = b'$, maka $a = a'$. Jadi, $g \circ f$ injektif.

2. Latihan

■

Invers Fungsi

Jika fungsi $f : A \rightarrow B$ injektif (sehingga $f : A \rightarrow R_f$ bijektif), maka kita dapat membuat fungsi baru $g : R_f \rightarrow A$ dengan aturan $g(y) = x$ bila $y = f(x)$. Dalam hal ini dinotasikan $g = f^{-1}$ atau dikatakan g adalah invers dari f .

Contoh 1.24. Fungsi $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ yang didefinisikan dengan $f(x) = x^3 + 1$ adalah bijektif. Tentukan inversnya.

Dengan menuliskan $y = x^3 + 1$, maka diperoleh $x = \sqrt[3]{y - 1}$.

Dengan demikian, kita peroleh $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 1}$

1.5.3 Peta dan Prapeta

Definisi 1.11. (*Peta dan Prapeta*)

Misalkan $f : A \rightarrow B$ fungsi dengan $D_f = A$ dan $R_f \subseteq B$.

- Jika $E \subseteq A$, maka peta dari E dibawah f adalah subhimpunan $f(E)$ yang didefinisikan sebagai

$$f(E) := \{f(x) | x \in E\}$$

- Jika $H \subseteq B$, maka prapeta dari H dibawah f adalah subhimpunan $f^{-1}(H)$ yang didefinisikan sebagai

$$f^{-1}(H) := \{x \in A | f(x) \in H\}$$

Contoh 1.25. Misalkan $f : A \rightarrow B$ fungsi dan $E, F \subseteq A$. Buktikan jika $E \subseteq F$, maka $f(E) \subseteq f(F)$

Bukti. Misalkan $f : A \rightarrow B$ fungsi dan $E, F \subseteq A$.

Misalkan $E \subseteq F$.

Ambil sebarang $y \in f(E)$.

Maka terdapat $x \in E$ sehingga $y = f(x)$. Karena $E \subseteq F$, maka $x \in F$. Akibatnya, $y = f(x) \in f(F)$. Jadi, $f(E) \subseteq f(F)$

Kita sudah tahu bahwa $E \cap F \subseteq E$ dan $E \cap F \subseteq F$. Dengan menggunakan hasil (1), diperoleh $f(E \cap F) \subseteq f(E)$ dan $f(E \cap F) \subseteq f(F)$. Akibatnya, $f(E \cap F) \subseteq f(E) \cap f(F)$ ■

Contoh 1.26. Misalkan $f : A \rightarrow B$ fungsi dan $G, H \subseteq B$. Buktikan $f^{-1}(G \cap H) = f^{-1}(G) \cap f^{-1}(H)$

Bukti. Misalkan $f : A \rightarrow B$ fungsi dan $G, H \subseteq B$.

Akan ditunjukkan $f^{-1}(G \cap H) \subseteq f^{-1}(G) \cap f^{-1}(H)$ dan $f^{-1}(G) \cap f^{-1}(H) \subseteq f^{-1}(G \cap H)$.

- Kita sudah tahu bahwa $G \cap H \subseteq G$ dan $G \cap H \subseteq H$. Dengan menggunakan hasil (1), diperoleh $f^{-1}(G \cap H) \subseteq f^{-1}(G)$ dan $f^{-1}(G \cap H) \subseteq f^{-1}(H)$. Akibatnya, $f^{-1}(G \cap H) \subseteq f^{-1}(G) \cap f^{-1}(H)$.
- Ambil sebarang $x \in f^{-1}(G) \cap f^{-1}(H)$. Ini berarti $x \in f^{-1}(G)$ dan $x \in f^{-1}(H)$. Dengan kata lain, $f(x) \in G$ dan $f(x) \in H$ sehingga $f(x) \in G \cap H$. Hal ini berarti $x \in f^{-1}(G \cap H)$. Jadi, $f^{-1}(G) \cap f^{-1}(H) \subseteq f^{-1}(G \cap H)$.

■

1.6 Latihan

1. Tunjukkan bahwa $2^n \geq n^2$, $\forall n \geq 4$.
2. Tunjukkan bahwa $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ habis dibagi 9.
3. Tunjukkan bahwa $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$
4. Tunjukkan bahwa $(\cos x)(\cos 2x)(\cos 4x) \dots (\cos 2^{n-1}x) = \frac{\sin 2^n x}{2^n \sin x}$ untuk setiap bilangan asli n dan $x \in \mathbf{R}$, $\sin x \neq 0$.
5. Buktikan jika $A \subseteq B$, maka $A \cup B = B$ dan $A \cap B = A$
6. Buktikan $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.
7. Buktikan $A \cup (\bigcap_{i=1}^n B_i) = \bigcup_{i=1}^n A \cap B_i$.
8. Tentukan apakah fungsi berikut injektif dan/atau surjektif.
 - $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dimana $f(x) = |x| + x$
 - $f : \mathbf{R} - \{2\} \rightarrow \mathbf{R} - \{5\}$ dimana $f(x) = \frac{5x+1}{x-2}$
9. Misalkan $g(x) = x^2$ dan $f(x) = x + 3$ untuk setiap $x \in \mathbf{R}$. Misalkan $h = g \circ f$.
 - Tentukan $h(E)$ jika $E = \{x \in \mathbf{R} | 0 \leq x \leq 1\}$
 - Tentukan $h^{-1}(G)$ jika $G = \{x \in \mathbf{R} | 0 \leq x \leq 4\}$
10. Buktikan $f(E \setminus F) \subseteq f(E)$
11. Buktikan jika $G \subseteq H$, maka $f^{-1}(G) \subseteq f^{-1}(H)$.
12. Misalkan $f : A \rightarrow B$ bijektif. Tunjukkan $f^{-1} : B \rightarrow A$ bijektif.

13. Misalkan $f : A \rightarrow B$ dan $g : B \rightarrow C$ fungsi. Tunjukkan jika $g \circ f$ injektif, maka f injektif.

Bab 2

Sifat-sifat Bilangan Real

Bilangan real, sama seperti bilangan yang lain, memiliki beberapa sifat tersendiri. Sebagian sifat itu akan kita bicarakan pada bab ini. Sifat-sifat yang akan kita pelajari di sini meliputi: sifat aljabar, urutan, dan kelengkapan.

2.1 Sifat Aljabar $\mathbf{R}$

2.1.1 $(\mathbf{R}, +, \cdot)$ adalah Lapangan

Jika kita memandang $\mathbf{R}$ sebagai suatu aljabar, yaitu himpunan dengan dua operasi yang *well-defined*, yaitu penjumlahan (+) dan perkalian ($\cdot$), maka struktur dari $\mathbf{R}$ adalah sebagai suatu **lapangan** (*field*) karena memenuhi hal-hal berikut:

1. $(\mathbf{R}, +)$ adalah suatu grup komutatif (grup Abel) karena memenuhi

- **(J1) komutatif**

$$a + b = b + a \text{ untuk setiap } a, b \in \mathbf{R}$$

- **(J2) asosiatif**

$$(a + b) + c = a + (b + c) \text{ untuk setiap } a, b, c \in \mathbf{R}$$

- **(J3) identitas**

Terdapat elemen $0 \in \mathbf{R}$ yang memenuhi $a + 0 = a$ dan $0 + a = a$, $\forall a \in \mathbf{R}$

- **(J4) invers**

Untuk setiap $a \in \mathbf{R}$, $\exists (-a) \in \mathbf{R}$ sehingga $a + (-a) = 0$ dan $(-a) + a = 0$

2. $(\mathbf{R}^*, \cdot)$ adalah suatu grup komutatif (grup Abel) karena memenuhi

- **(K1) komutatif**

$a \cdot b = b \cdot a$ untuk setiap $a, b \in \mathbf{R}$

- **(K2) asosiatif**

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ untuk setiap $a, b, c \in \mathbf{R}$

- **(K3) identitas**

Terdapat elemen $1 \in \mathbf{R}$ yang memenuhi $a \cdot 1 = a$ dan $1 \cdot a = a$, $\forall a \in \mathbf{R}$

- **(K4) invers**

Untuk setiap $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $\exists \frac{1}{a} \in \mathbf{R}$ sehingga $a \cdot \frac{1}{a} = 1$ dan $\frac{1}{a} \cdot a = 1$

3. **(D) distributif**

Untuk setiap $a, b, c \in \mathbf{R}$ berlaku:

$$(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$$

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$$

Kesembilan sifat di atas disebut **aksioma sifat aljabar** bilangan real. Dari sembilan aksioma ini kita dapat menurunkan banyak sifat aljabar lain dari bilangan real. Lebih jauh dapat dilihat pada soal yang diselesaikan. Yang perlu diingat mungkin tiga teorema berikut yang menyangkut ketunggalan elemen identitas, yaitu 0 dan 1, ketunggalan invers, dan perkalian terkait dengan 0.

Teorema 2.1. (***Ketunggalan Identitas***)

1. Jika x adalah bilangan real yang memenuhi $x + a = a$ untuk setiap $a \in \mathbf{R}$, maka $x = 0$.

2. Jika y adalah bilangan real yang memenuhi $y \cdot b = b$ untuk setiap $b \neq 0$, maka $y = 1$.

Bukti.

1. Misalkan $x + a = a$. Maka, dengan menambah kedua ruas persamaan dengan $(-a)$ dan menerapkan aksioma sifat aljabar, diperoleh

$$(x + a) + (-a) = a + (-a)$$

$$x + (a + (-a)) = a + (-a) \quad (J2)$$

$$x + 0 = 0 \quad (J4)$$

$$x = 0 \quad (J3)$$

2. Misalkan $y \cdot b = b$ dan $b \neq 0$. Karena $b \neq 0$, maka terdapat $\frac{1}{b} \in \mathbf{R}$. Selanjutnya, dengan mengalikan kedua ruas persamaan dengan $\frac{1}{b}$ dan menerapkan aksioma sifat aljabar, diperoleh

$$(y \cdot b) \cdot \frac{1}{b} = b \cdot \frac{1}{b}$$

$$y \cdot (b \cdot \frac{1}{b}) = b \cdot \frac{1}{b} \quad (K2)$$

$$y \cdot 1 = 1 \quad (K4)$$

$$y = 1 \quad (K3)$$

■

Teorema 2.2. (*Ketunggalan Invers*)

Misalkan a, b sebarang bilangan real

1. Jika $z + a = 0$, maka $z = (-a)$.
2. Jika $y \cdot b = 1$ dan $b \neq 0$, maka $y = \frac{1}{b}$.

Bukti.

1. Misalkan a, b sebarang bilangan real. Pandang persamaan $z + a = 0$. Dengan menambah kedua ruas dengan $(-a)$ dan menerapkan aksioma sifat aljabar, diperoleh

$$(z + a) + (-a) = 0 + (-a)$$

$$z + (a + (-a)) = (-a) \quad (J2, J3)$$

$$z + 0 = (-a) \quad (J4)$$

$$z = (-a) \quad (J3)$$

2. Misalkan $y \cdot b = 1$ dan $b \neq 0$. Karena $b \neq 0$, maka terdapat $\frac{1}{b} \in \mathbf{R}$. Selanjutnya, dengan mengali kedua ruas dengan $\frac{1}{b}$, diperoleh

$$(y \cdot b) \cdot \frac{1}{b} = 1 \cdot \frac{1}{b}$$

$$y \cdot (b \cdot \frac{1}{b}) = \frac{1}{b} \quad (K2, K3)$$

$$y \cdot 1 = \frac{1}{b} \quad (K4)$$

$$y = \frac{1}{b} \quad (K3)$$

■

Teorema 2.3. (*Perkalian terkait 0*)

1. Untuk setiap $a \in \mathbf{R}$, $a \cdot 0 = 0$
2. Jika $a \cdot b = 0$, maka $a = 0$ atau $b = 0$.

Bukti.

1. Ambil $a \in \mathbf{R}$ sebarang. Kita akan membuktikan bagian kiri pada persamaan bersifat seperti identitas penjumlahan, yaitu dengan menguji apakah

$$(a \cdot 0) + a = a$$

Dengan menggunakan aksioma sifat aljabar, kita peroleh

$$(a \cdot 0) + a = (a \cdot 0) + (a \cdot 1) \quad (K3)$$

$$= a \cdot (0 + 1) \quad (D)$$

$$= a \cdot 1 \quad (J3)$$

$$= a \quad (K3)$$

Karena untuk setiap $a \in \mathbf{R}$, $a \cdot 0 = 0$ dan identitas penjumlahan tunggal, kita simpulkan $a \cdot 0 = 0$.

2. Misalkan $a \cdot b = 0$. Kita punya dua kasus disini.

(a) Jika $a = 0$, maka pernyataan dipenuhi dan bukti selesai.

(b) Jika $a \neq 0$, maka $\frac{1}{a} \in \mathbf{R}$. Pandang persamaan $a \cdot b = 0$. Dengan mengalikan kedua ruas persamaan dengan $\frac{1}{a}$ dan menerapkan aksioma sifat aljabar kita peroleh

$$\frac{1}{a}(a \cdot b) = \frac{1}{a} \cdot 0 \quad (Dikali \frac{1}{a})$$

$$(\frac{1}{a} \cdot a) \cdot b = 0 \quad (K2, Teorema Perkalian)$$

$$1 \cdot b = 0 \quad (K4)$$

$$b = 0 \quad (K3)$$

Jadi, jika $a \cdot b = 0$, maka $a = 0$ atau $b = 0$

■

2.1.2 Bilangan Rasional dan Irrasional

Bilangan real terdiri dari dua subhimpunan utama yang saling lepas, yaitu himpunan bilangan rasional dan himpunan bilangan irrasional. Berikut akan dijelaskan definisinya.

Definisi 2.1. (*Bilangan rasional*)

Bilangan $x \in \mathbf{R}$ disebut bilangan rasional jika terdapat bilangan bulat p, q dimana $q \neq 0$ sehingga $x = \frac{p}{q}$.

Himpunan bilangan rasional dilambangkan dengan $\mathbf{Q}$.

Kita dapat menyatakan $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$ merupakan lapangan bagian (*subfield*) dari $\mathbf{R}$ dengan menunjukkan bahwa $\mathbf{Q}$ tertutup terhadap kedua operasi dan invers operasi ada di $\mathbf{Q}$.

Definisi 2.2. (*Bilangan irrasional*)

Bilangan $y \in \mathbf{R}$ disebut bilangan irrasional jika y bukan bilangan rasional. Himpunan bilangan irrasional dilambangkan dengan $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$.

Himpunan bilangan irrasional dengan kedua operasi biner tidak tertutup sehingga bukan merupakan lapangan bagian (*subfield*) dari $\mathbf{R}$. Bilangan berbentuk $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, dan sejenisnya adalah bilangan irrasional seperti dibuktikan dalam lemma berikut.

Lemma 2.1. $\sqrt{2}$ bukan bilangan rasional

Bukti. Andaikan terdapat bilangan rasional x sehingga $x^2 = 2$. Hal ini berarti $x = \frac{p}{q}$ untuk suatu $p, q \in \mathbf{Z}$, $q \neq 0$. Selanjutnya, untuk semua bilangan rasional, kita bisa mengatur agar $(p, q) = 1$. Akibatnya, $x^2 = \frac{p^2}{q^2} = 2$. Dengan kata lain, $p^2 = 2q^2$. Ini menunjukkan p^2 genap atau ditulis juga $p \equiv 0(\text{mod } 2)$. Ada dua kasus yang mungkin untuk p , yaitu:

1. p ganjil atau ditulis juga $p \equiv 1(\text{mod } 2)$. Akibatnya, $p^2 \equiv 1(\text{mod } 2)$. Hal ini kontradiksi dengan $p^2 \equiv 0(\text{mod } 2)$. Jadi, hal ini tidak mungkin terjadi.
2. p genap atau ditulis juga $p^2 \equiv 0(\text{mod } 2)$ sehingga $p^2 \equiv 0(\text{mod } 2)$.

Jadi, jika p^2 genap, maka p genap. Misalkan $p = 2k$ untuk suatu $k \in \mathbf{Z}$. Maka, $(2k)^2 = 2q^2$ sehingga diperoleh $2k^2 = q^2$. Ini menunjukkan q^2 genap. Sesuai dengan proses sebelumnya, jika q^2 genap, maka q genap. Misalkan $q = 2m$ untuk suatu $m \in \mathbf{Z}$.

Akibatnya, $(p, q) = (2k, 2m) \geq 2$. Kontradiksi dengan $(p, q) = 1$. Jadi, haruslah tidak terdapat bilangan rasional x yang memenuhi $x^2 = 2$. ■

Bukti yang menunjukkan bahwa $\sqrt{2}$ adalah bilangan real dapat dilihat pada pembahasan tentang sifat kelengkapan $\mathbf{R}$.

2.1.3 Soal yang Diselesaikan

1. Misalkan a, b sebarang bilangan real. Buktikan bahwa:

- (a) Persamaan $a + x = b$ memiliki solusi unik yaitu $x = (-a) + b$.
- (b) Jika $a \neq 0$, maka persamaan $a \cdot x = b$ memiliki solusi unik yaitu $x = \frac{1}{a} \cdot b$.

Jawab.

- (a) Misalkan a, b sebarang bilangan real dan $a + x = b$. Pertama, jelas bahwa $x_0 = (-a) + b$ solusi dari $a + x = b$ karena $a + x_0 = a + ((-a) + b) = (a + (-a)) + b = 0 + b = b$.

Berikutnya, akan ditunjukkan solusi ini unik. Misalkan x_1 juga solusi sehingga $a + x_1 = b$. Akan ditunjukkan $x_1 = x_0$. Pandang persamaan

$$a + x_1 = b \Leftrightarrow (-a) + (a + x_1) = (-a) + b$$

$$\Leftrightarrow ((-a) + a) + x_1 = (-a) + b$$

$$\Leftrightarrow 0 + x_1 = (-a) + b$$

$$\Leftrightarrow x_1 = (-a) + b$$

Jadi, $x_1 = x_0$. Ini menunjukkan solusi tersebut unik.

- (b) Misalkan a, b sebarang bilangan real dan $a \cdot x = b$. Karena $a \neq 0$, maka $\frac{1}{a} \in \mathbf{R}$. Jelas bahwa $x_0 = \frac{1}{a} \cdot b$ solusi dari $a \cdot x = b$ karena $a \cdot x_0 = a \cdot (\frac{1}{a} \cdot b) = (a \cdot \frac{1}{a}) \cdot b = 1 \cdot b = b$.

Berikutnya, akan ditunjukkan solusi ini tunggal. Misalkan x_1 juga solusi sehingga $a \cdot x_1 = b$. Akan ditunjukkan $x_1 = x_0$. Pandang persamaan

$$\begin{aligned} a \cdot x_1 = b &\Leftrightarrow \frac{1}{a} \cdot (a \cdot x_1) = \frac{1}{a} \cdot b \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{a} \cdot a\right) \cdot x_1 = \frac{1}{a} \cdot b \\ &\Leftrightarrow 1 \cdot x_1 = \frac{1}{a} \cdot b \\ &\Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{a} \cdot b \end{aligned}$$

Jadi, $x_1 = x_0$. Ini menunjukkan solusi tersebut tunggal.

2. Jika a, b sebarang bilangan real, buktikanlah

- (a) $(-1) \cdot a = -a$
- (b) $-(a + b) = (-a) + (-b)$.
- (c) $-\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{(-a)}{b}$ jika $b \neq 0$.

Jawab.

- (a) Pembuktian dilakukan dengan menunjukkan ruas kiri merupakan invers penjumlahan dari a , yaitu dengan memeriksa apakah $((-1) \cdot a) + a = 0$.

$$((-1) \cdot a) + a = ((-1) \cdot a) + (1 \cdot a) \quad (K3)$$

$$= ((-1) + 1) \cdot a \quad (D)$$

$$= 0 \cdot a \quad (J4)$$

$$= 0 \quad (\text{Teorema Perkalian})$$

Karena $((-1) \cdot a) + a = 0$ dan invers penjumlahan tunggal, maka $(-1) \cdot a = (-a)$.

- (b) Pembuktian dilakukan dengan menunjukkan ruas kanan merupakan invers penjumlahan dari $a + b$, yaitu dengan memeriksa apakah $(a + b) + ((-a) + (-b)) = 0$.

$$(a + b) + ((-a) + (-b)) = (a + b) + ((-b) + (-a)) \quad (J1)$$

$$= a + (b + (-b)) + (-a) \quad (J2)$$

$$= a + 0 + (-a) \quad (J4)$$

$$= a + (-a) \quad (J3)$$

$$= 0 \quad (J4)$$

Karena $(a + b) + ((-a) + (-b)) = 0$ dan invers penjumlahan tunggal, maka $-(a + b) = (-a) + (-b)$

- (c) Pembuktian dilakukan dengan menunjukkan ruas kanan merupakan invers penjumlahan dari $\frac{a}{b}$ dengan memeriksa apakah $\frac{a}{b} + \frac{(-a)}{b} = 0$

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} + \frac{(-a)}{b} &= \left(\frac{1}{b} \cdot a\right) + \left(\frac{1}{b} \cdot (-a)\right) \\ &= \frac{1}{b} \cdot (a + (-a)) \end{aligned} \quad (D)$$

$$= \frac{1}{b} \cdot 0 \quad (J4)$$

$$= 0 \quad (\text{Teorema 3})$$

Karena $\frac{a}{b} + \frac{(-a)}{b} = 0$ dan invers penjumlahan tunggal, maka $-\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{(-a)}{b}$

3. Jika $a \in \mathbf{R}$ memenuhi $a \cdot a = a$ maka $a = 0$ atau $a = 1$.

Jawab.

Ada dua cara membuktikannya,

(a) Misalkan $a \cdot a = a$. Maka,

$$a \cdot a = a \Leftrightarrow a \cdot a + (-a) = a + (-a) \quad (\text{Ditambah } (-a))$$

$$\Leftrightarrow (a \cdot a) + ((-1) \cdot a) = 0 \quad (\text{Soal 1b, J4})$$

$$\Leftrightarrow (a + (-1)) \cdot a = 0 \quad (D)$$

$$\Leftrightarrow a + (-1) = 0 \text{ atau } a = 0 \quad (\text{Teorema 4})$$

$$\Leftrightarrow a = 1 \text{ atau } a = 0 \quad (J4)$$

(b) Misalkan $a \cdot a = a$.

Jika $a = 0$, maka pernyataan dipenuhi dan bukti selesai.

Jika $a \neq 0$, maka $\frac{1}{a} \in \mathbf{R}$ sehingga

$$a \cdot a = a \Leftrightarrow \frac{1}{a}(a \cdot a) = \frac{1}{a} \cdot a \quad (\text{Dikali } \frac{1}{a})$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{a} \cdot a\right) \cdot a = 1 \quad (K2, K4)$$

$$\Leftrightarrow 1 \cdot a = 1 \quad (K4)$$

$$\Leftrightarrow a = 1 \quad (K3)$$

Jadi, $a = 0$ atau $a = 1$

4. Tunjukkan tidak ada bilangan rasional x yang memenuhi $x^2 = 3$.

Jawab.

