SUDUT ANTARA DUA MATRIKS BERDIMENSI SAMA

Agah D. Garnadi¹

¹Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Institut Pertanian Bogor, Indonesia
e-mail: agahga@apps.ipb.ac.id

Kata Kunci: vektor, matriks, sudut, subruang, aplikasi aljabar linear, text mining

Abstrak. *Dalam text-mining, semisal dalam search engine, konsep dasar Aljabar Linear yaitu sudut, sering digunakan untuk mengukur seberapa dekat vektor pencari relatif terhadap corpus. Berdasarkan konsep dasar aljabar linear tersebut, dengan menggunakan representasi vektor dari Matriks digunakan untuk menghitung sudut antara dua Matriks, sehingga pengertian sudut antara dua vektor yang biasa dapat digunakan, yaitu dengan cara menghitung besarnya sudut yang dibentuk oleh dua vektor menjadi satu cara untuk menghitung sudut dari dua buah Matriks. Dengan memanfaatkan formula sudut antara dua subruang, didapatkan pula sepasang sudut antara dua matriks, memanfaatkan ruang kolom dan ruang baris dari kedua matriks.*

1 PENDAHULUAN

Dalam text-mining, semisal dalam search engine, konsep dasar Aljabar Linear yaitu sudut, sering digunakan untuk mengukur seberapa dekat vektor pencari relatif terhadap corpus [1, 2]. Berdasarkan konsep dasar aljabar linear tersebut, dengan menggunakan representasi vektor dari Matriks digunakan untuk menghitung sudut antara dua Matriks, sehingga pengertian sudut antara dua vektor yang biasa dapat digunakan, yaitu dengan cara menghitung besarnya sudut yang dibentuk oleh dua vektor menjadi satu cara untuk menghitung sudut dari dua buah Matriks. Dengan memanfaatkan formula sudut antara dua subruang, didapatkan pula sepasang sudut antara dua matriks, memanfaatkan ruang kolom dan ruang baris dari kedua matriks.

$A, B \in R^{m,n}$: Matriks berukuran $m \times n$.

2 SUDUT ANTARA DUA MATRIKS

2.1 VEKTORISASI

Sebagai vektor (menjadi vector berukuran $[mn, 1]$):

$$A = [a_1 a_2 \cdots a_n]; B = [b_1 b_2 \cdots b_n]$$

Vektorisasi dengan cara ditumpuk (stacking) :

$$a := [a_1; a_2; \cdots; a_n]; b = [b_1; b_2; \cdots; b_n]; a, b \in R^{m \cdot n}$$

$$\cos^2(\theta) = |a * b|^2 / |a|^2 |b|^2$$

2.2 MATRIKS

[Rumus] Sudut antara dua Subruang ([3],[4])

$(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ adalah ruang hasil kali dalam berdimensi 2 atau lebih, $U = \text{span}\{u_1, u_2, \cdots, u_p\}$ dan $V = \{v_1, v_2, \cdots, v_q\}$ adalah 2 subruang di X dimana $1 \leq p \leq q < \infty$. Asumsikan $u_1, u_2, \cdots, u_p$ dan $v_1, v_2, \cdots, v_q$ adalah ortonormal, maka θ adalah sudut subruang U dan V , yang diberikan sebagai berikut.

$$\cos^2(\theta) = \det(M^T * M)$$

dengan $M := [\langle u_i, v_k \rangle]^T$ adalah matriks berukuran $q \times p$.

- Singular Value Decomposition (Dekomposisi Nilai Singular)[5] :

$$A = U_A D_B V_A^T, U_A \in R^{m,p}, D_A \in R^{p,p}, V_A^T \in R^{p,n},$$

$$B = U_B D_B V_B^T, U_B \in R^{m,q}, D_B \in R^{q,q}, V_B^T \in R^{q,n}$$

dengan U_A, U_B, V_A, V_B merupakan matriks ortonormal.

U_A, U_B secara berturutan merupakan basis ruang kolom dari A dan B . Demikian pula dengan V_A, V_B secara berturutan merupakan basis ruang baris dari A dan B .