Andaikan terdapat bilangan rasional x sehingga $x^2 = 3$. Hal ini berarti $x = \frac{p}{q}$ untuk suatu $p, q \in \mathbf{Z}$ dan $q \neq 0$. Kita juga bisa mengatur agar $(p, q) = 1$. Akibatnya, $x^2 = \frac{p^2}{q^2} = 3$. Dengan kata lain, $p^2 = 3q^2$. Ini menunjukkan p^2 kelipatan tiga atau bisa ditulis juga sebagai $p^2 \equiv 0 \pmod{3}$

Akan ditunjukkan $p \equiv 0 \pmod{3}$. Andaikan p bukan kelipatan tiga. Berarti $p \equiv 1 \pmod{3}$ atau $p \equiv 2 \pmod{3}$.

(a) Kasus 1.

Jika $p \equiv 1(mod\ 3)$, maka $p^2 \equiv 1(mod\ 3)$. Kontradiksi dengan p^2 kelipatan tiga.

(b) Kasus 2.

Jika $p \equiv 2(mod\ 3)$, maka $p^2 \equiv 4(mod\ 3) \equiv 1(mod\ 3)$. Kontradiksi dengan p^2 kelipatan tiga.

Jadi, pengandaian salah, haruslah $p \equiv 0(mod\ 3)$ yang berarti p kelipatan tiga.

Misalkan $p = 3j$ untuk suatu $j \in \mathbf{Z}$. Maka, $p^2 = (3j)^2$. Karena $p = 3q^2$, maka diperoleh $3j^2 = q^2$. Ini menunjukkan q^2 kelipatan tiga. Dengan cara sama seperti pada kasus p , diperoleh q kelipatan tiga. Misalkan $q = 3k$ untuk suatu $k \in \mathbf{Z}$. Akibatnya, $(p, q) = (3j, 3k) \geq 3$. Kontradiksi dengan $(p, q) = 1$. Jadi, haruslah tidak terdapat bilangan rasional x yang memenuhi $x^2 = 3$.

5. Buktikan bahwa jika x, y bilangan rasional, maka $x + y$ dan $x \cdot y$ juga bilangan rasional.

Jawab.

Misalkan x, y bilangan rasional. Berarti $x = \frac{p_1}{q_1}$ dan $y = \frac{p_2}{q_2}$ untuk suatu $p_1, p_2, q_1, q_2 \in \mathbf{Z}$ dan $q_1, q_2 \neq 0$.

Maka $x + y = \frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1q_2 + p_2q_1}{q_1q_2}$ merupakan bilangan rasional karena $p_1q_2 + p_2q_1, q_1q_2 \in \mathbf{Z}$ dan $q_1q_2 \neq 0$.

Demikian juga $x \cdot y = \frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1p_2}{q_1q_2}$ adalah bilangan rasional karena $p_1p_2, q_1q_2 \in \mathbf{Z}$ dan $q_1q_2 \neq 0$.

6. Tunjukkan bahwa jika ξ bilangan irrasional dan r bilangan rasional, maka $\xi + r$ bilangan irrasional.

Jawab.

Misalkan ξ bilangan irrasional dan r bilangan rasional. Ini berarti $r = \frac{p}{q}$ untuk suatu $p, q \in \mathbf{Z}, q \neq 0$.

Andaikan $\xi + r$ bilangan rasional. Berarti terdapat $u, v \in \mathbf{Z}$, $v \neq 0$, sehingga $\xi + r = \frac{u}{v}$. Akibatnya, $\xi = \frac{u}{v} - r = \frac{u}{v} - \frac{p}{q} = \frac{uq - pv}{vq}$. Karena $uq - pv, vq \in \mathbf{Z}$ dan $vq \neq 0$, maka ξ bilangan rasional. Kontradiksi dengan ξ irrasional.

Jadi, pengandaian salah, haruslah $\xi + r$ bilangan irrasional.

7. Tunjukkan bahwa jika x, y bilangan irrasional, maka $x + y$ dan $x \cdot y$ tidak selalu bilangan irrasional.

Jawab.

Dalam hal ini, bisa dipilih $x = \sqrt{2}$ dan $y = -\sqrt{2}$ sehingga $x + y = 0$ dan $x \cdot y = -2$ yang keduanya merupakan anggota $\mathbf{Q}$.

2.1.4 Latihan

1. Buktikan untuk sebarang bilangan real a, b berlaku

(a) $-(-a) = a$

(b) $(-1) \cdot (-1) = 1$

(c) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

(d) $-\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{(-a)}$. jika $a \neq 0$

2. Buktikan pada bilangan real berlaku hukum pembatalan:

(a) Jika $a, b, c \in \mathbf{R}$ dan $a + c = b + c$, maka $a = b$.

(b) Jika $a, b, c \in \mathbf{R}$, $c > 0$ dan $a \cdot c = b \cdot c$, maka $a = b$.

3. Jika $a \neq 0$ dan $b \neq 0$, tunjukkan bahwa $\frac{1}{ab} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}$

4. Buktikan bahwa jika x bilangan rasional, maka $(-x)$ dan $\frac{1}{x}$ juga bilangan rasional.

5. Tunjukkan bahwa jika ξ bilangan irrasional dan $r \neq 0$ bilangan rasional, maka $\xi \cdot r$ bilangan irrasional.

6. Tunjukkan untuk setiap bilangan real a dan bilangan asli m, n berlaku

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n.$$

7. Tunjukkan tidak ada bilangan rasional z yang memenuhi $z^2 = 6$.

2.2 Sifat Urutan $\mathbf{R}$

2.2.1 Aksioma Sifat Urutan

Sifat urutan $\mathbf{R}$ dibentuk dari dua pernyataan (aksioma)

1. Aksioma Bilangan Positif

*Adanya subhimpunan bilangan positif $P \subset \mathbf{R}$
yang tertutup terhadap kedua operasi pada $\mathbf{R}$*

Hal ini berarti untuk setiap $x, y \in \mathbf{P}$ berlaku $x + y \in \mathbf{P}$ dan $x \cdot y \in \mathbf{P}$.

2. Aksioma Sifat Trikotomi $\mathbf{R}$

*Jika $a \in \mathbf{R}$, maka berlaku satu dari tiga hal berikut:
 $a \in P$ atau $a = 0$ atau $(-a) \in P$*

Berkenaan dengan aksioma di atas, pada bagian ini akan diperkenalkan definisi beberapa bilangan dan notasi urutan pada bilangan real.

Dalam Notasi Himpunan	Nama Bilangan	Dalam Notasi Urutan
$a \in \mathbf{P}$	a bilangan real positif	$a > 0$
$(-a) \in \mathbf{P}$	a bilangan real negatif	$a < 0$
$a \in \mathbf{P} \cup \{0\}$	a bilangan real taknegatif	$a \geq 0$
$(-a) \in \mathbf{P} \cup \{0\}$	a bilangan real takpositif	$a \leq 0$

Akibatnya, kita punya penulisan alternatif untuk sifat trikotomi, yaitu

Jika $a \in \mathbf{R}$, maka berlaku satu dari tiga hal berikut: $a > 0$ atau $a = 0$ atau $a < 0$

Selanjutnya, berkaitan dengan dua bilangan, kita definisikan hal berikut.

Definisi 2.3. Misalkan $a, b \in \mathbf{R}$.

1. Jika $a - b \in \mathbf{P}$, maka bisa dituliskan $a - b > 0$ atau $a > b$.
2. Jika $a - b \in \mathbf{P} \cup \{0\}$, maka bisa dituliskan $a - b \geq 0$ atau $a \geq b$.

Akibatnya, kita bisa memiliki bentuk lain sifat trikotomi berkaitan dengan dua bilangan.

Proposisi 2.1. (Sifat Trikotomi untuk Dua Bilangan)

Untuk setiap $a, b \in \mathbf{R}$, berlaku satu dari tiga hal berikut: $a > b$ atau $a = b$ atau $a < b$

Bukti. Karena $a, b \in \mathbf{R}$, maka $a - b \in \mathbf{R}$. Dan menurut sifat trikotomi, berlaku satu dari tiga:

$$a - b \in \mathbf{P} \text{ atau } a - b = 0 \text{ atau } -(a - b) \in \mathbf{P}$$

Hal ini ekuivalen dengan

$$a - b > 0 \text{ atau } a - b = 0 \text{ atau } -(a - b) > 0$$

$$a - b > 0 \text{ atau } a - b = 0 \text{ atau } b - a > 0$$

$$a > b \text{ atau } a = b \text{ atau } a < b$$

■

2.2.2 Sifat Urutan Dasar

Bagian selanjutnya, merupakan sifat-sifat dasar dari urutan yang terkadang disebut "aturan-aturan/hukum ketidaksamaan".

Lemma 2.2. (*Kekekalan urutan terhadap penjumlahan dan perkalian dengan bilangan positif*)

Misalkan a, b bilangan real dengan $a < b$. Maka

1. $a + c < b + c$ untuk setiap $c \in \mathbf{R}$.
2. $a \cdot c < b \cdot c$ untuk setiap $c > 0$.

Bukti. Misalkan $a < b$. Ini berarti $b - a > 0$ atau $b - a \in \mathbf{P}$.

1. Perhatikan bahwa $(b + c) - (a + c) = b - a$. Akibatnya, $(b + c) - (a + c)$ juga anggota $\mathbf{P}$ sehingga $(b + c) - (a + c) > 0$. Jadi, $a + c < b + c$.
2. $c > 0$ berarti $c \in \mathbf{P}$. Sifat ketertutupan $\mathbf{P}$ menyebabkan $(b - a) \cdot c \in \mathbf{P}$. Sedangkan $(b - a) \cdot c = (b \cdot c) - (a \cdot c)$. Jadi, $(b \cdot c) - (a \cdot c) \in \mathbf{P}$ atau $a \cdot c < b \cdot c$.

■

Lemma 2.3. (*Urutan dari identitas dan invers*)

1. $0 < 1$
2. Jika $a > 0$, maka $(-a) < 0$.
3. Jika $a > 0$, maka $\frac{1}{a} > 0$

Bukti.

1. Andaikan tidak berlaku $0 < 1$. Maka, menurut sifat trikotomi, $0 = 1$ atau $0 > 1$.
 - Jika $0 = 1$, maka untuk $a \neq 0$, $a \cdot 0 = a \cdot 1$ sehingga diperoleh $0 = a$. Kontradiksi dengan $a \neq 0$.
 - Jika $0 > 1$, maka untuk $a > 0$, menurut sifat kekekalan urutan, $a \cdot 0 > a \cdot 1$ sehingga diperoleh $0 > a$. Kontradiksi dengan $a > 0$.

Jadi, pengandaian salah sehingga haruslah $0 < 1$.

2. Misalkan $a > 0$. Ini berarti $a \in \mathbf{P}$. Kita tahu bahwa $a = -(-a)$.

Jadi, $(-(-a)) \in \mathbf{P}$ yang dalam notasi urutan berarti $(-a) < 0$.

3. Misalkan $a > 0$. Andaikan tidak berlaku $\frac{1}{a} < 0$.

Maka, menurut sifat trikotomi, $\frac{1}{a} = 0$ atau $\frac{1}{a} < 0$.

- Jika $\frac{1}{a} = 0$, maka $\frac{1}{a} \cdot a = 0 \cdot a$ sehingga diperoleh $1 = 0$.

Kontradiksi dengan $0 < 1$.

- Jika $\frac{1}{a} < 0$, maka $\frac{1}{a} \cdot a < 0 \cdot a$ sehingga diperoleh $1 < 0$.

Kontradiksi dengan $0 < 1$.

Jadi, pengandaian salah sehingga haruslah $\frac{1}{a} > 0$.

■

Lemma 2.4. (*Kuadrat bilangan real*)

Untuk setiap $x \in \mathbf{R}$, $x^2 \geq 0$.

Bukti.

Misalkan $x \in \mathbf{R}$.

Maka menurut sifat trikotomi: $x \in \mathbf{P}$ atau $x = 0$ atau $(-x) \in \mathbf{P}$

- Jika $x \in \mathbf{P}$, maka $x \cdot x = x^2 \in \mathbf{P}$ sehingga diperoleh $x^2 > 0$.
- Jika $x = 0$, maka $x^2 = x \cdot x = 0 \cdot 0 = 0$.
- Jika $(-x) \in \mathbf{P}$, maka $(-x) \cdot (-x) = x^2 \in \mathbf{P}$ sehingga diperoleh $x^2 > 0$.

Jadi, untuk setiap $x \in \mathbf{R}$, $x^2 \geq 0$. ■

Lemma 2.5. (*Faktor perkalian dari bilangan positif/negatif*)

1. Jika $a \cdot b > 0$, maka $a, b > 0$ atau $a, b < 0$.
2. Jika $a \cdot b < 0$, maka $a > 0, b < 0$ atau $a < 0, b > 0$.

Bukti.

1. Misalkan $a \cdot b > 0$. Maka $a, b \neq 0$ (karena jika $a = 0$ atau $b = 0$ maka $a \cdot b = 0 \cdot b = 0$ atau $a \cdot b = a \cdot 0 = 0$. Kontradiksi dengan $a \cdot b > 0$). $a \neq 0$ berarti $a > 0$ atau $a < 0$.

Jika $a > 0$, maka $\frac{1}{a} > 0$. Akibatnya, $\frac{1}{a} \cdot (a \cdot b) > \frac{1}{a} \cdot 0 = 0$. Sedangkan $\frac{1}{a} \cdot (a \cdot b) = \left(\frac{1}{a} \cdot a\right) \cdot b = 1 \cdot b = b$ sehingga diperoleh $b > 0$.

Jika $a < 0$, maka $(-a) > 0$ sehingga $\frac{1}{(-a)} > 0$. Akibatnya, $\frac{1}{(-a)} \cdot (a \cdot b) > \frac{1}{(-a)} \cdot 0 = 0$. Sedangkan $\frac{1}{(-a)} \cdot (a \cdot b) = \left(-\frac{1}{a} \cdot a\right) \cdot b = -1 \cdot b = -b$ sehingga diperoleh $(-b) > 0$ atau $b < 0$.

Jadi, $a, b > 0$ atau $a, b < 0$.

2. Misalkan $a \cdot b < 0$. Maka $a, b \neq 0$ (karena jika $a = 0$ atau $b = 0$ maka $a \cdot b = 0 \cdot b = 0$ atau $a \cdot b = a \cdot 0 = 0$. Kontradiksi dengan $a \cdot b < 0$). $a \neq 0$ berarti $a > 0$ atau $a < 0$.

Jika $a > 0$, maka $\frac{1}{a} > 0$. Akibatnya, $\frac{1}{a} \cdot (a \cdot b) < \frac{1}{a} \cdot 0 = 0$. Sedangkan $\frac{1}{a} \cdot (a \cdot b) = \left(\frac{1}{a} \cdot a\right) \cdot b = 1 \cdot b = b$ sehingga diperoleh $b < 0$.

Jika $a < 0$, maka $(-a) > 0$ sehingga $\frac{1}{(-a)} > 0$. Akibatnya, $\frac{1}{(-a)} \cdot (a \cdot b) < \frac{1}{(-a)} \cdot 0 = 0$. Sedangkan $\frac{1}{(-a)} \cdot (a \cdot b) = \left(-\frac{1}{a} \cdot a\right) \cdot b = -1 \cdot b = -b$ sehingga diperoleh $(-b) < 0$ atau $b > 0$.

Jadi, $a > 0, b < 0$ atau $a < 0, b > 0$.

■

Lemma berikut akan banyak digunakan dalam pembuktian pada bagian selanjutnya.

Lemma 2.6. (*Bilangan taknegatif yang lebih kecil dari semua bilangan positif*) Jika $0 \leq a < \varepsilon$ untuk setiap $\varepsilon > 0$, maka $a = 0$.

Bukti.

Misalkan $0 \leq a < \varepsilon$ untuk setiap $\varepsilon > 0$.

Andaikan $a > 0$.

Jika kedua ruas dikali dengan $\frac{1}{2}$, maka diperoleh $a \cdot \frac{1}{2} > 0 \cdot \frac{1}{2}$ sehingga $\frac{a}{2} > 0$.

Selanjutnya, jika kedua ruas ditambah $\frac{a}{2}$, maka diperoleh $\frac{a}{2} + \frac{a}{2} > 0 + \frac{a}{2}$ atau $a > \frac{a}{2}$.

Kontradiksi dengan $a < \varepsilon$ untuk setiap $\varepsilon > 0$.

Jadi, pengandaian salah. Haruslah $a = 0$. ■

2.2.3 Beberapa Penggunaan Sifat Urutan

Dari sifat urutan $\mathbf{R}$ banyak dimunculkan ketaksamaan-ketaksamaan. Beberapa yang sangat terkenal akan diperlihatkan pada bagian berikut.

Ketaksamaan AM-GM

Ketaksamaan AM-GM (*Arithmetic Mean-Geometric Mean*) berbentuk

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

untuk setiap $a, b \in \mathbf{R}$.

Ketaksamaan ini berasal dari kenyataan bahwa $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$. Selanjutnya, diperoleh $a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0$. Akibatnya, diperoleh $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ atau $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Ketaksamaan Bernoulli

Ketaksamaan Bernoulli berbentuk

$$(1+a)^n \geq 1+na$$

untuk setiap $n \in \mathbf{N}$ dan $a > -1$

Ketaksamaan ini bisa ditunjukkan dengan induksi matematika. Jelas bahwa untuk $n = 1$, $(1+a)^1 = 1+a = 1+1a$. Sekarang, andaikan untuk $n = k$ berlaku $(1+a)^k \geq 1+ka$, maka

$$(1+a)^{k+1} = (1+a)^k(1+a) \geq (1+ka)(1+a) = 1 + (k+1)a + ka^2 \geq 1 + (k+1)a$$

2.2.4 Soal yang Diselesaikan

1. Buktikan bahwa

(a) Relasi " $<$ " bersifat transitif.

Misalkan a, b, c sebarang bilangan real. Jika $a < b$ dan $b < c$, maka $a < c$.

(b) Relasi " $\leq$ " bersifat antisimetri.

Misalkan a, b sebarang bilangan real. Jika $a \leq b$ dan $b \leq a$, maka $a = b$.

Jawab.

(a) Misalkan $a < b$ dan $b < c$. Hal ini berarti $b - a \in \mathbf{P}$ dan $c - b \in \mathbf{P}$.

Ketertutupan $\mathbf{P}$ menyebabkan $(b - a) + (c - b) = c - a \in \mathbf{P}$. Jadi, $a < c$.

(b) Misalkan $a \leq b$ dan $b \leq a$. Ini berarti $a - b, b - a \in \mathbf{P} \cup \{0\}$.

Jika $a - b$ dan $b - a \in \mathbf{P} \cup \{0\}$, maka menurut definisi himpunan kita peroleh

$$(a - b \in \mathbf{P} \text{ atau } a - b = 0) \text{ dan } (b - a \in \mathbf{P} \text{ atau } b - a = 0)$$

Hal ini ekuivalen dengan

$$(a - b \in \mathbf{P} \text{ atau } a = b) \text{ dan } (b - a \in \mathbf{P} \text{ atau } a = b)$$

$$(a - b \in \mathbf{P} \text{ dan } b - a \in \mathbf{P}) \text{ atau } a = b$$

Karena $b - a = -(a - b)$, maka pernyataan terakhir ekuivalen dengan

$$(a - b \in \mathbf{P} \text{ dan } -(a - b) \in \mathbf{P}) \text{ atau } a = b$$

Sifat trikotomi tidak memungkinkan $a - b$ dan $-(a - b) \in \mathbf{P}$.

Jadi, haruslah yang berlaku $a = b$.

2. Buktikan jika $a \leq b$ dan $c < d$, maka $a + c < b + d$

Jawab.

Misalkan $a \leq b$ dan $c < d$.

Hal ini berarti $b - a \in \mathbf{P} \cup \{0\}$ dan $d - c \in \mathbf{P}$.

Kita lihat dua kasus ketika $b - a \in \mathbf{P}$ atau $b - a = 0$.

(a) Jika $b - a, d - c \in \mathbf{P}$, maka $(b - a) + (d - c) = (b + d) - (a + c) \in \mathbf{P}$.

(b) Jika $b - a = 0$, maka $d - c = (d - c) + 0 = (d - c) + (b - a) = (b + d) - (a + c) \in \mathbf{P}$

Dengan demikian, $(b + d) - (a + c) \in \mathbf{P}$ sehingga $a + c < b + d$.

3. Tunjukkan bahwa jika $0 < a < b$ dan $0 < c < d$, maka $0 < ac < bd$.

Jawab.

Misalkan $0 < a < b$ dan $0 < c < d$.

Ini berarti, $a, b, b - a, c, d, d - c \in \mathbf{P}$.

Ketertutupan $\mathbf{P}$ menyebabkan

$$ac, (b - a)c = bc - ac, \text{ dan } b(d - c) = bd - bc \text{ juga di } \mathbf{P}.$$

Selanjutnya, $(bc - ac) + (bd - bc) = bd - ac$ juga di $\mathbf{P}$.

Jadi, ac dan $bd - ac \in \mathbf{P}$.

Ini berarti $0 < ac$ dan $ac < bd$ atau $0 < ac < bd$.

4. Tunjukkan bahwa jika $a < b$ dan $c < d$, maka $ad + bc < ac + bd$.

Jawab.

Misalkan $a < b$ dan $c < d$. Ini berarti, $b - a, d - c \in \mathbf{P}$. Ketertutupan $\mathbf{P}$, menyebabkan $(b - a)(d - c) = bd - bc - ad + ac = (ac + bd) - (ad + bc) \in \mathbf{P}$.

Dengan kata lain, $ad + bc < ac + bd$.

5. Jika $0 \leq a < b$, maka $a^2 \leq a \cdot b < b^2$

Jawab.

Misalkan $0 \leq a < b$.

- Jika $a = 0$ maka $a^2 = 0$ dan $a \cdot b = 0$ sehingga $a^2 = a \cdot b$.
- Jika $0 < a < b$, maka $a, b, (b - a) \in \mathbf{P}$. Akibatnya, $a \cdot (b - a), b \cdot (b - a) \in \mathbf{P}$.

Jadi, $a \cdot b - a^2, b^2 - b \cdot a \in \mathbf{P}$ atau dengan kata lain, $a^2 < a \cdot b$ dan $b \cdot a < b^2$.

Karena $a \cdot b = b \cdot a$, maka diperoleh urutan $a^2 < a \cdot b < b^2$.

Jadi, $a^2 \leq a \cdot b < b^2$.

6. Tunjukkan bahwa untuk setiap $n \in \mathbf{N}$, berlaku $n^2 \geq n$.

Jawab.

Kita tahu bahwa $n \geq 1$ atau $n - 1 \geq 0$ untuk setiap $n \in \mathbf{N}$. Dengan demikian, diperoleh $n - 1 \in \mathbf{P}$ atau $n - 1 = 0$. Karena $n \geq 1$, maka $n > 0$ atau $n \in \mathbf{P}$ untuk setiap $n \in \mathbf{N}$. Akibatnya, diperoleh

$$n(n - 1) = n^2 - n \in \mathbf{P}$$

atau

$$n(n - 1) = n^2 - n = 0$$

Jadi, $n^2 - n \geq 0$. Dengan kata lain, $n^2 \geq n$ untuk setiap $n \in \mathbf{N}$.

7. Misalkan $c \in \mathbf{R}$ dan $c > 1$. Tunjukkan $c^n \geq c$ untuk setiap $n \in \mathbf{N}$.

Jawab.

Misalkan $c > 1$. Maka bisa dituliskan $c = 1 + a$ untuk suatu $a > 0$. Dengan ketaksamaan Bernoulli diperoleh

$$c^n = (1 + a)^n \geq 1 + na \geq 1 + a = c$$

Jadi, $c^n \geq c$ untuk setiap $n \in \mathbf{N}$

2.2.5 Latihan

1. Tunjukkan bahwa jika $0 < a < b$ dan $0 \leq c \leq d$, maka $0 \leq ac \leq bd$.
2. Tunjukkan bahwa jika $a < b$ maka $a < \frac{a+b}{2} < b$.
3. Jika $a, b \in \mathbf{R}$, buktikan bahwa $a^2 + b^2 = 0$ jika dan hanya jika $a = 0$ dan $b = 0$.
4. Jika $0 \leq a < b$, tunjukkan bahwa $a < \sqrt{ab} < b$ dan $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.

5. Buktikan bahwa jika $a > b$, maka $a^2b < ab^2 + \frac{a^3 - b^3}{3}$.
6. Misalkan $a, b \in \mathbf{R}$ dan $a \leq b + \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$. Tunjukkan bahwa $a \leq b$.
7. Tentukan semua x yang memenuhi pertidaksamaan berikut:
 - (a) $x^2 > 3x + 4$
 - (b) $1 < x^2 < 4$
 - (c) $\frac{1}{x} < x^2$
8. Jika $0 < c < 1$, tunjukkan bahwa $0 < c^n \leq c$ untuk setiap $n \in \mathbf{N}$.
9. Misalkan $a, b \in \mathbf{R}$ dengan $a, b > 0$.
Tunjukkan bahwa $a < b$ jika dan hanya jika $a^n < b^n$ untuk setiap $n \in \mathbf{N}$.
10. Jika $c > 1$ dan $m, n \in \mathbf{N}$, tunjukkan bahwa $c^m > c^n$ jika dan hanya jika $m > n$.

2.3 Nilai Mutlak

Sifat urutan $\mathbf{R}$ membuat semua bilangan real dapat diurutkan secara baik sehingga posisinya pada $\mathbf{R}$ dapat diketahui. Maka, kemudian timbul pertanyaan mengenai ukuran yaitu jarak antara bilangan-bilangan yang sudah terurut tersebut. Misalnya, berapa jarak dari -2 ke 3. Untuk itu, pada bagian ini akan didefinisikan sebuah konsep yang disebut nilai mutlak atau terkadang dinamakan juga sebagai harga mutlak.

Definisi 2.4. (*Nilai Mutlak*)

Misalkan $x \in \mathbf{R}$. *Nilai mutlak* dari x , yang dilambangkan dengan $|x|$, didefinisikan sebagai

$$|x| = \begin{cases} x & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \\ -x & , \quad x < 0 \end{cases}$$

Contoh 2.1. $|2| = 2$ dan $|-6,5| = 6,5$

Definisi di atas berkaitan dengan sifat trikotomi bilangan real. Tetapi, untuk kepentingan praktis, karena sifat dari bilangan 0 (yaitu, $-0=0$), definisi di atas bisa juga ditulis dalam bentuk

$$|x| = \begin{cases} x & , \quad x \geq 0 \\ -x & , \quad x < 0 \end{cases}$$

atau

$$|x| = \begin{cases} x & , \quad x > 0 \\ -x & , \quad x \leq 0 \end{cases}$$

Dari definisi terlihat bahwa $|x| \geq 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$ dan $|x| = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$.

Demikian juga $|-x| = |x|$ untuk setiap $x \in \mathbf{R}$ karena

- jika $x > 0$ maka $-x < 0$ sehingga $|x| = x$ dan $|-x| = -(-x) = x$
- jika $x = 0$ maka $-x = 0$ sehingga $|x| = 0 = |-x|$
- jika $x < 0$ maka $-x > 0$ sehingga $|x| = -x$ dan $|-x| = -x$

Penjelasan di atas bisa juga disajikan dalam bentuk tabel seperti berikut:

x	$-x$	$ x $	$ -x $
> 0	< 0	x	$-(-x) = x$
0	0	0	0
< 0	> 0	$-x$	$-x$

Selanjutnya, sebuah bilangan real maksimum bernilai sama dengan nilai mutlaknya dan minimum bernilai sama dengan negatif nilai mutlaknya

$$\boxed{-|x| \leq x \leq |x|}$$

Secara tabel, penjelasannya adalah

x	$ x $	$- x $	Kesimpulan
> 0	$x; x > 0$	$-x; -x < 0$	$- x < x = x $
0	0	0	$- x = x = x $
< 0	$-x; -x > 0$	$x; x < 0$	$- x = x < x $
			$- x \leq x \leq x $

Gambar 2.1: Grafik fungsi $f(x) = |x|$ dan $f(x) = |x - 2|$

Secara geometri, $|x|$, yang bisa ditulis atau sama dengan $|x - 0|$, berarti **jarak titik x dengan 0**. Demikian juga, $|x - a|$ bermakna **jarak x dengan titik a** . Bisa dipahami jika grafik fungsi nilai mutlak menunjukkan perubahan naik secara linear seiring menjauhnya titik dari titik yang menjadi patokan (lihat Gambar 2.1)

2.3.1 Sifat-sifat Nilai Mutlak

Teorema 2.4. (*Sifat-sifat Nilai Mutlak*)

1. $|ab| = |a||b|$ untuk setiap $a, b \in \mathbf{R}$.
2. Untuk setiap $c \geq 0$, berlaku $|x| \leq c \Leftrightarrow -c \leq x \leq c$.

3. (*Ketaksamaan Segitiga*)

$$|a + b| \leq |a| + |b| \text{ untuk setiap } a, b \in \mathbf{R}.$$

Bukti.

1. Pertama, jika $a = 0$ atau $b = 0$, maka $|a| = 0$ atau $|b| = 0$ dan $ab = 0$.

$$\text{Akibatnya, } |ab| = 0 = |a||b|.$$

Selanjutnya kita amati empat kasus

- (a) Jika $a, b > 0$, maka $|a| = a$, $|b| = b$, dan $ab > 0$.

$$\text{Akibatnya, } |ab| = ab = |a||b|.$$

- (b) Jika $a, b < 0$, maka $|a| = -a$, $|b| = -b$, dan $ab > 0$.

$$\text{Akibatnya, } |ab| = ab = (-a)(-b) = |a||b|.$$

- (c) Jika $a > 0, b < 0$, maka $|a| = a$, $|b| = -b$, dan $ab < 0$.

$$\text{Akibatnya, } |ab| = -(ab) = a(-b) = |a||b|.$$

- (d) Jika $a < 0, b > 0$, maka $|a| = -a$, $|b| = b$, dan $ab < 0$.

$$\text{Akibatnya, } |ab| = -(ab) = (-a)b = |a||b|.$$

Jadi, $|ab| = |a||b|$.

Analisis dengan definisi bisa kita tabelkan sebagai berikut:

a	b	$ a $	$ b $	ab	$ ab $	$ a b $
> 0	> 0	a	b	> 0	ab	ab
> 0	0	a	0	0	0	0
> 0	< 0	a	$-b$	< 0	$-ab$	$-ab$
0	> 0	0	b	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	< 0	0	$-b$	0	0	0
< 0	> 0	$-a$	b	< 0	$-ab$	$-ab$
< 0	0	$-a$	0	0	0	0
< 0	< 0	$-a$	$-b$	> 0	ab	ab

Jadi, bisa dilihat pada semua kasus bahwa $|ab| = |a||b|$.

2. Misalkan $c \geq 0$.

Akan dibuktikan $|x| \leq c \Rightarrow -c \leq x \leq c$ dan $-c \leq x \leq c \Rightarrow |x| \leq c$.

- ($\Rightarrow$) Misalkan $|x| \leq c$. Ini berarti $x \leq c$ dan $-x \leq c$. Jadi, $x \leq c$ dan $-c \leq x$ sehingga $-c \leq x \leq c$.
- ($\Leftarrow$) Misalkan $-c \leq x \leq c$. Ini berarti, $x \leq c$ dan $-c \leq x$ yang sama dengan $x \leq c$ dan $-x \leq c$. Kedua hal terakhir ditambah $0 \leq c$ menunjukkan $|x| \leq c$.

Jadi, untuk setiap $c \geq 0$, berlaku $|x| \leq c \Leftrightarrow -c \leq x \leq c$.

3. Pertama, jika $a = 0$ atau $b = 0$, maka $|a| = 0$ atau $|b| = 0$ sehingga $|a + b| = |b| \leq |a| + |b|$ atau $|a + b| = |a| \leq |a| + |b|$. Selanjutnya kita amati empat kasus

(a) Jika $a, b > 0$, maka $|a| = a$, $|b| = b$, dan $a + b > 0$.

Akibatnya, $|a + b| = a + b = |a| + |b|$.

(b) Jika $a, b < 0$, maka $|a| = -a$, $|b| = -b$, dan $a + b < 0$.

Akibatnya, $|a + b| = -(a + b) = (-a) + (-b) = |a| + |b|$.

(c) Jika $a > 0, b < 0$, maka $|a| = a$ dan $|b| = -b$.

Juga, diperoleh bahwa $-a < a$ dan $b < -b$.

Ada tiga kasus untuk $a + b$:

- Jika $a + b > 0$, maka $|a + b| = a + b < a + (-b) = |a| + |b|$.
- Jika $a + b = 0$, maka $|a + b| = 0 < |a| + |b|$.
- Jika $a + b < 0$, maka $|a + b| = -(a + b) = (-a) + (-b) < a + (-b) = |a| + |b|$.

Semuanya menunjukkan $|a + b| < |a| + |b|$.

(d) Jika $a < 0, b > 0$, maka $|a| = -a$ dan $|b| = b$.

Juga, diperoleh bahwa $a < -a$ dan $-b < b$.

Ada tiga kasus untuk $a + b$:

- Jika $a + b > 0$, maka $|a + b| = a + b < (-a) + b = |a| + |b|$.
- Jika $a + b = 0$, maka $|a + b| = 0 < |a| + |b|$.
- Jika $a + b < 0$, maka $|a + b| = -(a + b) = (-a) + (-b) < (-a) + b = |a| + |b|$.

Semuanya menunjukkan $|a + b| < |a| + |b|$.

Jadi, $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Analisis di atas bisa ditabelkan sebagai berikut:

a	b	$ a $	$ b $	$a + b$	$ a + b $	$ a + b $
> 0	> 0	a	b	> 0	$a + b$	$a + b$
> 0	0	a	0	> 0	$a + 0 = a$	a
> 0	< 0 $b < -b$	a	$-b$	$< a + (-b)$ $a + (-b) > 0$	$\leq a + (-b)$	$a + (-b)$
0	> 0	0	b	> 0	$0 + b = b$	b
0	0	0	0	0	0	0
0	< 0	0	$-b$	< 0	$-(0 + b) = -b$	$-b$
< 0 $a < -a$	> 0	$-a$	b	$< -a + b$ $-a + b > 0$	$\leq -a + b$	$-a + b$
< 0	0	$-a$	0	< 0	$-(a + 0) = -a$	$-a$
< 0	< 0	$-a$	$-b$	< 0	$-(a + b)$	$-a + (-b)$

yang memperlihatkan bahwa $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Cara lain:

Kita tahu bahwa

$$-|a| \leq a \leq |a| \text{ dan } -|b| \leq b \leq |b| \text{ sehingga } -|a| + (-|b|) \leq a + b \leq |a| + |b|.$$

Bentuk terakhir dapat kita tulis sebagai $-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$ sehingga, berdasarkan sifat (2), $|a + b| \leq |a| + |b|$.

■

Ketaksamaan segitiga membawa konsekuensi berikut

Proposisi 2.2. Untuk setiap bilangan real a dan b , berlaku

$$1. \ ||a| - |b|| \leq |a - b|$$

$$2. |a - b| \leq |a| + |b|$$

Bukti.

1. Perhatikan bahwa dengan menggunakan ketaksamaan segitiga,

$$|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b|$$

$$|a| - |b| \leq |a - b|$$

Demikian juga,

$$|b| = |b - a + a| \leq |b - a| + |a|$$

$$|b| - |a| \leq |b - a|$$

$$-|a - b| = -|-(b - a)| = -|b - a| \leq -(|b| - |a|) = |a| - |b|$$

Karena $-|a - b| \leq |a| - |b| \leq |a - b|$, maka $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

2. Dengan menggunakan ketaksamaan segitiga diperoleh

$$|a - b| = |a + (-b)| \leq |a| + |-b| = |a| + |b|.$$

■

2.3.2 Soal yang Diselesaikan

1. Misalkan $a \in \mathbb{R}$. Tunjukkan bahwa $|a| = \sqrt{a^2}$

Jawab.

Untuk sebarang bilangan real a , kita akan tinjau tiga kasus.

- Jika $a > 0$, maka $\sqrt{a^2} = a = |a|$
- Jika $a = 0$, maka $\sqrt{a^2} = \sqrt{0} = 0 = |a|$
- Jika $a < 0$, maka $\sqrt{a^2} = -a = |a|$.

Jadi, $|a| = \sqrt{a^2}$.

2. Jika $a, b \in \mathbf{R}$ dan $b \neq 0$, tunjukkan bahwa $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$

Jawab.

Kita bisa menunjukkan dengan mudah dengan menggunakan sifat nilai mutlak bahwa $\left| \frac{a}{b} \right| |b| = \left| \frac{ab}{b} \right| = |a|$ sehingga $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$.

Tetapi, disini kita hanya akan menggunakan definisi untuk semua kasus yang mungkin. Jelas untuk kasus $a = 0$, $\left| \frac{a}{b} \right| = \left| \frac{0}{b} \right| = |0| = \frac{0}{|b|} = \frac{|a|}{|b|}$.

- (a) Kasus $a, b > 0$.

Diperoleh $|a| = a$, $|b| = b$ dan $\frac{a}{b} > 0$ sehingga $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{a}{b} = \frac{|a|}{|b|}$.

- (b) Kasus $a, b < 0$.

Diperoleh $|a| = -a$, $|b| = -b$, dan $\frac{a}{b} > 0$ sehingga $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{a}{b} = \frac{-a}{-b} = \frac{|a|}{|b|}$.

- (c) Kasus $a > 0, b < 0$.

Diperoleh $|a| = a$, $|b| = -b$ dan $\frac{a}{b} < 0$ sehingga $\left| \frac{a}{b} \right| = -\frac{a}{b} = \frac{a}{-b} = \frac{|a|}{|b|}$.

- (d) Kasus $a < 0, b > 0$.

Diperoleh $|a| = -a$, $|b| = b$, dan $\frac{a}{b} < 0$ sehingga $\left| \frac{a}{b} \right| = -\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{|a|}{|b|}$.

Jadi, $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$.

3. Tunjukkan bahwa untuk setiap $a, b \in \mathbf{R}$ berlaku $|a + b| = |a| + |b|$ jika dan hanya jika $ab \geq 0$

Jawab.

Misalkan $a, b \in \mathbf{R}$. Akan ditunjukkan

- Jika $|a + b| = |a| + |b|$, maka $ab \geq 0$.
- Jika $ab \geq 0$, maka $|a + b| = |a| + |b|$.

- (a) ($\Rightarrow$) Misalkan $|a + b| = |a| + |b|$.

Andaikan tidak berlaku $ab \geq 0$.

Hal ini berarti $ab < 0$ yang terjadi jika $a > 0, b < 0$ atau $a < 0, b > 0$.

Jika $a > 0$, $b < 0$, maka $|a| = a$, $|b| = -b$ sehingga $|a| + |b| = a + (-b)$

Jika $a < 0$, $b > 0$, maka $|a| = -a$, $|b| = b$ sehingga $|a| + |b| = -a + b$

Kontradiksi, karena keduanya tak sama dengan $|a + b|$ yang bernilai $a + b$ atau $-(a + b)$.

Jadi, pengandaian salah sehingga haruslah berlaku $ab \geq 0$.

(b) ($\Leftarrow$) Misalkan $ab \geq 0$.

Ada tujuh kemungkinan nilai a dan b yang mungkin terjadi dan analisisnya seperti tabel berikut:

a	b	$ a $	$ b $	$a + b$	$ a + b $	$ a + b $
> 0	> 0	a	b	> 0	$a + b$	$a + b$
> 0	0	a	0	$a > 0$	a	a
0	> 0	0	b	$b > 0$	b	b
0	0	0	0	0	0	0
0	< 0	0	$-b$	$b < 0$	$-b$	$-b$
< 0	0	$-a$	0	$a < 0$	$-a$	$-a$
< 0	< 0	$-a$	$-b$	< 0	$-(a + b)$	$(-a) + (-b)$

Jadi, $|a + b| = |a| + |b|$.

4. Misalkan $a < b$. Buktikan $|x - a| < |x - b|$ jika dan hanya jika $x < \frac{a+b}{2}$.

Jawab.

Misalkan $a < b$ sehingga $b - a > 0$.

(a) ($\Rightarrow$) Misalkan $|x - a| < |x - b|$.

Dengan mengkuadratkan kedua ruas, kita peroleh $x^2 - 2ax + a^2 < x^2 - 2bx + b^2$

Selanjutnya, diperoleh $2bx - 2ax < b^2 - a^2$ sehingga $2x(b - a) < (b + a)(b - a)$.

Karena $b - a > 0$, maka $2x < b + a$ sehingga $x < \frac{a+b}{2}$.

(b) ($\Leftarrow$) Misalkan $x < \frac{a+b}{2}$.

Andaikan tidak berlaku $|x-a| < |x-b|$.

Artinya, $|x-a| \geq |x-b|$.

Dengan mengkuadratkan kedua ruas, kita peroleh $x^2 - 2ax + a^2 \geq x^2 - 2bx + b^2$

Selanjutnya, diperoleh $2bx - 2ax \geq b^2 - a^2$ sehingga $2x(b-a) \geq (b+a)(b-a)$.

Karena $b-a > 0$, kita bagi kedua ruas dengan $(b-a)$ sehingga diperoleh

$2x \geq b+a$ yang ekuivalen dengan $x \geq \frac{a+b}{2}$.

Kontradiksi dengan $x < \frac{a+b}{2}$.

Jadi, pengandaian salah sehingga haruslah $|x-a| < |x-b|$.

Jadi, jika $a < b$, maka $|x-a| < |x-b|$ jika dan hanya jika $x < \frac{a+b}{2}$.

5. Tentukan semua x yang memenuhi $|x+2| - |x-3| \geq 2$

Jawab.

Kita tahu bahwa

$$|x+2| = \begin{cases} x+2 & , \quad x+2 \geq 0 \equiv x \geq -2 \\ -(x+2) = -x-2 & , \quad x+2 < 0 \equiv x < -2 \end{cases}$$

dan

$$|x-3| = \begin{cases} x-3 & , \quad x-3 \geq 0 \equiv x \geq 3 \\ -(x-3) = 3-x & , \quad x-3 < 0 \equiv x < 3 \end{cases}$$

Dengan demikian, penyelesaian untuk ketiga kasus dapat kita tabelkan

$x < -2$	$-2 \leq x < 3$	$x \geq 3$
$ x+2 - x-3 \geq 2$ $-x-2 - (3-x) \geq 2$ $-5 \geq 2$	$ x+2 - x-3 \geq 2$ $x+2 - (3-x) \geq 2$ $2x-1 \geq 2$ $2x \geq 3$	$ x+2 - x-3 \geq 2$ $x+2 - (x-3) \geq 2$ $5 \geq 2$
$\emptyset$	$x \geq \frac{3}{2}$	$x \in \mathbf{R}$

Kita peroleh himpunan penyelesaian untuk masalah ini adalah:

$$\begin{aligned} & [(x < -2) \cap \emptyset] \cup [(-2 \leq x < 3) \cap (x \geq \frac{3}{2})] \cup [(x \geq 3) \cap (x \in \mathbf{R})] \\ & \emptyset \cup (\frac{3}{2} \leq x < 3) \cup (x \geq 3) \\ & x \geq \frac{3}{2} \end{aligned}$$

6. Sketsakan grafik $y = |x| - |x - 1|$.

Jawab.

Sebelum mensketsakan grafik kita mesti mengetahui terlebih dahulu bahwa

$$|x| = \begin{cases} x & , \quad x \geq 0 \\ -x & , \quad x < 0 \end{cases}$$

dan

$$|x - 1| = \begin{cases} x - 1 & , \quad x - 1 \geq 0 \equiv x \geq 1 \\ -(x - 1) = 1 - x & , \quad x - 1 < 0 \equiv x < 1 \end{cases}$$

Dengan demikian,

$$y = \begin{cases} x - (x - 1) = 1 & , \quad x \geq 1 \\ x - (1 - x) = 2x - 1 & , \quad 0 \leq x < 1 \\ -x - (1 - x) = -1 & , \quad x < 0 \end{cases}$$

sehingga grafiknya seperti terlihat pada Gambar 2.2.

2.3.3 Latihan

1. Buktikan bahwa $|a| = |b|$ jika dan hanya jika $a = b$ atau $a = -b$.
2. Jika $a, b, c \in \mathbf{R}$ dan $x \leq z$, tunjukkan bahwa

$$x \leq y \leq z \text{ jika dan hanya jika } |x - y| + |y - z| = |x - z|$$

Gambar 2.2: Grafik $y = |x| - |x - 1|$

Interpretasikan hal ini secara geometri.

3. Buktikan bahwa jika $a \leq x \leq b$ dan $a \leq y \leq b$, maka $|x - y| \leq b - a$.

Interpretasikan hal ini secara geometri.

4. Buktikan bahwa:

(a) $\max\{x, y\} = \frac{x + y + |x - y|}{2}$

(b) $\min\{x, y\} = \frac{x + y - |x - y|}{2}$

5. Tentukan semua $x \in \mathbf{R}$ yang memenuhi persamaan $|x + 1| + |x - 2| = 9$.

6. Tentukan semua $x \in \mathbf{R}$ yang memenuhi pertidaksamaan $4 < |x + 1| + |x - 3| < 5$.

7. Sketsakan grafik $y = |x + 2| + |x - 1|$.

8. Sketsakan pada bidang $\mathbf{R}^2$, grafik dari

(a) $|x| = |y|$

(b) $|x| + |y| \leq 1$

(c) $|xy| = 2$

(d) $|x| - |y| \geq 3$

2.4 Sifat Kelengkapan $\mathbf{R}$

Pada bagian ini, kita akan mulai mempelajari apa yang membuat himpunan bilangan real begitu istimewa dan mengapa himpunan bilangan real berbeda secara fundamental dengan himpunan bilangan asli, bilangan bulat, maupun rasional. Keistimewaan ini diperoleh dari sifat kelengkapan bilangan real yang didasarkan pada aksioma kelengkapan berikut.