- Sudut berdasarkan representasi sudut ruang kolom
Tuliskan:

$$Q_A := U_A, Q_B = U_B.$$

Misalkan $Q_A = [u_1 u_2 \cdots u_p]$ dan $Q_B = [v_1 v_2 \cdots v_q]$. Sudut antara A dan B dapat dihitung :

$$M = [Q_A^T Q_B]^T = Q_B^T Q_A$$

$$\begin{aligned} \cos^2(\theta) &= \det(M^T * M) \\ &= \det([Q_A^T Q_B Q_B^T Q_A]) \end{aligned}$$

Faktorisasi QR dari matriks M :

$$M = Q_M R_M,$$

dengan $Q_M^T Q_M = I$, dan R_M merupakan matriks segitiga atas, maka

$$\begin{aligned} \cos^2(\theta) &= \det(M^T * M) = \det([Q_M R_M]^T [Q_M R_M]) = R_M^T Q_M^T Q_M R_M \\ &= \det(R_M^T R_M) \\ &= \prod_{i=1}^m r_{ii}^2, \quad m = \text{rank of } R_M. \end{aligned}$$

- Sudut berdasarkan representasi ruang baris

Ambil:

$$Q_A := V_A, Q_B = V_B.$$

Misalkan $Q_A = [u_1 u_2 \cdots u_p]$ dan $Q_B = [v_1 v_2 \cdots v_q]$. Sudut antara Q_A dan Q_B dapat dihitung :

$$M = [Q_A^T Q_B]^T = Q_B^T Q_A$$

$$\begin{aligned} \cos^2(\phi) &= \det(M^T * M) \\ &= \det([Q_A^T Q_B Q_B^T Q_A]) \end{aligned}$$

Faktorisasi-QR dari M :

$$M = Q_M R_M,$$

dengan $Q_M^T Q_M = I$, dan R_M merupakan matriks segitiga atas, maka

$$\begin{aligned} \cos^2(\phi) &= \det(M^T * M) = \det([Q_M R_M]^T [Q_M R_M]) = R_M^T Q_M^T Q_M R_M \\ &= \det(R_M^T R_M) \\ &= \prod_{i=1}^m r_{ii}^2, \quad m = \text{rank of } R_M. \end{aligned}$$

- Sudut θ, ϕ , secara berturut-turut disebut *sudut kiri (kolom)* dan *sudut kanan (baris)* antara dua matriks. Selanjutnya, pasang (θ, ϕ) , disebut pasang sudut antara dua matriks.

3 KESIMPULAN

Aplikasi sudut antara dua matriks, dapat digunakan untuk pengukuran menggunakan konsep sudut dalam text-mining, sebagaimana berikut ini :

- Vektor : search engine dan dokumen text mining , lihat [6]
- Matriks : perbandingan dokumen dalam text mining. Pada [7], digunakan sudut antara dua Matriks menggunakan ruang kolom saja.

REFERENCES

- [1] Antonellis, I., Gallopoulos, E., Exploring Term-Document Matrices from Matrix Models in Text Mining. Greece: University of Patras, 2006
- [2] Berry, M.W., Browne, M., Understanding Search Engines: Mathematical Modelling and Text Retrieval. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992
- [3] Gunawan, H., Neswan, O., On Angles Between Subspaces Of Inner Product Spaces. Vol. 11, No. 2. Indonesia: Math. Society (MIHMI), 2005
- [4] Gunawan, H., Neswan, O., Setya-Budhi W. A Formula for Angles Between Two Subspaces of Inner Product Spaces, Beitrge Algebra Geom. Vol. 46(2), 311-320, 2005
- [5] Leon, S.J., Aljabar Linear dan Aplikasinya. Edisi ke-5. A. Bondan, Penerjemah; Erlangga. Terjemahan dari Linear Algebra with Applications, 1998
- [6] Rosliyanti, P.P., Alban, M., Agustian, R., Penerapan Konsep Dasar Aljabar Linear Untuk Menduga Terjadinya Plagiarisme. Makalah PKMI. Dir.Penelitian dan Pengabdian kepada Masyarakat, Depdiknas. Bogor: IPB, 2006
- [7] Prasetyaning Diah R. Lestari, R. Agustian, R. Gafriadi, A.Febriyanti, dan A.D. Garnadi, MODEL VEKTOR DAN MATRIKS DARI DOKUMEN SERTA SUDUT ANTARA DUA VEKTOR DAN DUA SUBRUANG UNTUK MENDUGA DINI PLAGIARISME DOKUMEN, Manuskrip, <https://dx.doi.org/10.31227/osf.io/hmntg>