Aksioma 2.1. (*Aksioma Kelengkapan*)

Setiap himpunan bagian takkosong dari $\mathbf{R}$ yang *terbatas di atas* memiliki *supremum* di $\mathbf{R}$

Setiap himpunan bagian takkosong dari $\mathbf{R}$ yang *terbatas di bawah* memiliki *infimum* di $\mathbf{R}$

Ada dua konsep yang baru bagi kita dari aksioma kelengkapan ini, yaitu konsep terbatas di atas/bawah dan supremum/infimum. Kedua konsep ini akan dijelaskan satu persatu.

2.4.1 Himpunan Terbatas

Definisi 2.5. (*Batas atas/bawah dan himpunan terbatas*)

Misalkan H subhimpunan takkosong dari $\mathbf{R}$.

1. $a \in \mathbf{R}$ disebut **batas atas** dari H jika $x \leq a, \forall x \in H$.

Jika H memiliki batas atas, maka H dikatakan **terbatas di atas**

2. $b \in \mathbf{R}$ disebut **batas bawah** dari H jika $x \geq b, \forall x \in H$.

Jika H memiliki batas bawah, maka H dikatakan **terbatas di bawah**

Jika H terbatas di atas dan di bawah, maka H dikatakan **terbatas**.

Contoh 2.2. Bilangan 3 dan setiap bilangan yang lebih besar darinya adalah batas atas dari $\{x | 0 \leq x < 3\}$. Tetapi, 2,99 bukan batas atas dari $\{x | 0 \leq x < 3\}$.

Contoh 2.3. Bilangan 3 juga batas atas dari $\{x | 0 \leq x \leq 3\}$. Jadi, suatu batas atas dapat juga merupakan anggota himpunan tersebut.

Contoh 2.4. Pandang himpunan $S = \{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\} = \{1 - \frac{1}{n} | n \in \mathbf{N}\}$. Himpunan ini terbatas di bawah oleh setiap bilangan real $m \leq 0$ dan terbatas di atas oleh setiap bilangan real $M \geq 1$.

Tidak setiap subhimpunan dari $\mathbf{R}$ memiliki batas atas atau batas bawah. Sebagai contoh, himpunan $\{x > 4 | x \in \mathbf{R}\}$ tidak memiliki batas atas sehingga bisa dikatakan takterbatas. Bagaimanapun, jika suatu himpunan H memiliki batas atas a , maka setiap bilangan yang lebih besar dari a juga batas atas. Jadi, jika H terbatas di atas, maka H memiliki takhingga banyaknya batas atas. Hal yang sama juga berlaku untuk batas bawah.

Lemma 2.7. (*Urutan batas bawah dan batas atas*)

Misalkan H subhimpunan takkosong dari $\mathbf{R}$. Jika a adalah suatu batas atas dari H , dan b adalah suatu batas bawah dari H , maka $b \leq a$.

Bukti. Karena $H \neq \emptyset$, kita bisa memilih sebarang $x \in H$. Karena a suatu batas atas dari H , kita peroleh $x \leq a$. Demikian juga karena b suatu batas bawah dari H , maka $b \leq x$. Dengan menggunakan sifat ketransitifan urutan, kita peroleh $b \leq a$. ■

2.4.2 Supremum dan Infimum

Untuk bisa lebih memahami konsep supremum dan infimum, sebaiknya kita mengingat lagi konsep elemen terbesar (maksimum) dan elemen terkecil (minimum) dari suatu himpunan.

Contoh 2.5. Elemen terkecil (*minimum*) dari $\{x | 0 \leq x \leq 1\}$ adalah 0 dan elemen terbesarnya (*maksimum*) adalah 1.

Contoh 2.6. Minimum dari $\{x | 0 \leq x < 1\}$ adalah 0. Himpunan tersebut tidak punya maksimum.

Andaikan maksimumnya ada, misalkan a . Karena maksimum selalu anggota himpunan-nya, berarti $a < 1$. Tetapi, $a < \frac{a+1}{2} < 1$.

Akibatnya, $\frac{a+1}{2}$ juga anggota himpunan ini yang lebih besar dari a .

Kontradiksi dengan fakta bahwa $a = \max\{x | 0 \leq x < 1\}$.

Contoh 2.7. Maksimum dari $\{x | 0 \leq x \leq 1\} \cup \{3\}$ adalah 3.

Dari beberapa contoh di atas, bisa kita simpulkan bahwa jika elemen maksimum atau minimum suatu himpunan tidak selalu ada, kecuali untuk himpunan berhingga. Jika elemen maksimum dan minimum itu ada, maka mereka selalu merupakan anggota himpunan tersebut. Jika dikaitkan dengan konsep batas atas/bawah, elemen maksimum selalu merupakan batas atas dan elemen minimum selalu merupakan batas bawah. Tambahan lagi, mereka bersifat tunggal: tidak ada himpunan yang memiliki lebih dari satu elemen maksimum atau minimum.

Hal ini memunculkan pertanyaan bagi kita: adakah konsep lain yang serupa yang bisa berlaku untuk himpunan takhingga? Konsep lain itu adalah supremum dan infimum. Konsep itu dibentuk dari fakta bahwa dari takhingga banyaknya batas atas, jika dibandingkan, pasti ada satu bilangan yang paling kecil. Inilah yang disebut **supremum (batas atas terkecil)**. Demikian juga, dari takhingga banyaknya batas bawah, juga ada yang paling besar yang disebut **infimum (batas bawah terbesar)**.

Definisi 2.6. (*Supremum*)

Bilangan s adalah supremum dari subhimpunan takkosong terbatas di atas H atau dapat dituliskan $s = \sup H$ jika

1. Untuk setiap $x \in H$, $x \leq s$. (*s batas atas H*)
2. Untuk setiap a batas atas H , $a \geq s$. (*s batas atas terkecil*)

Definisi 2.7. (*Infimum*)

Bilangan i adalah infimum dari subhimpunan takkosong terbatas di bawah H atau dapat dituliskan $i = \inf H$ jika

1. Untuk setiap $x \in H$, $x \geq i$. (*i* batas bawah H)
2. Untuk setiap b batas bawah H , $b \leq i$. (*i* batas bawah terbesar)

Untuk menerapkan definisi di atas dalam menentukan supremum/infimum suatu himpunan tidaklah mudah secara operasional karena banyaknya batas atas/bawah suatu himpunan tak hingga jumlahnya. Pekerjaan membandingkan semua batas atas/bawah tersebut sehingga diperoleh yang terkecil/terbesar tidak mungkin dilakukan. Kita memerlukan suatu alat lain yang lebih praktis. Teorema berikut akan membantu kita dalam menentukan supremum/infimum.

Teorema 2.5. (*Supremum*)

Misalkan H subhimpunan takkosong dari $\mathbf{R}$ yang terbatas di atas.

Maka, $s = \sup H$ jika

1. $\forall x \in H, x \leq s$.
2. $\forall r < s, \exists x \in H \ni x > r$.

Kita dapat melihat perbedaan Teorema Supremum ini dengan definisi terletak pada pernyataan kedua tentang batas atas terkecil. Tetapi, sebenarnya pernyataan pada definisi ekuivalen secara logika dengan pernyataan pada teorema karena merupakan kontraposisinya.

$$\begin{aligned} (a \text{ batas atas } H \Rightarrow a \geq s) &\equiv (a < s \Rightarrow a \text{ bukan batas atas } H) \\ &\equiv (a < s \Rightarrow \exists x \in H \ni x > a) \end{aligned}$$

Bagian terakhir ini menyiratkan jika kita bergeser ke kiri dari s berapapun kecilnya ke a , mau tidak mau pasti ada setidaknya satu anggota H yang berada di kanan a . Jadi, kedudukan s sebagai batas terkecil tidak tergoyahkan lagi.

Dengan ide yang sama diturunkan teorema untuk memeriksa infimum.

Teorema 2.6. (*Infimum*)

Misalkan H subhimpunan takkosong dari $\mathbf{R}$ yang terbatas di bawah.

Maka, $i = \inf H$ jika

1. $\forall x \in H, x \geq i$.
2. $\forall j > i, \exists x \in H \ni x < j$.

Contoh 2.8. Supremum dari $A = \{\frac{1}{n} | n \in \mathbf{N}\}$ adalah 1 karena

- Untuk setiap $a \in A, a = \frac{1}{n_a} \leq 1$ sehingga 1 batas atas A .
- 1 batas atas terkecil karena jika $r < 1$, maka terdapat $1 = \frac{1}{1} \in A$ dimana $1 > r$.

Dengan demikian $1 = \sup A$.

2.4.3 Soal yang Diselesaikan

1. Misalkan $H = \{x \in \mathbf{R} \mid x > 0\}$. Apakah H mempunyai batas bawah? Apakah H mempunyai batas atas? Apakah $\inf H$ ada? Apakah $\sup H$ ada? Jika ada, tentukanlah $\inf H$ dan $\sup H$.

Jawab.

- (a) Karena $x > 0$ (dengan sendirinya $x \geq 0$), $\forall x \in H$, maka 0 adalah batas bawah H .

Jadi, H terbatas di bawah. (Bilangan lain yang lebih kecil dari 0 juga dapat dibuktikan dengan mudah sebagai batas bawah H).

- (b) H tidak terbatas di atas.

Andaikan H memiliki batas atas. Misalkan batas atas itu a . Ini berarti $a \geq x, \forall x \in H$. Padahal, terdapat $a + 1 \in H$ (karena $a + 1 > a \geq x > 0$) dimana $a + 1 > a$. Kontradiksi dengan a batas atas. Jadi, pengandaian salah, haruslah H tak memiliki batas atas.

- (c) Bagian (a) menyatakan H terbatas di bawah, maka sesuai dengan sifat kelengkapan bilangan real, H memiliki infimum.

- (d) Sesuai dengan sifat kelengkapan bilangan real, H tidak punya supremum.

(e) Klaim $0 = \inf H$.

Pada bagian (a) sudah ditunjukkan 0 adalah batas bawah H .

Tinggal ditunjukkan 0 batas bawah terbesar. Misalkan $j > 0$. Maka $\frac{j}{2} > 0$.

Sehingga kita bisa memilih $\frac{j}{2} \in H$ dimana $\frac{j}{2} < j$.

Sesuai dengan teorema, kita simpulkan $0 = \inf H$.

2. Misalkan $H_1 = \{1 - \frac{(-1)^n}{n} | n \in \mathbf{N}\}$. Tentukan $\inf H_1$ dan $\sup H_1$.

Jawab.

Untuk menduga $\inf$ dan $\sup$ dari H_1 , akan sangat membantu jika kita perhatikan anggota-anggotanya secara terurut, yaitu $\{2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \frac{6}{5}, \frac{5}{6}, \dots\}$ untuk $n = 1, 2, 3, 4$, dst. Disini terlihat suku-suku ganjil dimulai dari 2 turun (mungkin) mendekati 1, sementara suku-suku genap dimulai dari $\frac{1}{2}$ naik (mungkin) mendekati 1. Jadi, bisa diduga bahwa 2 dan $\frac{1}{2}$ adalah anggota terbesar dan terkecil dan bisa diklaim sebagai $\sup$ dan $\inf$

(a) Klaim $2 = \sup H_1$.

- Pandang pertidaksamaan

$$\frac{(-1)^n}{n} \geq -1 \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

atau dengan kata lain

$$-\frac{(-1)^n}{n} \leq 1 \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

Misalkan $x \in H_1$. Maka, $x = 1 - \frac{(-1)^n}{n}$ untuk suatu $n \in \mathbf{N}$. Dan,

$$x = 1 - \frac{(-1)^n}{n} \leq 1 + 1 = 2$$

Jadi, $x \leq 2$ untuk setiap $x \in H_1$. Ini menunjukkan 2 batas atas H_1 .

- Misalkan $r < 2$. Maka terdapat $2 = 1 - \frac{(-1)^1}{1} \in H_1$ dimana $2 > r$.

Jadi, $2 = \sup H_1$.

(b) Klaim $\frac{1}{2} = \inf H_1$.

- Pandang pertidaksamaan

$$-\frac{(-1)^n}{n} \geq -\frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

Misalkan $x \in H_1$. Maka, $x = 1 - \frac{(-1)^n}{n}$ untuk suatu $n \in \mathbf{N}$. Dan,

$$x = 1 - \frac{(-1)^n}{n} \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Jadi, $x \geq \frac{1}{2}$ untuk setiap $x \in H_1$. Ini menunjukkan $\frac{1}{2}$ batas bawah H_1 .

- Misalkan $j > \frac{1}{2}$. Maka terdapat $\frac{1}{2} = 1 - \frac{(-1)^2}{2} \in H_1$ sehingga $\frac{1}{2} < j$.

Jadi, $\frac{1}{2} = \inf H_1$.

3. Misalkan H himpunan takkosong di $\mathbf{R}$ yang terbatas di bawah.

Tunjukkan $\inf H = -\sup(-H)$ dimana $-H = \{-x \mid x \in H\}$.

Jawab.

Karena H terbatas di bawah, maka terdapat $b \in \mathbf{R} \ni x \geq b, \forall x \in H$. Hal ini ekuivalen dengan $\exists(-b) \in \mathbf{R} \ni -x \leq -b, \forall -x \in -H$. Jadi, $-H$ terbatas di atas sehingga, menurut aksioma kelengkapan, memiliki supremum.

Misalkan $i = \inf H$.

Akan ditunjukkan $i = -\sup(-H)$ atau dengan kata lain, $-i = \sup(-H)$.

- Karena i batas bawah H , maka $\forall x \in H, x \geq i$. Dengan kata lain, $\forall -x \in -H, -x \leq -i$. Jadi, $-i$ batas atas $-H$.
- Misalkan $r < -i$. Dengan kata lain, $-r > i$. Karena $i = \inf H$, maka terdapat $x \in H$ sehingga $x < -r$. Atau, dengan kata lain, terdapat $-x \in -H$ sehingga $-x > r$.

Jadi, $-i = \sup(-H)$ sehingga $\inf H = -\sup(-H)$.

4. Misalkan H himpunan takkosong di $\mathbf{R}$. Tunjukkan:

$$a \text{ batas atas dari } H \Leftrightarrow \forall y \in \mathbf{R}, y > a \text{ berakibat } y \notin H.$$

Jawab.

($\Rightarrow$) Misalkan a batas atas H . Misalkan $y > a$. Akan ditunjukkan $y \notin H$.

Andaikan $y \in H$. Karena a batas atas H , maka $y \leq a$. Kontradiksi dengan $y > a$.

Jadi, pengandaian salah. Haruslah $y \notin H$.

($\Leftarrow$) Misalkan $\forall y \in \mathbf{R}, y > a$ berakibat $y \notin H$.

Akan ditunjukkan a batas atas H .

Pernyataan " $\forall y \in \mathbf{R}, y > a$ berakibat $y \notin H$ " ekuivalen dengan kontraposisinya yaitu "Jika $y \in H$, maka $y \leq a$ ".

Jadi, a adalah batas atas H .

5. Misalkan H subhimpunan tak kosong dari $\mathbf{R}$. Tunjukkan jika $s = \sup H$ maka $\forall n \in \mathbf{N}, s - \frac{1}{n}$ bukan batas atas H , tetapi $s + \frac{1}{n}$ adalah batas atas H .

Jawab.

Karena $s - \frac{1}{n} < s$ dan $s = \sup H$, maka terdapat $x \in H$ sehingga $x > s - \frac{1}{n}$.

Jadi $s - \frac{1}{n}$ bukan batas atas H .

Sementara, karena $s = \sup H$, maka $\forall x \in H, x \leq s$.

Kita tahu bahwa $s < s + \frac{1}{n}$ sehingga $x \leq s + \frac{1}{n}$.

Jadi, $s + \frac{1}{n}$ batas atas H .

6. Tunjukkan jika A dan B subhimpunan terbatas di $\mathbf{R}$, maka $A \cup B$ terbatas.

Tunjukkan juga $\sup(A \cup B) = \sup\{\sup A, \sup B\}$.

Jawab.

Karena A terbatas berarti $\exists M_1, M_2 \in \mathbf{R}$ sehingga $M_1 \leq x \leq M_2, \forall x \in A$.

Demikian juga, B terbatas berarti $\exists N_1, N_2 \in \mathbf{R}$ sehingga $N_1 \leq y \leq N_2, \forall y \in B$.

Akibatnya, untuk setiap $z \in A \cup B, \min\{M_1, N_1\} \leq z \leq \max\{M_2, N_2\}$.

Jadi, $A \cup B$ terbatas.

- Akan ditunjukkan $\sup\{\sup A, \sup B\}$ batas atas dari $A \cup B$.

Sifat supremum sebagai batas atas memberikan $x \leq \sup A, \forall x \in A$ dan $y \leq \sup B, \forall y \in B$. Akibatnya, $\forall z \in A \cup B$, yang berarti $z \in A$ atau $z \in B$, $z \leq \sup\{\sup A, \sup B\}$.

- Misalkan $r < \sup\{\sup A, \sup B\}$.

Ini berarti, $r < \sup A$ atau $r < \sup B$.

Jika $r < \sup A$, maka terdapat $a_0 \in A$ sehingga $a_0 > r$

Jika $r < \sup B$, maka terdapat $b_0 \in B$ sehingga $b_0 > r$.

Jadi, terdapat $c \in A \cup B$, $c = a_0$ atau $c = b_0$, sehingga $c > r$.

Jadi, $\sup(A \cup B) = \sup\{\sup A, \sup B\}$.

2.4.4 Latihan

1. Tunjukkan supremum suatu himpunan itu, jika ada, tunggal.
Jadi, jika s_1 dan s_2 supremum suatu himpunan, maka $s_1 = s_2$.
2. Misalkan H himpunan terbatas di $\mathbf{R}$ dan H_0 subhimpunan takkosong dari H .
Tunjukkan $\inf H \leq \inf H_0 \leq \sup H_0 \leq \sup H$.
3. Jika diketahui bahwa $s = \sup A$ dan $x < s$, apa yang bisa disimpulkan tentang x ?
4. Tentukan supremum dan infimum dari $H = \left\{ \frac{2+n}{n} \mid n \in \mathbf{N} \right\}$
5. Buktikan bahwa jika A subhimpunan terbatas di $\mathbf{R}$, maka $A \cap B$ terbatas untuk setiap $B \neq \emptyset$.
Tunjukkan juga $\sup(A \cap B) \leq \sup A$.

2.5 Aplikasi Supremum

Secara umum, supremum/infimum memiliki sifat yang sesuai dengan sifat aljabar dan urutan bilangan real juga.

Teorema 2.7. (*Sifat Supremum/Infimum*)

Misalkan H subhimpunan terbatas di $\mathbf{R}$ dan $c \in \mathbf{R}$.

Misalkan $c + x = \{c + x \mid x \in H\}$ dan $cH = \{cx \mid x \in H\}$.

Maka berlaku

1. $\sup(c + H) = c + \sup H$
2. $\inf(c + H) = c + \inf H$
3. $\sup(cH) = c \sup H$ untuk $c > 0$.
4. $\inf(cH) = c \inf H$ untuk $c > 0$.

Bukti. Disini hanya akan dibuktikan Pernyataan 1 saja.

- Karena $x \leq \sup H$, maka $c + x \leq c + \sup H$ untuk setiap $x \in S$.

Jadi, $c + \sup H$ batas atas dari $c + HS$

- Misalkan $r < c + \sup H$. Maka, $r - c < \sup H$. Sifat supremum menyebabkan terdapat $x \in H$ sehingga $x > r - c$. Jadi, terdapat $c + x \in c + H$ sehingga $c + x > r$.

Jadi, $c + \sup H = \sup(c + H)$ ■

Teorema 2.8.

Misalkan f dan g fungsi dengan range terbatas di D .

Untuk setiap $x \in D$, $f(x) \leq g(x)$.

Maka berlaku

$$\sup f(D) \leq \sup g(D)$$

$$\inf f(D) \leq \inf g(D)$$

Bukti. Disini hanya akan dibuktikan $\sup f(D) \leq \sup g(D)$ saja.

Andaikan $\sup f(D) > \sup g(D)$.

Hal ini berarti terdapat $x_1 \in D$ sehingga $f(x_1) > \sup g(D)$.

Akibatnya, $f(x_1) > g(x)$ untuk setiap $x \in D$, khususnya $f(x_1) > g(x_1)$.

Kontradiksi dengan $f(x) \leq g(x)$ untuk setiap $x \in D$.

Jadi, haruslah $\sup f(D) \leq \sup g(D)$. ■

Sebagian bukti yang lain ditinggalkan untuk menjadi latihan.

Beberapa aplikasi sifat supremum yang utama adalah

1. Sifat Archimedes
2. Pembuktian Adanya Bilangan Rasional $\sqrt{2}$
3. Pembuktian Kerapatan Bilangan Rasional dan Irrasional di $\mathbf{R}$.

2.5.1 Sifat Archimedes

Teorema 2.9.

Misalkan $x \in \mathbf{R}$. Maka terdapat $n_x \in \mathbf{N}$ sedemikian sehingga $n_x > x$.

Ini menyiratkan bahwa selalu ada bilangan asli yang lebih besar dari sebuah bilangan real.

Bukti. Misalkan $x \in \mathbf{R}$. Andaikan untuk setiap $n \in \mathbf{N}$, $n \leq x$. Ini menunjukkan x batas atas $\mathbf{N}$. Jadi, $\mathbf{N}$ terbatas di atas sehingga, menurut aksioma kelengkapan, $\mathbf{N}$ memiliki supremum. Misalkan $s = \sup \mathbf{N}$. Pilih $s - 1 < s$, maka terdapat $n_0 \in \mathbf{N}$ sehingga $n_0 > s - 1$ atau, dengan kata lain, $n_0 + 1 > s$. Kontradiksi dengan s batas atas $\mathbf{N}$. Jadi, pengandaian salah, haruslah terdapat $n_x \in \mathbf{N}$ sedemikian sehingga $n_x > x$ ■

Akibat 2.1. *Jika $y > 0$. Maka terdapat $n_y \in \mathbf{N}$ sedemikian sehingga $0 < \frac{1}{n_y} < y$*

Bukti. Jelas karena $n > 0$ untuk setiap $n \in \mathbf{N}$, maka $\frac{1}{n} > 0$ untuk setiap $n \in \mathbf{N}$. Misalkan $y > 0$. Maka, $\frac{1}{y} \in \mathbf{R}$. Menurut Sifat Archimedes, terdapat $n_y \in \mathbf{N}$ sehingga $n_y > \frac{1}{y}$ atau, dengan kata lain, $\exists n_y \in \mathbf{N}$ sehingga $\frac{1}{n_y} < y$.

Jadi, terdapat $n_y \in \mathbf{N}$ sehingga $0 < \frac{1}{n_y} < y$. ■

Akibat 2.2. Jika $z > 0$. Maka terdapat $n_z \in \mathbf{N}$ sedemikian sehingga $n_z - 1 \leq z < n_z$

Bukti. Karena $z \in \mathbf{R}$, maka menurut Sifat Archimedes, terdapat $n \in \mathbf{N}$ sehingga $n > z$. Pandang himpunan $H = \{n \in \mathbf{N} \mid n > z\}$. $S \subset \mathbf{N}$ dan $S \neq \emptyset$ karena $\exists n \in \mathbf{N}$, $\ni n > z$. Menurut sifat *Well-ordering*, H mempunyai elemen terkecil. Sebut elemen tersebut n_z , maka berlaku $n_z - 1 \leq z < n_z$.

(Andaikan $n_z - 1 > z$, maka $n_z - 1 \in H$ sementara $n_z - 1 < n_z$. Kontradiksi dengan n_z elemen terkecil H . Jadi, haruslah $n_z - 1 \leq z$.) ■

Dengan adanya Sifat Archimedes, kita dapat membuktikan supremum atau infimum suatu himpunan seperti contoh berikut.

Contoh 2.9. Tunjukkan $\inf\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{N}\} = 0$.

Jawab.

Misalkan $H = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{N}\}$

1. Jelas 0 batas bawah dari H karena $\frac{1}{n} \geq 0$ untuk setiap $n \in \mathbf{N}$.

2. Misalkan $j > 0$. Maka $\frac{1}{j} \in \mathbf{R}$.

Menurut sifat Archimedes, terdapat $n_j \in \mathbf{N}$ sedemikian sehingga $n_j > \frac{1}{j}$.

Dengan kata lain, terdapat $\frac{1}{n_j} \in H \ni \frac{1}{n_j} < j$

Jadi, $\inf\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{N}\} = 0$

2.5.2 Pembuktian adanya bilangan Irrasional $\sqrt{2}$ dll

Teorema 2.10.

Terdapat bilangan real positif x yang memenuhi $x^2 = 2$.

Bukti.

Awalnya, kita bentuk himpunan $H = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 < 2\}$.

Himpunan ini takkosong karena $\exists 1 \in H$, $1 \in \mathbf{R}$ dan $1^2 < 2$. Himpunan H terbatas

di atas karena terdapat $2 \in \mathbf{R}$ sehingga untuk setiap $x \in H$, $x < 2$ (karena $x^2 < 2^2$). Akibatnya, sesuai dengan aksioma kelengkapan, H mempunyai supremum bilangan real. Misalkan bilangan real itu s sehingga bisa ditulis $s = \sup H$.

Selanjutnya, klaim $s^2 = 2$.

Andaikan $s^2 \neq 2$. Ini berarti $s^2 > 2$ atau $s^2 < 2$.

Sekarang, akan kita tunjukkan keduanya tidak mungkin.

1. Kasus $s^2 > 2$.

Pandang $s^2 - 2 > 0$ sehingga $\frac{s^2 - 2}{2s} > 0$ yang mengakibatkan $\frac{2s}{s^2 - 2} \in \mathbf{R}$.

Menurut sifat Archimedes, kita bisa menemukan $n \in \mathbf{N}$ sedemikian sehingga $n > \frac{2s}{s^2 - 2}$ atau $\frac{-1}{n} > \frac{-(s^2 - 2)}{2s}$.

Pandang

$$\begin{aligned} \left(s - \frac{1}{n}\right)^2 &= s^2 - \frac{2s}{n} + \frac{1}{n^2} > s^2 - \frac{2s}{n} = s^2 + 2s \left(\frac{-1}{n}\right) \\ &> s^2 + 2s \left(\frac{-(s^2 - 2)}{2s}\right) = s^2 - s^2 + 2 = 2. \end{aligned}$$

Jadi, untuk setiap $x \in H$, $x^2 < 2 < s - \frac{1}{n}$. Ini menunjukkan bahwa $s - \frac{1}{n}$ batas atas S yang jelas lebih kecil dari s . Kontradiksi dengan fakta bahwa $s = \sup H$.

2. Kasus $s^2 < 2$.

Pandang $2 - s^2 > 0$ sehingga $\frac{2 - s^2}{2s + 1} > 0$ yang mengakibatkan $\frac{2s + 1}{2 - s^2} \in \mathbf{R}$.

Menurut sifat Archimedes, kita bisa menemukan $n \in \mathbf{N}$ sedemikian sehingga $n > \frac{2s + 1}{2 - s^2}$ atau $\frac{1}{n} < \frac{2 - s^2}{2s + 1}$.

Pandang

$$\begin{aligned} \left(s + \frac{1}{n}\right)^2 &= s^2 + \frac{2s}{n} + \frac{1}{n^2} \leq s^2 + \frac{2s}{n} + \frac{1}{n} = s^2 + \frac{2s + 1}{n} \\ &= s^2 + (2s + 1) \frac{1}{n} < s^2 + (2s + 1) \frac{2 - s^2}{2s + 1} = s^2 + (2 - s^2) = 2. \end{aligned}$$

Ini menunjukkan bahwa $s + \frac{1}{n} \in H$.

Karena $s + \frac{1}{n} > s$, hal ini kontradiksi dengan s batas atas H .

Jadi, pengandaian salah sehingga haruslah $s^2 = 2$.

Akibatnya, terdapat bilangan real $s = \sqrt{2}$ yang merupakan $\sup H$. ■

2.5.3 Teorema Kerapatan Bilangan Rasional dan Irrasional

Teorema 2.11.

Misalkan x dan y bilangan real dimana $x < y$. Maka

1. *terdapat bilangan rasional r sedemikian sehingga $x < r < y$*
2. *terdapat bilangan irrasional s sedemikian sehingga $x < s < y$*

Bukti.

1. Untuk $x < y$ terdapat beberapa kemungkinan urutan x dan y , yaitu $0 < x < y$, $0 = x < y$, $x < 0 = y$, $x < 0 < y$, atau $x < y < 0$.

(a) Kasus $0 < x < y$.

Perhatikan disini bahwa $y - x > 0$ sehingga $\frac{1}{y - x} \in \mathbf{R}$. Akibatnya, menurut sifat Archimedes, terdapat $n \in \mathbf{N}$ sedemikian sehingga $n > \frac{1}{y - x}$. Selanjutnya, diperoleh $ny - nx > 1$ atau

$$ny > nx + 1 \quad (2.1)$$

Sementara, karena $nx > 0$, menurut akibat dari sifat Archimedes, terdapat $m \in \mathbf{N}$ sedemikian sehingga

$$m - 1 \leq nx < m \quad (2.2)$$

Pandang, $m - 1 \leq nx$ yang berarti $m \leq nx + 1$. Sesuai dengan (2.1), diperoleh $m \leq nx + 1 < ny$ atau

$$m < ny \quad (2.3)$$

Dari (2.2) dan (2.3), diperoleh $nx < m < ny$.

Selanjutnya, diperoleh $x < \frac{m}{n} < y$.

Jadi, terdapat $r = \frac{m}{n}$ sehingga $x < r < y$.

(b) Kasus $0 = x < y$.

Karena $y > 0$, maka $\frac{1}{y} \in \mathbf{R}$. Menurut sifat Archimedes, terdapat $n \in \mathbf{N}$ sedemikian sehingga $n > \frac{1}{y}$ atau $\frac{1}{n} < y$. Dan $\frac{1}{n} > 0 = x$.

Jadi, terdapat $r = \frac{1}{n}$ sehingga $x < r < y$.

(c) Kasus $x < 0 = y$.

Dengan mengubah urutannya menjadi $0 = y < (-x)$, kita bisa menunjukkan dengan cara yang sama seperti kasus (b).

(d) Kasus $x < 0 < y$.

Jelas disini terdapat $r = 0$ sehingga $x < r < y$.

(e) Kasus $x < y < 0$.

Dengan mengubah urutannya menjadi $0 < (-y) < (-x)$, kita bisa menunjukkan dengan cara yang sama seperti kasus (a).

2. Karena $x < y$, maka $\frac{x}{\sqrt{2}} < \frac{y}{\sqrt{2}}$. Seperti juga bukti bagian 1 teorema ini, terdapat lima kemungkinan urutan $\frac{x}{\sqrt{2}}$ dan $\frac{y}{\sqrt{2}}$, yaitu:

(a) Kasus $0 < \frac{x}{\sqrt{2}} < \frac{y}{\sqrt{2}}$.

Dari bukti bagian 1, terdapat $r = \frac{m}{n}$ sehingga $\frac{x}{\sqrt{2}} < r < \frac{y}{\sqrt{2}}$.

Pilih $s = r\sqrt{2}$ bilangan irrasional sehingga $x < s < y$.

(b) Kasus $0 = \frac{x}{\sqrt{2}} < \frac{y}{\sqrt{2}}$.

Dari bukti bagian 1, terdapat $r = \frac{1}{n}$ sehingga $\frac{x}{\sqrt{2}} < r < \frac{y}{\sqrt{2}}$.

Pilih $s = r\sqrt{2}$ bilangan irrasional sehingga $x < s < y$.

(c) Kasus $\frac{x}{\sqrt{2}} < 0 = \frac{y}{\sqrt{2}}$.

Dengan mengubah urutannya menjadi $0 = \frac{y}{\sqrt{2}} < (\frac{-x}{\sqrt{2}})$, kita bisa menunjukkan dengan cara yang sama seperti kasus (b).

(d) Kasus $\frac{x}{\sqrt{2}} < 0 < \frac{y}{\sqrt{2}}$.

Karena dalam kasus ini $0 < \frac{y}{\sqrt{2}}$, kita bisa menggunakan bilangan irrasional s yang sama pada kasus (b) sehingga $x < s < y$.

(e) Kasus $\frac{x}{\sqrt{2}} < \frac{y}{\sqrt{2}} < 0$.

Dengan mengubah urutannya menjadi $0 < (\frac{-y}{\sqrt{2}}) < (\frac{-x}{\sqrt{2}})$, kita bisa menunjukkan dengan cara yang sama seperti kasus (a).

■

2.5.4 Soal yang Diselesaikan

1. Misalkan $H = \{\frac{1}{n} - \frac{1}{m} \mid m, n \in \mathbf{N}\}$. Tentukan $\inf H$ dan $\sup H$.

Jawab.

Untuk menduga $\inf H$ dan $\sup H$, ingatlah bahwa untuk setiap bilangan asli n berlaku $0 < \frac{1}{n} \leq 1$ dan untuk setiap bilangan asli m berlaku $-1 \leq -\frac{1}{m} < 0$. Akibatnya, $0 + (-1) < \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < 1 + 0$. Jadi, kita bisa menduga $\inf H = 0 + (-1) = -1$ dan $\sup H = 1 + 0 = 1$.

(a) Klaim $1 = \sup H$.

- Karena $\forall m, n \in \mathbf{N}$

$$\frac{1}{n} \leq 1, \quad -\frac{1}{m} \leq 0$$

sehingga

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{m} \leq 1 + 0 = 1$$

Jadi, $\forall \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \in H$, $\frac{1}{n} - \frac{1}{m} \leq 1$ sehingga 1 adalah batas atas H .

- Misalkan $r < 1$ sehingga $1 - r > 0$ dan $\frac{1}{1-r} \in \mathbf{R}$. Menurut sifat Archimedes, terdapat $m_r \in \mathbf{N}$ sedemikian sehingga $m_r > \frac{1}{1-r}$ atau $1 - r > \frac{1}{m_r}$ atau $-\frac{1}{m_r} > r - 1$. Pilih $n_r = 1$ sehingga $\frac{1}{n_r} - \frac{1}{m_r} >$

$$1 + (r - 1) = r.$$

Jadi, jika $r < 1$, maka $\exists \frac{1}{n_r} - \frac{1}{m_r} \in H \ni \frac{1}{n_r} - \frac{1}{m_r} > r$.

$$\therefore \sup H = 1.$$

(b) Klaim $-1 = \inf H$.

- Karena $\forall m, n \in \mathbf{N}$

$$\frac{1}{n} > 0, \quad -\frac{1}{m} \geq -1$$

sehingga

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{m} > 0 + (-1) = -1$$

Jadi, $\forall \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \in H, \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \geq -1$ sehingga -1 adalah batas bawah H .

- Misalkan $j > -1$ sehingga $j + 1 > 0$ dan $\frac{1}{j+1} \in \mathbf{R}$. Menurut sifat Archimedes, terdapat $n_j \in \mathbf{N}$ sedemikian sehingga $n_j > \frac{1}{j+1}$ atau $j + 1 > \frac{1}{n_j}$. Pilih $m_j = 1$ sehingga $\frac{1}{n_j} - \frac{1}{m_j} < (j + 1) - 1 = j$.
Jadi, jika $j > -1$, maka $\exists \frac{1}{n_j} - \frac{1}{m_j} \in H \ni \frac{1}{n_j} - \frac{1}{m_j} < j$.

$$\therefore \inf H = -1$$

2. Misalkan H himpunan takkosong yang terbatas di $\mathbf{R}$.

Misalkan $c > 0$ dan $cH = \{cx \mid x \in H\}$.

Tunjukkan bahwa $\inf cH = c \inf H$.

Jawab.

- (a) Karena untuk setiap $x \in H, x \geq \inf H$, maka $\forall cx \in cH, cx \geq c \inf H$.

Jadi, $c \inf H$ batas bawah dari cH .

- (b) Misalkan $j > c \inf H$. Maka, $\frac{j}{c} > \inf H$. Menurut Teorema Infimum, terdapat $x_0 \in H$ sedemikian sehingga $x_0 < \frac{j}{c}$.

Jadi, jika $j > c \inf H$, maka terdapat $cx_0 \in cH$ sehingga $cx_0 < c \frac{j}{c} = j$.

3. Misalkan X subhimpunan takkosong di $\mathbf{R}$. Misalkan $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ memiliki jangkauan terbatas di $\mathbf{R}$. Jika $c \in \mathbf{R}$, tunjukkan $\sup\{c + f(x) | x \in X\} = c + \sup\{f(x) | x \in X\}$

Jawab.

Misalkan $c + f(X) = \{c + f(x) | x \in X\}$ dan $f(X) = \{f(x) | x \in X\}$.

Jelas $c + f(X) \subseteq \mathbf{R}$ dan takkosong karena $X \neq \emptyset$.

Karena $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ memiliki jangkauan terbatas, maka $f(X)$ memiliki supremum.

Demikian juga, c terbatas sehingga (sesuai dengan yang telah kita tunjukkan sebelumnya bahwa jumlah dua himpunan terbatas juga terbatas) $c + f(X)$ terbatas.

Akibatnya, $c + f(X)$ juga memiliki supremum.

Akan ditunjukkan $\sup(c + f(X)) = c + \sup f(X)$ dengan:

- Sifat supremum $f(X)$ memberikan $f(x) \leq \sup f(X)$, $\forall f(x) \in f(X)$.
Akibatnya, untuk setiap $c + f(x) \in c + f(X)$, $c + f(x) \leq c + \sup f(X)$.
Jadi, $c + \sup f(X)$ adalah batas atas dari $c + f(X)$.
- Misalkan $r < c + \sup f(X)$ sehingga $r - c < \sup f(X)$. Menurut Teorema Supremum, $\exists f(x_0) \in f(X) \ni f(x_0) > r - c$. Dengan kata lain, $\exists c + f(x_0) \in c + f(X) \ni c + f(x_0) > c + (r - c) = r$.
Jadi, jika $r < c + \sup f(X)$, maka $\exists c + f(x_0) \in c + f(X) \ni c + f(x_0) > r$.

$$\therefore \sup\{c + f(x) | x \in X\} = c + \sup\{f(x) | x \in X\}$$

4. Misalkan A, B subhimpunan takkosong dari $\mathbf{R}$ yang terbatas di atas.

Misalkan $A + B = \{a + b | a \in A, b \in B\}$.

Tunjukkan $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$

Jawab.

Karena A, B himpunan takkosong, maka $A + B$ juga takkosong. Selanjutnya, karena A, B terbatas di atas, maka terdapat $M_1, M_2 \in \mathbf{R}$ sehingga $a \leq M_1$, $\forall a \in$

A dan $b \leq M_2, \forall b \in B$. Akibatnya, $a + b \leq M_1 + M_2, \forall a + b \in A + B$. Ini menunjukkan bahwa $A + B$ terbatas di atas dan karenanya memiliki supremum.

- Kemudian, sifat supremum sebagai batas atas memberikan $a \leq \sup A, \forall a \in A$ dan $b \leq \sup B, \forall b \in B$. Akibatnya, $\forall a + b \in A + B, a + b \leq \sup A + \sup B$. Jadi, $\sup A + \sup B$ adalah batas atas dari $A + B$.

- Misalkan $r < \sup A + \sup B$ sehingga $x - \sup A < \sup B$.

Menurut Teorema Supremum,

jika $x - \sup A < \sup B$, maka $\exists b_0 \in B \ni b_0 > x - \sup A$

yang ekuivalen dengan $x - b_0 < \sup A$.

Selanjutnya, juga menurut Teorema Supremum,

karena $x - b_0 < \sup A$, maka $\exists a_0 \in A \ni a_0 > x - b_0$

atau $a_0 + b_0 > x$.

Jadi, jika $r < \sup A + \sup B$, maka $\exists a_0 + b_0 \in A + B \ni a_0 + b_0 > x$.

$\therefore \sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

5. Jika $z > 0$, tunjukkanlah terdapat $n \in \mathbf{N}$ sehingga $\frac{1}{2^n} < z$

Jawab.

Karena $z > 0$ dan $\ln 2 \neq 0$, maka $-\frac{\ln z}{\ln 2} \in \mathbf{R}$. Menurut sifat Archimedes, terdapat $n \in \mathbf{N}$, sehingga

$$\begin{aligned} n > -\frac{\ln z}{\ln 2} &\Leftrightarrow n \ln 2 > -\ln z \\ &\Leftrightarrow \ln 2^n > \ln z^{-1} \\ &\Leftrightarrow 2^n > \frac{1}{z} \\ &\Leftrightarrow z > \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

6. Misalkan $a > 0$. Tunjukkan terdapat bilangan real x yang memenuhi $x^2 = a$.

Jawab.

Misalkan $a > 0$. Pertama, kita bentuk himpunan $H = \{h \in \mathbf{R} \mid h^2 < a\}$. Himpunan ini takkosong karena $0 \in H$. Himpunan ini juga terbatas di atas karena terdapat $a + 1 \in \mathbf{R}$ sehingga $\forall h \in H, h < a + 1$ (karena $h^2 < (a + 1)^2$). Akibatnya, menurut Aksioma Kelengkapan, H mempunyai supremum, misalkan $\sup H = x$.

Selanjutnya, klaim $x^2 = a$.

Andaikan $x^2 \neq a$. Ini berarti $x^2 > a$ atau $x^2 < a$. Sekarang, akan kita tunjukkan keduanya tidak mungkin.

(a) Kasus $x^2 > a$.

Pandang $x^2 - a > 0$ sehingga $\frac{x^2 - a}{2x} > 0$ yang mengakibatkan $\frac{2x}{x^2 - a} \in \mathbf{R}$.

Menurut Sifat Archimedes, kita bisa menemukan $n \in \mathbf{N}$ sedemikian sehingga

$$n > \frac{2x}{x^2 - a} \text{ atau } \frac{1}{n} > \frac{-(x^2 - a)}{2x}.$$

Pandang

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{1}{n}\right)^2 &= x^2 - \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2} > x^2 - \frac{2x}{n} = x^2 + 2x \left(\frac{-1}{n}\right) \\ &> x^2 + 2x \left(\frac{-(x^2 - a)}{2x}\right) = x^2 - (x^2 - a) = a. \end{aligned}$$

Jadi, untuk setiap $h \in H$, $h^2 < a < x - \frac{1}{n}$. Ini menunjukkan bahwa $x - \frac{1}{n}$ batas atas H yang jelas lebih kecil dari a . Kontradiksi dengan fakta bahwa $a = \sup H$.

(b) Kasus $x^2 < a$.

Pandang $a - x^2 > 0$ sehingga $\frac{a - x^2}{2x + 1} > 0$ yang mengakibatkan $\frac{2x + 1}{a - x^2} \in \mathbf{R}$.

Menurut Sifat Archimedes, kita bisa menemukan $n \in \mathbf{N}$ sedemikian sehingga

$$n > \frac{2x + 1}{a - x^2} \text{ atau } \frac{1}{n} < \frac{a - x^2}{2x + 1}.$$

Pandang

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{1}{n}\right)^2 &= x^2 + \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2} \leq x^2 + \frac{2x}{n} + \frac{1}{n} = x^2 + \frac{2x + 1}{n} \\ &= x^2 + (2x + 1) \frac{1}{n} < x^2 + (2x + 1) \frac{a - x^2}{2x + 1} = x^2 + (a - x^2) = a. \end{aligned}$$

Ini menunjukkan bahwa $x + \frac{1}{n} \in H$. Kontradiksi dengan fakta bahwa x batas atas H karena $x + \frac{1}{n} > x$.

Jadi, haruslah $x^2 = a$. Akibatnya, terdapat $x = \sqrt{a} \in \mathbf{R}$ dimana $x = \sup H$.

2.5.5 Latihan

1. Tunjukkan bahwa $\sup \left\{ 1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{N} \right\} = 1$.
2. Misalkan $H \subseteq \mathbf{R}$ takkosong. Buktikan bahwa jika ada bilangan a yang memenuhi kedua sifat berikut:

(a) $\forall n \in \mathbf{N}, a - \frac{1}{n}$ bukan batas atas dari H

(b) $\forall n \in \mathbf{N}, a + \frac{1}{n}$ batas atas dari H

maka $a = \sup H$.

3. Misalkan H subhimpunan terbatas di $\mathbf{R}$ dan $c < 0$.
Buktikan bahwa $\sup(cH) = c \inf H$ dan $\inf(cH) = c \sup H$.
4. Misalkan A, B subhimpunan takkosong dari $\mathbf{R}$ yang terbatas di bawah.
Misalkan $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$. Apakah $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$?
5. Misalkan X subhimpunan takkosong di $\mathbf{R}$. Misalkan $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ memiliki jangkauan terbatas di $\mathbf{R}$. Jika $c \in \mathbf{R}$, tunjukkan $\inf\{c + f(x) \mid x \in X\} = c + \inf\{f(x) \mid x \in X\}$
6. Misalkan X subhimpunan takkosong di $\mathbf{R}$. Misalkan $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ dan $g : X \rightarrow \mathbf{R}$ memiliki jangkauan terbatas di $\mathbf{R}$.
Tunjukkan $\sup\{f(x) + g(x) \mid x \in X\} \leq \sup\{f(x) \mid x \in X\} + \sup\{g(x) \mid x \in X\}$
7. Misalkan x sebarang bilangan real. Tunjukkan terdapat bilangan asli n yang memenuhi $e^n > x$.

2.6 Interval dan Desimal

2.6.1 Interval

Sifat urutan dari bilangan real menimbulkan suatu subhimpunan yang disebut interval.

Ada beberapa jenis interval yang akan dijelaskan dalam definisi berikut

Definisi 2.8. (*Interval*)

Misalkan $a, b \in \mathbf{R}$ dan $a \leq b$.

1. **Interval buka** dengan titik ujung a dan b didefinisikan sebagai

$$(a, b) = \{x \in \mathbf{R} | a < x < b\}$$

2. **Interval tutup** dengan titik ujung a dan b didefinisikan sebagai

$$[a, b] = \{x \in \mathbf{R} | a \leq x \leq b\}$$

3. **Interval setengah tutup** atau **setengah buka** dengan titik ujung a dan b bisa didefinisikan sebagai

$$(a, b] = \{x \in \mathbf{R} | a < x \leq b\}$$

atau

$$[a, b) = \{x \in \mathbf{R} | a \leq x < b\}$$

Konsekuensi dari definisi di atas adalah, $(a, a) = \emptyset$ dan $[b, b] = \{b\}$. Selain itu digunakan lambang $-\infty$ atau ∞ untuk menunjukkan interval yang tidak punya titik ujung, seperti

$$[a, \infty) = \{x \in \mathbf{R} | a \leq x\}$$

$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbf{R} | x < b\}$$

$$(-\infty, \infty) = \{x \in \mathbf{R}\} = \mathbf{R}$$

Definisi 2.9. (*Interval Bersarang*)

Barisan interval I_n , $n \in \mathbf{N}$, disebut **interval bersarang** jika

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots \supseteq I_n \supseteq I_{n+1} \supseteq \dots$$

Irisan dari interval bersarang tidak selalu ada, misalnya $\bigcap J_n = \emptyset$ untuk $J_n = (0, \frac{1}{n})$. Tetapi, untuk interval bersarang yang terdiri dari interval-interval tutup, irisannya dijamin tidak kosong sesuai dengan teorema berikut.

Teorema 2.12. Misalkan $I_n = [a_n, b_n]$, $n \in \mathbf{N}$, adalah barisan interval tutup bersarang. Maka, terdapat bilangan real ξ sehingga $\xi \in I_n$ untuk setiap $n \in \mathbf{N}$.

2.6.2 Desimal

Misalkan $x \in [0, 1]$ dan $x = \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \frac{b_3}{10^3} + \frac{b_4}{10^4} + \frac{b_5}{10^5} + \dots + \frac{b_n}{10^n} + \frac{b_{n+1}}{10^{n+1}} + \dots$. Maka $0, b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 \dots b_n b_{n+1} \dots$ disebut **representasi desimal** dari x

Representasi desimal dari setiap bilangan real bersifat tunggal.

2.6.3 Soal yang Diselesaikan

1. Misalkan $S \subset \mathbf{R}$ dan $S \neq \emptyset$. Tunjukkan bahwa

S terbatas jika dan hanya jika terdapat suatu interval tutup $I \subset \mathbf{R} \ni S \subset I$

Jawab.

($\Rightarrow$) Misalkan S terbatas. Menurut aksioma kelengkapan, terdapat bilangan real a dan b sehingga $a = \inf S$ dan $b = \sup S$. Akibatnya, untuk setiap $s \in S$, $a \leq s \leq b$. Jika $I = [a, b]$, maka $S \subset I$.

($\Leftarrow$) Misalkan terdapat interval tutup $I = [a, b]$ sehingga $S \subset I$. Jelas $\forall s \in S$, $s \in I$ atau $a \leq s \leq b$. Ini menunjukkan S terbatas.

2. Misalkan $S \subset \mathbf{R}$ dan $S \neq \emptyset$ dan $I_S := [\inf S, \sup S]$. Tunjukkan $S \subset I_S$. Lebih jauh, jika J sebarang interval tutup yang memenuhi $S \subset J$, maka $I_S \subset J$.

Jawab.

$S \subset I_S$ dapat ditunjukkan seperti soal sebelumnya.

Sekarang, misalkan $S \subset J$. Andaikan $I_S \not\subset J$.

Berarti, terdapat $x \in I_S = [\inf S, \sup S]$, $x \notin J$.

Atau, terdapat x , $\inf S \leq x \leq \sup S$, $x \notin J$.

Atau, terdapat x , $x \in S$, $x \notin J$. Kontradiksi dengan $S \subset J$.

Jadi, pengandaian salah. Haruslah $I_S \subset J$.

3. Misalkan $I_n = [0, \frac{1}{n}]$, $n \in \mathbf{N}$. Tunjukkan bahwa jika $x > 0$, maka $x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$

Jawab.

(versi 1) Misalkan $x > 0$.

Andaikan $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$.

Ini berarti, $x \in I_n = [0, \frac{1}{n}]$, untuk setiap $n \in \mathbf{N}$.

Atau, $x \leq \frac{1}{n}$, untuk setiap $n \in \mathbf{N}$.

Atau, $n \leq \frac{1}{x}$, untuk setiap $n \in \mathbf{N}$.

Kontradiksi, karena menurut sifat Archimedes, terdapat $n_x \in \mathbf{N}$ sedemikian sehingga $n_x > \frac{1}{x}$.

Jadi, pengandaian salah. Haruslah $x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$.

(versi 2) Misalkan $x > 0$ sehingga $\frac{1}{x} \in \mathbf{R}$. Menurut sifat Archimedes, terdapat $n_x \in \mathbf{N}$ sedemikian sehingga $n_x > \frac{1}{x}$ atau $x > \frac{1}{n_x}$. Jadi, $x \notin I_{n_x} = [0, \frac{1}{n_x}]$.

Akibatnya, $x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$.

4. Misalkan $J_n = (0, \frac{1}{n})$, $n \in \mathbf{N}$. Tunjukkan bahwa $\bigcap_{n=1}^{\infty} J_n = \emptyset$

Jawab.

Andaikan $\bigcap_{n=1}^{\infty} J_n \neq \emptyset$. Berarti terdapat $x \in \mathbf{R}$ sehingga $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n$.

Ini berarti $x \in (0, \frac{1}{n})$, untuk setiap $n \in \mathbf{N}$.

Atau, $x < \frac{1}{n}$, untuk setiap $n \in \mathbf{N}$.

Atau, $n < \frac{1}{x}$, untuk setiap $n \in \mathbf{N}$.

Kontradiksi, karena menurut sifat Archimedes, terdapat $n_x \in \mathbf{N}$ sedemikian sehingga $n_x > \frac{1}{x}$.

Jadi, pengandaian salah. Haruslah $\bigcap_{n=1}^{\infty} J_n = \emptyset$.

5. Misalkan $K_n = (n, \infty)$, $n \in \mathbf{N}$. Tunjukkan bahwa $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \emptyset$

Jawab.

Andaikan $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$. Berarti terdapat $x \in \mathbf{R}$ sehingga $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$.

Ini berarti $x \in (n, \infty)$, untuk setiap $n \in \mathbf{N}$.

Atau, $n < x$, untuk setiap $n \in \mathbf{N}$.

Kontradiksi, karena menurut sifat Archimedes, terdapat $n_x \in \mathbf{N}$ sedemikian sehingga $n_x > x$.

Jadi, pengandaian salah. Haruslah $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \emptyset$.

6. Temukan bilangan rasional yang ditampilkan bentuk desimal $1,25137...137...$ dan $37,14653...653...$

Jawab.

- (a) Misalkan $x = 1,25137...137...$

Maka $100x = 125,137...137...$ dan $10^5x = 125.137,137...137...$

Akibatnya, $10^5x - 100x = 125.012$ atau, $99.900x = 125.012$.

$$\text{Jadi, } x = \frac{125.012}{99.900} = \frac{31.253}{24.975}$$

- (b) Misalkan $y = 37,14653...653...$

Maka $100y = 3.714,653...653...$ dan $10^5y = 3.714.653,653...653...$

Akibatnya, $10^5y - 100y = 3.710.939$ atau $99.900y = 3.710.939$.

$$\text{Jadi, } y = \frac{3.710.939}{99.900}$$

2.6.4 Latihan

1. Misalkan $I = [a, b]$ dan $J = [c, d]$. Tunjukkan bahwa:

$I \subseteq J$ jika dan hanya jika $c \leq a$ dan $b \leq d$.

2. Misalkan $I_n = [0, \frac{1}{n})$, $n \in \mathbf{N}$. Tunjukkan bahwa $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{0\}$

3. Misalkan $K_n = (n, \infty)$, $n \in \mathbf{N}$. Tunjukkan bahwa $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \emptyset$

4. Tunjukkan bahwa jika $a_k, b_k \in \{0, 1, \dots, 9\}$ dan jika

$$\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \dots + \frac{a_m}{10^m} = \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \frac{b_3}{10^3} + \dots + \frac{b_n}{10^n} \neq 0$$

maka $m = n$ dan $a_k = b_k$ untuk $k = 1, 2, \dots, n$.

5. Temukan bilangan rasional yang ditampilkan bentuk desimal $26,091390\dots1390\dots$
dan $0,2041979\dots02041979\dots$

Bab 3

Barisan Bilangan Real

3.1 Barisan dan Limitnya

Definisi 3.1. (*Barisan*)

Suatu barisan bilangan real adalah suatu fungsi dari $\mathbf{N}$ ke $\mathbf{R}$.

Dengan demikian, misalkan kita punya barisan X , maka biasanya kita menandai pengaitan dari bilangan asli n ke bilangan real x_n sehingga bisa didefinisikan sebagai

$$X : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$$

$$1 \mapsto x_1$$

$$2 \mapsto x_2$$

...

$$n \mapsto x_n$$

...

Secara umum, $X = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ bisa dituliskan sebagai $X = (x_n)$.

Contoh 3.1. $X = \left(\frac{1}{n}\right) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right)$

Contoh 3.2. $Y = (2n - 1) = (1, 3, 5, 7, \dots)$

Dari barisan yang sudah ada, bisa dibentuk barisan baru dengan melakukan operasi aritmatika atau aljabar pada barisan tersebut seperti didefinisikan berikut

Definisi 3.2. (*Barisan Hasil Operasi*)

Misalkan $X = (x_n)$ dan $Y = (y_n)$ adalah barisan bilangan real. Maka

1. Jumlah/selisih dua barisan tersebut didefinisikan sebagai barisan

$$X \pm Y = (x_n \pm y_n)$$

2. Hasil kali dua barisan tersebut didefinisikan sebagai barisan

$$X \cdot Y = (x_n \cdot y_n)$$

3. Hasil bagi dua barisan didefinisikan sebagai barisan

$$\frac{X}{Y} = \left(\frac{x_n}{y_n} \right)$$

dengan syarat $y_n \neq 0, \forall n \in \mathbf{N}$.

4. Misalkan $c \in \mathbf{R}$, hasil kali barisan dengan c didefinisikan sebagai barisan

$$cX = (cx_n)$$

Contoh 3.3. Misalkan $X = \left(\frac{1}{n} \right)$ dan $Y = (2n)$.

Kita dapat mengoperasikan kedua barisan sehingga diperoleh

1. $X + Y = \left(\frac{1}{n} + 2n \right)$
2. $X \cdot Y = \left(\frac{1}{n} \cdot 2n \right) = (2)$
3. $\frac{X}{Y} = \left(\frac{1/n}{2n} \right) = \left(\frac{1}{2n^2} \right)$
4. $9X = \left(\frac{9}{n} \right)$

3.1.1 Limit Barisan

Mengingat suatu barisan terdiri dari takhingga suku, perlu dipertanyakan apakah suku-suku barisan tersebut menuju suatu titik tertentu (mempunyai limit) ataukah tidak.

Definisi 3.3. (*Limit Barisan*)

Misalkan $X = (x_n)$ barisan bilangan real.

Suatu bilangan real L dikatakan **limit** dari X jika

$$\forall \varepsilon > 0, \exists K(\varepsilon) \in \mathbf{N} \ni \forall n \geq K(\varepsilon), |x(n) - L| < \varepsilon$$

Hal ini menyiratkan bahwa betapapun kecil daerah yang kita ambil di sekitar titik limit, dilambangkan dengan $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, kita akan menemukan takhingga banyaknya suku barisan (x_n) di dalam daerah itu, yaitu mulai suku x_K, x_{K+1}, x_{K+2} , dst. Gambar 3.1 memperlihatkan hal ini.

Gambar 3.1: Ilustrasi suatu barisan konvergen

Jika barisan $X = (x_n)$ **memiliki limit** (misalkan L), maka dikatakan X **konvergen** ke L dan dilambangkan dengan

$$\lim X = L \text{ atau } \lim(x_n) = L \text{ atau } X \rightarrow L$$

yang menyiratkan bahwa x_n akan ”mendekati” L jika n menuju ∞ .

Sebaliknya, jika X **tidak memiliki limit**, maka X dikatakan **divergen**.

Contoh 3.4. Tunjukkan bahwa $\lim \left(\frac{1}{n} \right) = 0$.

Pada Kertas Buram Kita akan mencari $K(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq K(\varepsilon)$

berlaku $\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$. Perhatikan bahwa

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Dari pertidaksamaan terakhir, kita bisa memilih $K(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon}$.

Bukti Aktual Misalkan $\varepsilon > 0$.

Pilih $K(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon}$ sehingga untuk setiap $n \geq K(\varepsilon)$, berlaku

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \left| \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{K(\varepsilon)} < \frac{1}{1/\varepsilon} = \varepsilon$$

Jadi, $\lim \left(\frac{1}{n} \right) = 0$.

Contoh 3.5. Tunjukkan bahwa (n) divergen.

Andaikan (n) memiliki limit (konvergen). Misalkan $\lim (n) = L$. Berarti untuk $\varepsilon = 1$ terdapat $K(\varepsilon)$ sehingga untuk setiap $n \geq K(\varepsilon)$

$$|n - L| < 1$$

atau untuk setiap $n \geq K(\varepsilon)$

$$L - 1 < n < L + 1$$

Perhatikan, untuk $n = 1, \dots, K(\varepsilon) - 1$, $n < K(\varepsilon)$. Sementara untuk $n = K(\varepsilon), K(\varepsilon) + 1, \dots, n < L + 1$. Akibatnya, untuk setiap $n \in \mathbf{N}$, $n < L + 1$. Kontradiksi dengan sifat Archimedes.

Jadi, pengandaian salah. Haruslah (n) divergen.

Limit suatu barisan jika ada, maka limit itu tunggal seperti ditunjukkan teorema berikut

Teorema 3.1. (**Ketunggalan Limit**)

Setiap barisan bilangan real memiliki paling banyak satu limit

Bukti. Misalkan $X = (x_n)$ barisan bilangan real. Misalkan a dan b adalah limit dari X . Maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N_1(\varepsilon)$ sehingga untuk setiap $n \geq N_1(\varepsilon)$ berlaku $|x(n) - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ dan terdapat $N_2(\varepsilon)$ sehingga untuk setiap $n \geq N_2(\varepsilon)$ berlaku $|x(n) - b| < \frac{\varepsilon}{2}$. Misalkan $N = \max\{N_1, N_2\}$. Maka untuk setiap $n \geq N$ berlaku

$$|a - b| = |a - x_n + x_n - b| \leq |a - x_n| + |x_n - b| = |x_n - a| + |x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Karena $\varepsilon > 0$ sebarang, kita simpulkan $|a - b| = 0$ atau $a = b$. ■

3.1.2 Ekor Barisan

Karena perilaku konvergen/divergen menyangkut ujung dari barisan, jika barisan tersebut dibuang bagian awalnya sejumlah m suku, maka perilaku barisan baru tersebut akan tetap sama dengan barisan aslinya.

Definisi 3.4. (*Ekor Barisan*)

Misalkan $X = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ barisan bilangan real. Misalkan m bilangan asli. Maka ekor- m dari barisan X didefinisikan sebagai

$$X_m = (x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_{m+n}, \dots)$$

Contoh 3.6. Ekor-5 dari barisan $X = \left(\frac{1}{n}\right)$ adalah barisan $X_5 = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \dots\right)$

Teorema 3.2. (*Limit Barisan dengan Kondisi Tertentu*)

Misalkan (a_n) dan (x_n) barisan bilangan real. Misalkan juga $L \in \mathbf{R}$.

Jika $\lim(a_n) = 0$ dan terdapat $C > 0$ dan $m \in \mathbf{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq m$,

$$|x_n - L| < C|a_n|$$

maka $\lim(x_n) = L$.

Bukti. Akan ditunjukkan $\lim(x_n) = L$.

Misalkan $\varepsilon > 0$. Karena $\lim(a_n) = 0$ dan $C > 0$, maka terdapat $K \in \mathbf{N}$ sehingga untuk

setiap $n \geq K$,

$$|a_n - 0| = |a_n| < \frac{\varepsilon}{C}$$

Akibatnya, untuk setiap $n \geq K$,

$$|x_n - L| < C|a_n| < C \frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon$$

Ini menunjukkan $\lim(x_n) = L$. ■

3.1.3 Soal yang Diselesaikan

1. Untuk setiap $b \in \mathbf{R}$, buktikan $\lim \left(\frac{b}{n} \right) = 0$

Jawab.

Pada Kertas Buram Kita akan mencari $K(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq$

$K(\varepsilon)$ berlaku $\left| \frac{b}{n} - 0 \right| < \varepsilon$. Perhatikan bahwa

$$\left| \frac{b}{n} - 0 \right| = \frac{|b|}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{|b|}{\varepsilon}$$

Dari pertidaksamaan terakhir, kita bisa memilih $K(\varepsilon) > \frac{|b|}{\varepsilon}$.

Bukti Aktual Misalkan $b \in \mathbf{R}$

Misalkan $\varepsilon > 0$.

Pilih $K(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ sehingga $K(\varepsilon) > \frac{|b|}{\varepsilon}$.

Akibatnya, untuk setiap $n \geq K(\varepsilon)$

$$\left| \frac{b}{n} - 0 \right| = \left| \frac{b}{n} \right| = \frac{|b|}{n} \leq \frac{|b|}{K(\varepsilon)} < \frac{|b|}{|b|/\varepsilon} = \varepsilon$$

Jadi, $\lim \left(\frac{b}{n} \right) = 0$.

2. Tunjukkan $\lim \left(\frac{n^2 - 1}{2n^2 + 3} \right) = \frac{1}{2}$

Jawab.

Pada Kertas Buram Kita akan mencari $K(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq$

$K(\varepsilon)$ berlaku $\left| \frac{n^2-1}{2n^2+3} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$. Perhatikan bahwa

$$\left| \frac{n^2-1}{2n^2+3} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{2n^2-2-2n^2-3}{4n^2+6} \right| = \left| \frac{-5}{4n^2+6} \right| = \frac{5}{4n^2+6} < \frac{5}{4n^2}$$

$$\frac{5}{4n^2} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \sqrt{\frac{5}{4\varepsilon}}$$

Dari pertidaksamaan terakhir, kita bisa memilih $K(\varepsilon) > \sqrt{\frac{5}{4\varepsilon}}$.

Bukti Aktual Misalkan $\varepsilon > 0$.

Pilih $K(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ sehingga $K(\varepsilon) > \sqrt{\frac{5}{4\varepsilon}}$.

Akibatnya, untuk setiap $n \geq K(\varepsilon)$

$$\left| \frac{n^2-1}{2n^2+3} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{2n^2-2-2n^2-3}{4n^2+6} \right| = \left| \frac{-5}{4n^2+6} \right| = \frac{5}{4n^2+6} < \frac{5}{4n^2}$$

$$\leq \frac{5}{4[K(\varepsilon)]^2} < \frac{5}{4\left(\sqrt{\frac{5}{4\varepsilon}}\right)^2} = \frac{5}{5/\varepsilon} = \varepsilon$$

Jadi, $\lim \left(\frac{n^2-1}{2n^2+3} \right) = \frac{1}{2}$.

3. Tunjukkan $\lim \left(\frac{\sqrt{n}}{n+1} \right) = 0$

Jawab.

Misalkan $\varepsilon > 0$.

Pilih $K(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ sehingga $K(\varepsilon) > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}}$.

Akibatnya, untuk setiap $n \geq K(\varepsilon)$

$$\left| \frac{\sqrt{n}}{n+1} - 0 \right| = \frac{\sqrt{n}}{n+1} < \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{K(\varepsilon)}} < \frac{1}{\sqrt{1/\varepsilon^2}} = \varepsilon$$

4. Tunjukkan $\lim(x_n) = 0$ jika dan hanya jika $\lim(|x_n|) = 0$.

Berikan contoh bahwa kekonvergenan ($|x_n|$) tidak menjamin kekonvergenan (x_n).

Jawab.

($\Rightarrow$) Misalkan $\lim(x_n) = 0$

Misalkan $\varepsilon > 0$.

Maka terdapat $K_1 \in \mathbf{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq K_1$

$$|x_n - 0| = |x_n| < \varepsilon$$

atau untuk setiap $n \geq K_1$

$$||x_n| - 0| = ||x_n|| = |x_n| < \varepsilon$$

Jadi, $\lim(|x_n|) = 0$

($\Leftarrow$) Misalkan $\lim(|x_n|) = 0$

Misalkan $\varepsilon > 0$.

Maka terdapat $K_2 \in \mathbf{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq K_2$

$$||x_n| - 0| = ||x_n|| = |x_n| < \varepsilon$$

atau untuk setiap $n \geq K_2$

$$|x_n - 0| = |x_n| < \varepsilon$$

Jadi, $\lim(x_n) = 0$

Contoh kekonvergenan $(|x_n|)$ tidak menjamin kekonvergenan (x_n) .

Misalkan $(x_n) = ((-1)^n)$. $\lim(|x_n|) = \lim(1) = 1$, tetapi $\lim(x_n)$ tidak ada.

5. Misalkan $x_n \geq 0, \forall n \in \mathbf{N}$. Tunjukkan jika $\lim(x_n) = 0$ maka $\lim(\sqrt{x_n}) = 0$.

Jawab.

Misalkan $\lim(x_n) = 0$

Misalkan $\varepsilon > 0$.

Maka terdapat $K \in \mathbf{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq K$

$$|x_n - 0| = |x_n| = x_n < \varepsilon^2$$

Jadi, untuk setiap $n \geq K$

$$|\sqrt{x_n} - 0| = \sqrt{x_n} < \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon$$

sehingga $\lim(\sqrt{x_n}) = 0$

6. Tunjukkan jika $\lim(x_n) = x$ dan $x > 0$, maka terdapat bilangan asli M sehingga untuk setiap $n \geq M$, $x_n > 0$

Jawab.

Karena $\lim(x_n) = x$, berarti untuk $\varepsilon = \frac{x}{2}$ terdapat $M \in \mathbf{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq M$

$$|x_n - x| < \frac{x}{2}$$

atau untuk setiap $n \geq M$

$$-\frac{x}{2} < x_n - x < \frac{x}{2}$$

atau untuk setiap $n \geq M$

$$-\frac{x}{2} + x < x_n$$

atau untuk setiap $n \geq M$

$$0 < \frac{x}{2} < x_n$$

3.1.4 Latihan

1. Tunjukkan $\lim \left(\frac{2n}{n+1} \right) = 2$
2. Tunjukkan $\lim \left(\frac{(-1)^n n}{n^2 + 1} \right) = 0$
3. Misalkan $x_n = \frac{1}{\ln(n+1)}$ untuk setiap $n \in \mathbf{N}$.
 - (a) Tunjukkan $\lim(x_n) = 0$.

(b) Temukan nilai $K(\varepsilon)$ yang sesuai dengan definisi limit untuk $\varepsilon = 1/2$ dan $\varepsilon = 1/6$.

4. Tunjukkan bahwa $\lim \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 0$

5. Tunjukkan $\lim \left(2^{\frac{1}{n}} \right) = 1$

6. Tunjukkan $\lim \left(\frac{1}{3^n} \right) = 0$

3.2 Teorema-teorema Limit

Ada lima teorema yang akan dibicarakan pada bagian ini, yaitu:

1. Teorema Keterbatasan
2. Teorema Limit Barisan Hasil Operasi
3. Teorema Kelestarian Urutan
4. Teorema Prinsip Apit
5. Teorema Uji Kekonvergenan Barisan Taknegatif

3.2.1 Barisan Konvergen selalu Terbatas

Kita awali bagian ini dengan mengenalkan konsep barisan terbatas.

Definisi 3.5. (*Barisan Terbatas*)

Suatu barisan bilangan real $X = (x_n)$ dikatakan **terbatas** jika terdapat $M > 0$, $M \in \mathbf{R}$ sehingga $|x_n| \leq M$ untuk setiap $n \in \mathbf{N}$

Contoh 3.7. $\left(\frac{1}{2^n} \right)$ terbatas karena terdapat $M = 1$ sehingga $\frac{1}{2^n} < 1$ untuk setiap $n \in \mathbf{N}$

Salah satu keistimewaan barisan yang konvergen adalah barisan itu pasti terbatas, seperti ditunjukkan teorema berikut.

Teorema 3.3. (*Keterbatasan*)

Jika X barisan bilangan real yang konvergen, maka X terbatas

Bukti. Misalkan $X = (x_n)$ konvergen dengan $\lim(x_n) = x$. Maka untuk $\varepsilon = 1$, terdapat $K \in \mathbf{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq K$ berlaku $|x_n - x| < 1$. Atau, untuk setiap $n \geq K$ berlaku $|x_n| < |x| + 1$. Pilih $M = \sup\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_K|, |x| + 1\}$. Maka untuk setiap $n \in \mathbf{N}$, berlaku $|x_n| \leq M$ ■

Teorema di atas lebih banyak digunakan dalam bentuk kontraposisinya, yaitu

Lemma 3.1. *Jika barisan X takterbatas, maka X divergen.*

Contoh penggunaan teorema di atas adalah seperti masalah berikut

Contoh 3.8. *Tunjukkan bahwa $\left(\frac{n^2}{n+1}\right)$ divergen.*

Jawab (Dengan bukti taklangsung)

Andaikan $\left(\frac{n^2}{n+1}\right)$ konvergen. Maka, menurut teorema keterbatasan tadi, $\left(\frac{n^2}{n+1}\right)$ terbatas. Hal ini berarti terdapat $M \in \mathbf{R}$ sehingga $\frac{n^2}{n+1} \leq M$ untuk setiap $n \in \mathbf{N}$. Perhatikan bahwa

$$\frac{n^2}{n+n} \leq \frac{n^2}{n+1} \leq M$$

untuk setiap $n \in \mathbf{N}$. Jadi, untuk setiap $n \in \mathbf{N}$

$$\frac{n^2}{2n} = \frac{n}{2} \leq M$$

atau untuk setiap $n \in \mathbf{N}$

$$n \leq 2M$$

Kontradiksi dengan sifat Archimedes. Jadi, pengandaian salah. Haruslah $\left(\frac{n^2}{n+1}\right)$ takterbatas sehingga mengakibatkan barisan ini divergen.

3.2.2 Kekonvergenan Barisan Hasil Operasi Aljabar Dua Barisan

Teorema 3.4. (*Limit Barisan Hasil Operasi*)

Misalkan $X = (x_n)$ dan $Y = (y_n)$ adalah barisan bilangan real yang konvergen dengan $\lim(x_n) = x$ dan $\lim(y_n) = y$. Maka

1. $\lim(x_n \pm y_n) = x \pm y$
2. $\lim(x_n \cdot y_n) = xy$
3. $\lim\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{x}{y}$
dengan syarat $y_n \neq 0, \forall n \in \mathbf{N}$ dan $y \neq 0$.
4. $\lim(cx_n) = cx$

Bukti. Misalkan $\lim(x_n) = x$ dan $\lim(y_n) = y$.

1. Misalkan $\varepsilon > 0$.

Karena $\lim(x_n) = x$, maka $\exists K_1 \in \mathbf{N} \ni \forall n \geq K_1, |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Dan karena $\lim(y_n) = y$, maka $\exists K_2 \in \mathbf{N} \ni \forall n \geq K_2, |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Pilih $K = \max\{K_1, K_2\}$.

Maka, $\forall n \geq K$,

$$|(x_n + y_n) - (x + y)| = |(x_n - x) + (y_n - y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Jadi, $\forall \varepsilon > 0, \exists K \in \mathbf{N} \ni \forall n \geq K, |(x_n + y_n) - (x + y)| < \varepsilon$.

Karena itu, $\lim(x_n + y_n) = x + y$

2. Misalkan $\varepsilon > 0$.

Karena (y_n) konvergen, maka (y_n) terbatas sehingga $\exists M > 0 \ni |y_n| < M, \forall n$.

Selanjutnya, karena $\lim(x_n) = x$, maka $\exists K_1 \in \mathbf{N} \ni \forall n \geq K_1, |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2M}$.

Juga karena $\lim(y_n) = y$, maka $\exists K_2 \in \mathbf{N} \ni \forall n \geq K_2$, berlaku salah satu dari

yang berikut

$$|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2|x|}, \quad x \neq 0$$

$$|y_n - y| < \varepsilon, \quad x = 0$$

Pilih $K = \max\{K_1, K_2\}$.

Maka, $\forall n \geq K$,

$$\begin{aligned} |(x_n \cdot y_n) - (x \cdot y)| &= |(x_n \cdot y_n) - (y_n \cdot x) + (y_n \cdot x) - (x \cdot y)| \\ &= |(x_n - x) \cdot y_n + x \cdot (y_n - y)| \\ &\leq |x_n - x| |y_n| + |x| |y_n - y| \\ &< \frac{\varepsilon}{2M} M + |x| \frac{\varepsilon}{2|x|} = \varepsilon \quad \text{atau} \quad < \frac{\varepsilon}{2M} M + 0 \cdot \varepsilon = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \end{aligned}$$

Jadi, $\forall \varepsilon > 0, \exists K \in \mathbf{N} \ni \forall n \geq K, |(x_n \cdot y_n) - (x \cdot y)| < \varepsilon$.

Karena itu, $\lim(x_n \cdot y_n) = x \cdot y$.

3. Ditinggalkan sebagai latihan.

4. Ditinggalkan sebagai latihan.

■

Contoh penggunaan teorema di atas adalah seperti pada masalah berikut

Contoh 3.9. Tunjukkan $\lim \left(\frac{2n^2 + 3}{n^2 + 1} \right)$ konvergen dan tentukan limitnya.

Jawab.

$$\text{Barisan } \left(\frac{2n^2 + 3}{n^2 + 1} \right) \text{ bisa kita tulis sebagai barisan } \left(\frac{2n^2 + 3}{n^2 + 1} \right) \left(\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} \right) = \left(\frac{2 + \frac{3}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} \right).$$

Kita tahu bahwa (2) dan $\left(\frac{3}{n^2} \right)$ konvergen sehingga $\left(2 + \frac{3}{n^2} \right)$ juga konvergen.

Selanjutnya, (1) dan $\left(\frac{1}{n^2} \right)$ konvergen sehingga $\left(1 + \frac{1}{n^2} \right)$ juga konvergen.

Tambahan lagi, $1 + \frac{1}{n^2} \neq 0 \forall n$ dan limitnya tidak sama dengan 0.

Dengan semua informasi tersebut, kita boleh menggunakan teorema tersebut untuk pembagian dan penjumlahan sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\lim \left(\frac{2n^2 + 3}{n^2 + 1} \right) &= \lim \left(\frac{2 + \frac{3}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} \right) = \frac{\lim 2 + \lim \frac{3}{n^2}}{\lim 1 + \lim \frac{1}{n^2}} \\ &= \frac{2 + 0}{1 + 0} = 2\end{aligned}$$

3.2.3 Kelestarian Urutan

Salah satu karakteristik limit adalah mempertahankan urutan dari barisan, seperti dijelaskan teorema berikut.

Teorema 3.5. (*Kelestarian Urutan*)

Misalkan $X = (x_n)$ dan $Y = (y_n)$ barisan bilangan real yang konvergen. Jika untuk setiap $n \in \mathbf{N}$,

$$x_n \leq y_n,$$

maka berlaku

$$\lim(x_n) \leq \lim(y_n)$$

Bukti. Misalkan X dan Y konvergen dan $\lim(x_n) = x$ dan $\lim(y_n) = y$. Menurut teorema, $X - Y$ konvergen dan $\lim(x_n - y_n) = x - y$. Akan ditunjukkan $x - y \leq 0$ atau dengan kata lain $x \leq y$.

Andaikan $x > y$ atau dengan kata lain $x - y > 0$. Maka untuk $\varepsilon = x - y$, terdapat $K \in \mathbf{N}$ sehingga

$$|(x_n - y_n) - (x - y)| < x - y \quad \forall n \geq K$$

atau

$$(x - y) - (x - y) < x_n - y_n < (x - y) + (x - y) \quad \forall n \geq K$$

Jadi, untuk $n \geq K$

$$0 < x_n - y_n < 2(x - y)$$

atau

$$y_n < x_n$$

Kontradiksi dengan $x_n \leq y_n$ untuk setiap $n \in \mathbf{N}$.

Jadi, pengandaian salah. Harulah $x \leq y$ ■

Akibat 3.1. Misalkan $X = (x_n)$ barisan bilangan real yang konvergen dan jika untuk setiap $n \in \mathbf{N}$,

$$a \leq x_n \leq b$$

maka berlaku

$$a \leq \lim(x_n) \leq b$$

Bukti. Pandang barisan konstan $(a_n) = (a, a, \dots)$ yang tentu saja memiliki limit a . Menurut teorema di atas, karena $a_n \leq x_n$ untuk setiap $n \in \mathbf{N}$, $a \leq \lim(x_n)$. Demikian juga dengan barisan $(b_n) = (b, b, \dots)$ yang memiliki limit b . Menurut teorema, karena $x_n \leq b_n$ untuk setiap $n \in \mathbf{N}$, $\lim(x_n) \leq b$ ■

3.2.4 Prinsip Apit

Teorema 3.6. (*Prinsip Apit*)

Misalkan $X = (x_n)$, $Y = (y_n)$, dan $Z = (z_n)$ barisan bilangan real dimana untuk setiap $n \in \mathbf{N}$,

$$x_n \leq y_n \leq z_n$$

dan $\lim(x_n) = \lim(z_n)$. Maka Y konvergen dan

$$\lim(x_n) = \lim(y_n) = \lim(z_n)$$

Bukti. Misalkan $\lim(x_n) = \lim(z_n) = L$. Akan ditunjukkan $\lim(y_n) = L$. Misalkan $\varepsilon > 0$. Karena $\lim(x_n) = \lim(z_n) = L$, maka terdapat $K \in \mathbf{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq K$

$$|x_n - L| < \varepsilon \quad \text{dan} \quad |z_n - L| < \varepsilon$$

atau untuk setiap $n \geq K$

$$L - \varepsilon < x_n < L + \varepsilon \quad \text{dan} \quad L - \varepsilon < z_n < L + \varepsilon$$

Karena $x_n \leq y_n$ dan $y_n \leq z_n$ untuk setiap $n \in \mathbf{N}$, maka untuk setiap $n \geq K$

$$L - \varepsilon < x_n \leq y_n \quad \text{dan} \quad y_n \leq z_n < L + \varepsilon$$

Jadi, untuk setiap $n \geq K$

$$L - \varepsilon < y_n < L + \varepsilon$$

$$|y_n - L| < \varepsilon$$

sehingga $\lim(y_n) = L$ ■

Contoh penggunaan teorema di atas adalah seperti pada masalah berikut.

Contoh 3.10. Tentukan $\lim \left(\frac{\sin n}{n} \right)$

Jawab.

Kita tahu bahwa $\frac{-1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n} \forall n \in \mathbf{N}$.

Karena $\lim \left(\frac{-1}{n} \right) = 0$ dan $\lim \left(\frac{1}{n} \right) = 0$, maka menurut Teorema Prinsip Apit,
 $\lim \left(\frac{\sin n}{n} \right) = 0$

3.2.5 Kekonvergenan/Kedivergenan Barisan Bilangan Positif

Teorema terakhir yang kita bahas pada bagian ini adalah teorema yang akan membantu kita menguji kekonvergenan barisan bilangan positif.

Teorema 3.7. (*Uji kekonvergenan*)

Misalkan (x_n) barisan bilangan positif dan $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = L$.

1. Jika $L < 1$, maka (x_n) konvergen dan $\lim(x_n) = 0$.
2. Jika $L > 1$, maka (x_n) divergen.

Bukti. Misalkan $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = L$.

1. Karena $L < 1$, maka terdapat r , $L < r < 1$, sehingga $r - L > 0$.

Akibatnya, untuk $\varepsilon = r - L$, terdapat bilangan asli $K(\varepsilon)$ sehingga untuk setiap $n \geq K(\varepsilon)$ berlaku $\left| \frac{x_{n+1}}{x_n} - L \right| < \varepsilon$.

Dengan membuka tanda nilai mutlak, kita peroleh untuk setiap $n \geq K(\varepsilon)$ berlaku

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} < L + \varepsilon = L + (r - L) = r.$$

Dengan demikian, kita peroleh

$$x_{K(\varepsilon)+1} < r x_{K(\varepsilon)}$$

$$x_{K(\varepsilon)+2} < r x_{K(\varepsilon)+1} < r r x_{K(\varepsilon)} = r^2 x_{K(\varepsilon)}$$

...

$$x_{K(\varepsilon)+N} < r^N x_{K(\varepsilon)}$$

...

Dengan mengambil $N = n - K(\varepsilon) + 1$ kita peroleh $x_{n+1} < r^{n-K(\varepsilon)+1} x_{K(\varepsilon)}$. Dan dengan memisalkan $C = r^{K(\varepsilon)} x_{K(\varepsilon)}$, kita peroleh $x_{n+1} < C r^{n+1}$ untuk setiap $n \geq K(\varepsilon)$ atau $x_n < C r^n$ untuk setiap $n \geq K(\varepsilon) + 1$. Karena $0 < r < 1$, maka $\lim(r^n) = 0$. Akibatnya, menurut teorema pada bagian sebelumnya, $\lim(x_n) = 0$.

2. Akan ditunjukkan (x_n) takterbatas.

Karena $L > 1$, maka $\exists r \in \mathbf{R}$ sehingga $1 < r < L$. Perhatikan bahwa $L - r > 0$.

Karena $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = L$, maka $\exists K \in \mathbf{N}$ sehingga $\forall n \geq K$ berlaku $\left| \frac{x_{n+1}}{x_n} - L \right| < L - r$.

Jadi, $\forall n \geq K$,

$$L - (L - r) < \frac{x_{n+1}}{x_n} < L + (L - r)$$

$$r < \frac{x_{n+1}}{x_n} < 2L - r$$

Pandang $\frac{x_{n+1}}{x_n} > r, \forall n \geq K$.

Artinya, $x_{n+1} > rx_n, \forall n \geq K$.

Akibatnya, $x_{n+1} > rx_n > r^2x_{n-1} > \dots > r^{n-K+1}x_K$ sehingga $rx_n > r^{n-K+1}x_K$ yang berakibat $x_n > r^{n-K}x_K$.

Jika dimisalkan $C = r^{-K}x_K$, maka diperoleh $x_n > Cr^n$.

Andaikan (x_n) terbatas.

Maka, $\exists M > 0$ sehingga $Cr^n < x_n < M$. Selanjutnya,

$$Cr^n < M \Leftrightarrow r^n < \frac{M}{C}$$

$$\Leftrightarrow n \ln r < \ln(M/C)$$

$$\Leftrightarrow n < \frac{\ln(M/C)}{\ln r}$$

Kontradiksi dengan Sifat Archimedes.

Jadi, haruslah (x_n) takterbatas sehingga (x_n) divergen.

■

Contoh penggunaan teorema di atas adalah seperti masalah berikut

Contoh 3.11. *Selidiki kekonvergenan barisan berikut.*

1. $\left(\frac{b^n}{2^n}\right)$ dengan $b > 2$

2. $\left(\frac{2^{3n}}{3^{2n}}\right)$

Jawab.

1. Jelas $\frac{b^n}{2^n} > 0, \forall n \in \mathbf{N}$.

$$\lim \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = \lim \left(\frac{b^{n+1} 2^n}{2^{n+1} b^n}\right) = \lim \left(\frac{b}{2}\right) = \frac{b}{2} > 1.$$

Jadi, barisan ini divergen.

2. Jelas $\frac{2^{3n}}{3^{2n}} > 0, \forall n \in \mathbf{N}$.

$$\lim \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right) = \lim \left(\frac{2^{3n+3}}{3^{2n+2}} \frac{3^{2n}}{2^{3n}} \right) = \lim \left(\frac{2^3}{3^2} \right) = \frac{8}{9} < 1.$$

Jadi, barisan ini konvergen dan $\lim \left(\frac{2^{3n}}{3^{2n}} \right) = 0$.

3.2.6 Soal yang Diselesaikan

1. Tentukan apakah barisan berikut konvergen atau divergen

(a) $\left(\frac{n}{n+1} \right)$.

(b) $\left(\frac{n^2}{n+1} \right)$

(c) $\left(\frac{(-1)^n n}{n+1} \right)$.

Jawab.

(a) Barisan $\left(\frac{n}{n+1} \right)$ bisa ditulis sebagai barisan $\left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right)$. Karena barisan

$\left(\frac{1}{n} \right)$ konvergen ke 0 dan barisan (1) konvergen ke 1, maka barisan $\left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right)$

konvergen ke $\frac{1}{1+0} = 1$.

(b) Kita bisa menunjukkan barisan tersebut dengan dua cara, yaitu dengan menunjukkan barisan itu takterbatas dan dengan mengandaikan barisan itu konvergen lalu menghasilkan kontradiksi.

Andaikan $\left(\frac{n^2}{n+1} \right)$ terbatas. Hal ini berarti terdapat $M \in \mathbf{R}$ sehingga $\frac{n^2}{n+1} < M$ untuk setiap $n \in \mathbf{N}$. Perhatikan bahwa

$$\frac{n^2}{n+n} \leq \frac{n^2}{n+1} < M$$

untuk setiap $n \in \mathbf{N}$. Jadi, untuk setiap $n \in \mathbf{N}$

$$\frac{n^2}{2n} = \frac{n}{2} < M$$

atau untuk setiap $n \in \mathbf{N}$

$$n < 2M$$

Kontradiksi dengan sifat Archimedes. Jadi, pengandaian salah. Haruslah $\left(\frac{n^2}{n+1}\right)$ takterbatas sehingga divergen.

(Alternatif jawaban)

Andaikan $\left(\frac{n^2}{n+1}\right)$ konvergen. Karena pada soal sebelumnya barisan $\left(\frac{n}{n+1}\right)$ konvergen, maka menurut teorema limit, $\left(\frac{n^2}{n+1}\right) : \left(\frac{n}{n+1}\right) = (n)$ konvergen. Hal ini merupakan kontradiksi karena (n) divergen. Jadi, haruslah $\left(\frac{n^2}{n+1}\right)$ divergen.

(c) Andaikan $\left(\frac{(-1)^n n}{n+1}\right)$ konvergen. Karena pada soal sebelumnya barisan $\left(\frac{n}{n+1}\right)$ konvergen, maka menurut teorema limit, $\left(\frac{(-1)^n n}{n+1}\right) \left(\frac{n}{n+1}\right) = ((-1)^n)$ konvergen. Hal ini merupakan kontradiksi karena $((-1)^n)$ divergen. Jadi, haruslah $\left(\frac{(-1)^n n}{n+1}\right)$ divergen.

2. Jika barisan X dan $X + Y$ konvergen, tunjukkan barisan Y konvergen.

Jawab.

Tuliskan $Y = (X + Y) - X$. Menurut teorema, karena $X + Y$ dan X konvergen, Y konvergen.

3. Tunjukkan (2^n) divergen.

Jawab.

Akan ditunjukkan (2^n) takterbatas. Andaikan (2^n) terbatas. Berrarti terdapat $M > 0$ sehingga $|2^n| = 2^n < M$ untuk setiap bilangan asli n . Perhatikan bahwa untuk setiap n

$$2^n < M \Leftrightarrow n \ln 2 < \ln M$$

$$n < \frac{\ln M}{\ln 2}$$

Kontradiksi dengan sifat Archimedes. Jadi, haruslah (2^n) takterbatas sehingga barisan ini divergen.

4. Tunjukkan $\lim ((a^n + b^n)^{1/n}) = b$ untuk $0 < a < b$.

Jawab.

Kita tahu bahwa $\forall n \in \mathbf{N}$ berlaku

$$(b^n)^{1/n} \leq (a^n + b^n)^{1/n} \leq (b^n + b^n)^{1/n}$$

$$b \leq (a^n + b^n)^{1/n} \leq (2b^n)^{1/n}$$

$$b \leq (a^n + b^n)^{1/n} \leq 2^{1/n}b$$

Karena $\lim(b) = b$ dan $\lim(2^{1/n}b) = \lim(2^{1/n}) \lim(b) = 1 \cdot b = b$, maka menurut Teorema Prinsip Apit, $\lim ((a^n + b^n)^{1/n}) = b$.

5. Tunjukkan $\lim \left(2^{\frac{1}{n}}\right) = 1$

Jawab.

Karena $2^{\frac{1}{n}} > 1$ untuk setiap $n \in N$, kita bisa menuliskan $2^{\frac{1}{n}} = 1 + C_n$ dimana $C_n > 0$. Hal ini sama dengan menyatakan

$$2 = (1 + C_n)^n$$

Menurut ketaksamaan Bernoulli

$$(1 + C_n)^n > 1 + n \cdot C_n$$

Jadi,

$$2 > 1 + n \cdot C_n$$

atau

$$1 > n \cdot C_n$$

atau

$$C_n < \frac{1}{n}$$

Karena $\lim\left(\frac{1}{n}\right) = 0$, maka diperoleh $\lim(C_n) = 0$ (Berdasarkan pemakaian teorema pada hubungan $C_n = |C_n - 0| < 1 \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$).

Akibatnya, $\lim\left(2^{\frac{1}{n}}\right) = \lim(1) + \lim(C_n) = 1 + 0 = 1$

3.2.7 Latihan

1. Tunjukkan

(a) $\lim\left(\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}\right) = 1$

(b) $\lim\left(\frac{n+1}{n\sqrt{n}}\right) = 0$

(c) $\lim(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$

2. Buktikan bahwa $((-1)^n n^2)$ divergen.

3. Buktikan dengan menggunakan definisi limit bahwa

jika $\lim(x_n) = x$ dan $\lim(y_n) = y$, maka $\lim(cx_n - dy_n) = cx - dy$.

4. Buktikan dengan menggunakan definisi limit bahwa

jika $\lim(x_n) = x$ dan $\lim(y_n) = y$, maka $\lim\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{x}{y}$

dengan syarat $y_n \neq 0, \forall n \in \mathbf{N}$ dan $y \neq 0$.

5. Jika x_n barisan terbatas dan $\lim(y_n) = 0$, tunjukkan $\lim(x_n y_n) = 0$.

Jelaskan kenapa dalam hal ini Teorema Hasil Operasi tidak bisa digunakan.

6. Jika $a, b > 0$, tunjukkan bahwa $\lim\left(\sqrt{(n+a)(n+b)} - n\right) = \frac{a+b}{2}$

7. Tentukan $\lim\left((1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n)^{1/n}\right)$

8. Periksa kekonvergenan barisan berikut.

- (a) $\left(\frac{n^2}{a^n}\right)$ untuk $0 < a < 1$.
- (b) $\left(\frac{n!}{n^n}\right)$
- (c) $\left(\frac{b^n}{n!}\right)$ untuk $b > 1$

3.3 Teorema Kekonvergenan Monoton

Dalam dua seksi sebelumnya, sebagian besar perhatian kita adalah bagaimana membuktikan suatu bilangan adalah limit dari suatu barisan yang diberikan. Pada seksi ini, kita akan mencoba menemukan limit yang tidak diketahui dari suatu barisan monoton.

Definisi 3.6. (*Barisan Monoton*)

Misalkan $X = (x_n)$ adalah barisan bilangan real.

1. X dikatakan **barisan monoton naik** jika
untuk setiap $n \in \mathbf{N}$, berlaku

$$x_n \leq x_{n+1}$$

Jika $x_n < x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbf{N}$, maka X adalah **barisan monoton naik tegas**

2. X dikatakan **barisan monoton turun** jika
untuk setiap $n \in \mathbf{N}$, berlaku

$$x_n \geq x_{n+1}$$

Jika $x_n > x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbf{N}$, maka X adalah **barisan monoton turun tegas**

Contoh 3.12. (*Barisan monoton dan takmonoton*)

- $(1, 2, 3, \dots)$ barisan monoton naik tegas.
- $(a, a, a, \dots)$ adalah barisan monoton naik/turun.
- $\left(\frac{1}{n}\right)$ adalah barisan monoton turun tegas.
- $(-1, 1, -1, 1, \dots)$ adalah barisan takmonoton.

Teorema 3.8. (*Teorema Kekonvergenan Monoton (TKM)*)

Suatu barisan bilangan real yang monoton akan konvergen jika dan hanya jika barisan itu terbatas. Lebih jauh lagi:

1. *Jika $X = (x_n)$ adalah barisan monoton naik yang terbatas, maka*

$$\lim(x_n) = \sup \{x_n \mid n \in \mathbf{N}\}$$

2. *Jika $Y = (y_n)$ adalah barisan monoton turun yang terbatas, maka*

$$\lim(y_n) = \inf \{y_n \mid n \in \mathbf{N}\}$$

Bukti.

- ($\Rightarrow$) Misalkan X adalah barisan bilangan real monoton yang konvergen. Maka, menurut teorema limit, X terbatas.
- ($\Leftarrow$) Misalkan X adalah barisan bilangan real monoton yang terbatas. Maka, X adalah barisan monoton naik atau turun.

1. Kasus X adalah barisan monoton naik yang terbatas.

Karena X terbatas, maka terdapat $M \in \mathbf{R}$ sehingga $x_n \leq M$ untuk setiap $n \in \mathbf{N}$. Menurut Aksioma Kelengkapan, X mempunyai supremum di $\mathbf{R}$. Misalkan supremum tersebut adalah x^* .

Akan diperlihatkan bahwa $\lim(x_n) = x^*$.

Karena $x^* = \sup\{x_n \mid n \in \mathbf{N}\}$, maka untuk $\varepsilon > 0$, $x^* - \varepsilon < x^*$, terdapat x_K sehingga $x_K > x^* - \varepsilon$.

Dan karena X adalah barisan monoton naik, diperoleh $x_n \geq x_K$ untuk setiap $n \geq K$.

Jadi, untuk $\varepsilon > 0$ dan untuk setiap $n \geq K$, diperoleh

$$x^* - \varepsilon < x_K \leq x_n \leq x^* < x^* + \varepsilon$$

$$x^* - \varepsilon < x_n < x^* + \varepsilon$$

$$|x_n - x^*| < \varepsilon$$

Karena $\varepsilon > 0$ adalah sebarang, maka dapat disimpulkan bahwa x_n konvergen ke x^* atau, dengan kata lain, $\lim(x_n) = x^*$.

2. Kasus X adalah barisan monoton turun yang terbatas ditinggalkan sebagai latihan.

■

3.3.1 Soal yang Diselesaikan

1. Misalkan $x_1 = 8$ dan $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + 2$ untuk setiap $n \in \mathbf{N}$.

Tunjukkan bahwa (x_n) adalah barisan monoton dan terbatas, lalu temukan limitnya.

Jawab.

- (a) Sebelum membuktikan (x_n) terbatas, kita dapat menggunakan konsep ekor barisan untuk menduga limitnya jika limit tersebut ada. Jadi, jika limitnya ada, maka

$$\lim(x_n) = \lim(x_{n+1}) = L$$

Selanjutnya, substitusi x_{n+1} dengan $\frac{1}{2}x_n + 2$ untuk memperoleh

$$\lim(x_n) = \lim\left(\frac{1}{2}x_n + 2\right) = \frac{1}{2}\lim(x_n) + 2$$

$$L = \frac{1}{2}L + 2$$

$$\frac{1}{2}L = 2$$

$$L = 4$$

Sekarang, akan kita buktikan $x_n \geq 4$ untuk setiap $n \in \mathbf{N}$ dengan induksi matematika.

Misalkan $P(n) : x_n \geq 4$.

- i. Untuk $n = 1$, diperoleh $x_1 = 8 \geq 4$. Jadi, $P(1)$ benar.
- ii. Misalkan $P(k)$ benar sehingga $x_k \geq 4$. Selanjutnya, kita peroleh

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}x_k + 2 \geq \frac{1}{2}4 + 2 = 4$$

Jadi, jika $P(k)$ benar, maka $P(k+1)$ benar.

Dari (a) dan (b), kita peroleh $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbf{N}$.

Dengan kata lain, $x_n \geq 4$ untuk setiap $n \in \mathbf{N}$.

Ini menunjukkan (x_n) terbatas.

- (b) Selanjutnya, akan kita tunjukkan (x_n) adalah barisan monoton turun juga dengan induksi matematika.

Misalkan $P(n) : x_{n+1} < x_n$.

- i. Untuk $n = 1$, diperoleh $x_2 = \frac{1}{2}x_1 + 2 = 6 < 8 = x_1$. Jadi, $P(1)$ benar.
- ii. Misalkan $P(k)$ benar sehingga $x_{k+1} < x_k$. Selanjutnya, diperoleh

$$x_{k+2} = \frac{1}{2}x_{k+1} + 2 < \frac{1}{2}x_k + 2 = x_{k+1}$$

Jadi, jika $P(k)$ benar, maka $P(k+1)$ benar.

Dari (a) dan (b), kita peroleh $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbf{N}$.

Dengan kata lain, $x_{n+1} < x_n$ untuk setiap $n \in \mathbf{N}$.

Dari (1) dan (2) kita simpulkan (x_n) adalah barisan monoton turun dan terbatas. Akibatnya, barisan ini konvergen dengan limit 4.

2. Misalkan $x_1 > 1$ dan $x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n}$ untuk setiap $n \in \mathbf{N}$.

Tunjukkan bahwa (x_n) adalah barisan monoton dan terbatas, lalu temukan limitnya.

Jawab.

Pertama, kita tidak tahu apakah (x_n) monoton naik atau turun. Jadi, kita duga limitnya jika limit tersebut ada. Misalkan

$$\lim(x_n) = \lim(x_{n+1}) = L$$

Substitusi x_{n+1} dengan $2 - \frac{1}{x_n}$, kita peroleh

$$\lim(x_n) = \lim\left(2 - \frac{1}{x_n}\right) = 2 - \lim\left(\frac{1}{x_n}\right) = 2 - \frac{1}{\lim(x_n)}$$

$$L = 2 - \frac{1}{L}$$

$$L^2 = 2L - 1$$

$$L^2 - 2L + 1 = 0$$

$$(L - 1)^2 = 0$$

$$L = 1$$

Sekarang kita tahu bahwa (x_n) monoton turun dan terbatas di bawah oleh 1.

- (a) Dengan menggunakan induksi matematika akan kita buktikan bahwa $x_n \geq 1$, $\forall n \in \mathbf{N}$.

Misalkan $P(n) : x_n \geq 1$.

- i. Untuk $n = 1$, diperoleh $x_1 > 1$. Jadi, $P(1)$ benar.

ii. Misalkan $P(k)$ benar sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}x_k &\geq 1 \\ \frac{1}{x_k} &\leq 1 \\ -\frac{1}{x_k} &\geq -1\end{aligned}$$

Selanjutnya, dengan menggunakan hasil di atas, diperoleh

$$x_{k+1} = 2 - \frac{1}{x_k} \geq 2 - 1 = 1$$

Jadi, jika $P(k)$ benar, maka $P(k+1)$ benar.

Dari (a) dan (b), kita peroleh $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbf{N}$.

Dengan kata lain, $x_n \geq 1$ untuk setiap $n \in \mathbf{N}$.

(b) Berdasarkan sifat bilangan real, kita tahu bahwa $(x_n - 1)^2 \geq 0, \forall n \in \mathbf{N}$.

Then,

$$x_n^2 - 2x_n + 1 \geq 0$$

$$x_n^2 \geq 2x_n - 1$$

Karena $x_n \geq 1$, kita dapat membagi kedua ruas dengan x_n untuk memperoleh

$$x_n \geq 2 + \frac{1}{x_n}$$

$$x_n \geq x_{n+1}$$

untuk setiap $n \in \mathbf{N}$. Jadi, (x_n) monoton turun.

Dari (1) dan (2), dapat disimpulkan (x_n) adalah barisan monoton turun dan terbatas sehingga barisan ini konvergen dengan $\lim (x_n) = 1$.

3.3.2 Latihan

1. Misalkan $x_1 \geq 2$ dan $x_{n+1} = 1 + \sqrt{x_n - 1}$ untuk setiap $n \in \mathbf{N}$. Tunjukkan bahwa (x_n) adalah barisan monoton turun dan terbatas di bawah oleh 2. Selanjutnya, temukan limitnya.
2. Misalkan $x_1 = 1$ dan $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$ untuk setiap $n \in \mathbf{N}$. Perhatikan bahwa (x_n) konvergen dan tentukan limitnya.
3. Misalkan $x_1 = a > 0$ dan $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$ untuk setiap $n \in \mathbf{N}$. Tentukan apakah (x_n) konvergen atau divergen.
4. Misalkan $x_1 = 2$ dan $x_{n+1} = \sqrt{3 + 2x_n}$ untuk setiap $n \in \mathbf{N}$. Tunjukkan bahwa (x_n) adalah barisan monoton dan terbatas. Selanjutnya, temukan limitnya.
5. Misalkan $x_1 = 2$ dan $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{x_n}$ untuk setiap $n \in \mathbf{N}$. Tunjukkan bahwa (x_n) adalah barisan monoton turun dan terbatas. Selanjutnya, temukan limitnya.

3.4 Subbarisan dan Kriteria Cauchy

3.4.1 Subbarisan

Definisi 3.7. (*Subbarisan*)

Misalkan (x_n) barisan bilangan real.

Barisan (x_{n_k}) disebut subbarisan dari (x_n) jika $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$

Contoh 3.13.

Pada barisan $\left(\frac{1}{n}\right)$, maka $\left(\frac{1}{2n}\right)$, $\left(\frac{1}{3n}\right)$, dan $\left(\frac{1}{2n-1}\right)$ adalah subbarisannya.

Demikian juga $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{13}, \dots\right)$.

Contoh 3.14.

Pada barisan $((-1)^n)$, maka (-1) dan (1) adalah subbarisannya.

Perhatikan bahwa setiap ekor barisan adalah suatu subbarisan, tetapi suatu subbarisan belum tentu suatu ekor barisan.

Teorema 3.9. (*Kekonvergenan Subbarisan*)

Jika $\lim (x_n) = L$, maka $\lim (x_{n_k}) = L$.

Bukti.

Misalkan $\varepsilon > 0$.

Karena $\lim (x_n) = L$, maka $\exists K(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ sehingga $\forall n \geq K(\varepsilon), |x_n - L| < \varepsilon$

Jadi, $\forall n_k \geq K(\varepsilon), |x_{n_k} - L| < \varepsilon$

$\therefore \lim (x_{n_k}) = L$. ■

Teorema di atas dapat dipakai dalam bentuk kontraposisinya, sebagai kriteria divergen.

Akibat 3.2. (*Kriteria Divergen*)

Jika (x_{n_j}) dan (x_{n_k}) memiliki limit berbeda, maka (x_n) divergen.

Contoh 3.15.

Barisan $((-1)^n)$ divergen karena memiliki dua subbarisan (-1) dan (1) dengan limit berbeda.

Contoh 3.16.

Barisan $(\cos n\pi)$ divergen karena $(\cos(2n)\pi)$ dan $(\cos(2n-1)\pi)$ adalah subbarisan dengan limit berbeda.

Teorema 3.10. (*Teorema Bolzano-Weierstrass*)

Setiap barisan terbatas memiliki subbarisan yang konvergen.

Bukti.

Misalkan (x_n) terbatas.

Maka $\{x_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ termuat dalam suatu selang tertutup $I = [a, b]$.

Bagi dua I menjadi dua selang yang sama besar. Salah satu dari kedua selang tersebut

pasti memuat takhingga x_n , namai selang tersebut I_1 .

Pilih n_1 indeks terendah x_n yang termuat dalam I_1 .

Bagidua lagi selang I_1 , namai selang yang memuat takhingga x_n dengan I_2 .

Pilih n_2 indeks terendah x_n yang termuat dalam I_2 .

Lakukan hal ini terus menerus sehingga diperoleh

$$I \supset I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots \text{ dan}$$

$$(x_{n_k}) \text{ dimana } x_{n_k} \in I_k, \forall k$$

Perhatikan bahwa menurut Sifat Interval Bersarang, terdapat $\xi \in I_k, \forall k \in \mathbf{N}$

$$\text{Akibatnya, } |x_{n_k} - \xi| < \frac{b-a}{2^k}$$

$$\text{Karena } \lim \left(\frac{b-a}{2^k} \right) = 0, \text{ maka } \lim (x_{n_k}) = \xi. \blacksquare$$

Contoh 3.17.

Pada barisan $((-1)^n)$ yang terbatas, subbarisan (-1) dan (1) konvergen.

3.4.2 Barisan Cauchy

Dapatkah kita menentukan sebuah barisan konvergen tanpa mengetahui nilai limitnya?

Dalam hal ini, kita mencari suatu sifat intrinsik dari barisan yang ekuivalen dengan kekonvergenan dan tidak menggunakan informasi apapun tentang limit. Sifat intrinsik tersebut bernama Kriteria Cauchy.

Definisi 3.8. (*Barisan Cauchy*)

Barisan bilangan real (x_n) dikatakan **Barisan Cauchy** jika

$$\forall \varepsilon > 0, \exists K(\varepsilon) \in \mathbf{N} \ni \forall m, n \geq K(\varepsilon), |x(m) - x(n)| < \varepsilon$$

Contoh 3.18.

$\left(\frac{1}{n}\right)$ adalah Barisan Cauchy karena

$$\forall \varepsilon > 0, \exists K(\varepsilon) \in \mathbf{N}, K(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon} \ni$$

$$\forall m, n \geq K(\varepsilon), \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right| < \frac{1}{\min\{m, n\}} \leq \frac{1}{K(\varepsilon)} < \frac{1}{1/\varepsilon} = \varepsilon$$

Teorema 3.11. (*Teorema Cauchy*)

Barisan bilangan real (x_n) konvergen jika dan hanya jika (x_n) Barisan Cauchy.

Bukti.

1. ($\Rightarrow$) Misalkan (x_n) konvergen.

Akan ditunjukkan (x_n) Barisan Cauchy.

Misalkan $\varepsilon > 0$.

Karena (x_n) konvergen, misalkan ke L , maka

$$\exists K(\varepsilon) \in \mathbf{N} \text{ sehingga } \forall n \geq K(\varepsilon), |x_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Perhatikan bahwa jika $m, n \geq K(\varepsilon)$,

$$|x_m - x_n| = |x_m - L + L - x_n| \leq |x_m - L| + |x_n - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Jadi, (x_n) Barisan Cauchy

2. ($\Leftarrow$) Misalkan (x_n) Barisan Cauchy.

Pertama, akan ditunjukkan (x_n) terbatas.

Karena (x_n) Barisan Cauchy, maka untuk $\varepsilon = 1$, terdapat $K \in \mathbf{N}$ sehingga untuk setiap $m, n \geq K$ berlaku $|x_m - x_n| < 1$.

Atau, $\forall n \geq K$ berlaku $|x_n - x_{K+1}| < 1$ yang ekuivalen dengan $|x_n| < |x_{K+1}| + 1$.

Pilih $M = \sup\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_K|, |x_K| + 1\}$.

Maka untuk setiap $n \in \mathbf{N}$, berlaku $|x_n| < M$.

Menurut Teorema Bolzano-Weierstrass, karena (x_n) terbatas, maka (x_n) memiliki subbarisan yang konvergen.

Misalkan subbarisan konvergen tersebut (x_{n_k}) dan $\lim(x_{n_k}) = L$.

Akan ditunjukkan $\lim(x_n) = L$.

Misalkan $\varepsilon > 0$.

Karena (x_n) Cauchy dan $\lim(x_{n_k}) = L$, maka

$$\exists K_1(\varepsilon) \in \mathbf{N}, \text{ sehingga } \forall m, n \geq K_1(\varepsilon), |x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\exists K_2(\varepsilon) \in \mathbf{N}, \text{ sehingga } \forall n_k \geq K_2(\varepsilon), |x_{n_k} - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Pilih $K(\varepsilon) = \sup\{K_1(\varepsilon), K_2(\varepsilon)\}$, maka $\forall n_k, n \geq K(\varepsilon)$,

$$|x_n - L| = |x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - L| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Jadi, $\lim(x_n) = L$ sehingga (x_n) konvergen.

■

3.4.3 Soal yang Diselesaikan

1. Dengan menggunakan definisi, tunjukkan $\left(\frac{n+1}{n}\right)$ adalah Barisan Cauchy.

Jawab.

Misalkan $\varepsilon > 0$.

Pilih $K(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon} \ni \forall m, n \geq K(\varepsilon)$,

$$\left| \frac{m+1}{m} - \frac{n+1}{n} \right| = \left| \left(1 + \frac{1}{m}\right) - \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right| = \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right| < \frac{1}{\min\{m, n\}} \leq \frac{1}{K(\varepsilon)} < \frac{1}{1/\varepsilon} = \varepsilon$$

Jadi, $\left(\frac{n+1}{n}\right)$ adalah Barisan Cauchy.

2. Dengan menggunakan definisi, tunjukkan $((-1)^n)$ bukan Barisan Cauchy.

Jawab.

Untuk $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $\forall K(\varepsilon) \in \mathbf{N}$, $\exists m = K(\varepsilon) + 1, n = K(\varepsilon) + 2$ sehingga

$$|(-1)^m - (-1)^n| = |(-1)^{K(\varepsilon)+1} - (-1)^{K(\varepsilon)+2}| = 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

Jadi, $((-1)^n)$ bukan Barisan Cauchy.

3. Misalkan $x_1 < x_2$ adalah sebarang bilangan real dan $x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2}$ untuk $n > 2$. Buktikan bahwa (x_n) konvergen dan tentukan limitnya.

Jawab.

Perhatikan bahwa $|x_3 - x_2| = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)$.

Juga, $|x_4 - x_3| = \frac{1}{2}|x_3 - x_2| = \frac{1}{2^2}(x_2 - x_1)$.

Akibatnya, kita peroleh bentuk umum $|x_{n+1} - x_n| = \frac{1}{2^{n-1}}(x_2 - x_1)$.

Jadi, untuk $\varepsilon > 0$, pilih $K > 1 + \ln_2 \frac{x_2 - x_1}{\varepsilon}$ sehingga $\forall m, n \geq K$,

$$|x_m - x_n| < |x_{n+1} - x_n| = \frac{1}{2^{n-1}}(x_2 - x_1) < \frac{1}{2^{K-1}}(x_2 - x_1) < \frac{1}{\frac{x_2 - x_1}{\varepsilon}}(x_2 - x_1) = \varepsilon.$$

Jadi, (x_n) Barisan Cauchy sehingga konvergen.

Untuk mendapatkan limitnya, perhatikan bahwa:

$$\text{Untuk } n = 3, x_2 - x_3 = x_2 - \frac{x_2 + x_1}{2} = \frac{x_2 - x_1}{2}$$

$$\text{Untuk } n = 4, x_2 - x_4 = x_2 - \frac{x_3 + x_2}{2} = \frac{x_2 - x_3}{2} = \frac{x_2 - x_1}{2^2}$$

$$\text{Jadi, } x_2 - x_n = \frac{x_2 - x_1}{2^{n-2}} \text{ untuk setiap } n > 2.$$

$$\text{Dan, } \lim(x_2 - x_n) = \lim\left(\frac{x_2 - x_1}{2^{n-2}}\right) = 0.$$

$$\text{Akibatnya, } \lim(x_2) = \lim(x_n) \text{ sehingga } \lim(x_n) = x_2.$$

3.4.4 Latihan

1. Tunjukkan barisan $-(1 - (-1)^n + \frac{1}{n})$ dan $(\sin \frac{n\pi}{4})$ divergen.
2. Dengan menggunakan definisi, tunjukkan $(1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!})$ adalah Barisan Cauchy.
3. Dengan menggunakan definisi, tunjukkan $(\ln n)$ dan $(n + \frac{(-1)^n}{n})$ bukan Barisan Cauchy.
4. Jika $0 < b < 1$ dan $|x_{n+1} - x_n| < b^n$ untuk setiap $n \in \mathbf{N}$, tunjukkan (x_n) adalah Barisan Cauchy.
5. Misalkan $z_1 < z_2$ adalah sebarang bilangan real dan $z_n = \frac{2}{3}z_{n-1} + \frac{1}{3}z_{n-2}$ untuk $n > 2$. Buktikan bahwa (z_n) konvergen dan tentukan limitnya.

Referensi

- Bartle, Robert G. and Donald R. Sherbert. (2011). *Introduction to Real Analysis 4th Edition*. John Wiley. New York.
- Bloch, Ethan D. (2011). *The Real Numbers and Real Analysis*. Springer. New York.
- Darmawijaya, Soeparna. (2006). Pengantar Analisis Real. UGM. Yogyakarta.
- Rudin, Walter. (1976). *Principles of Mathematical Analysis 3rd Edition*. Mc-Graw Hill.

Index

himpunan

gabungan