1 Pemetaan Dirichlet ke Neumann untuk 2 Rangkaian Listrik berbentuk Segi 3 dengan Elemen bernilai Real-Positif

4 A.D. Garnadi¹, M.N. Indro², M.T Julianto¹, A. Pribadi³

¹Departemen Matematika, Institut Pertanian Bogor

²Departemen Fisika, Institut Pertanian Bogor

³STEI, Institut Teknologi Bandung

5 Abstract

6 Dalam tulisan ini dibahas representasi peta Dirichlet ke Neumann dari
7 sebuah rangkaian listrik berbentuk segi dengan elemen rangkaian bernilai
8 real positif. Permasalahan ini berasal dari analogi diskret dari Tomografi
9 Kapasitansi. Secara tidak langsung, analogi diskret terkait dengan ben-
10 tuk hampiran elemen hingga campuran dari permasalahan Tomografi Kap-
11 asitansi.

12 **Keywords:** Rangkaian Listrik, Elemen Diskret,

13 *Plan your flight, and fly according to your plan ...*

14 (A pilot saying)

15 1 Pendahuluan

16 Tomografi Kapasitansi Elektrik (*Electrical Capacitance Tomography* (ECT)) meru-
17 pakan salah satu teknologi pemetaan tak merusak yang menggambarkan distribusi
18 bahan yang di batasi alat dengan cara melakukan pengukuran listrik di batas.
19 Berdasarkan data pengukuran, algoritma rekonstruksi digunakan untuk menge-
20 tahui distribusi impedansi bahan dalam bentuk citra.

Rentang pemakaian ECT sebagai teknik citra tak merusak, cukuplah luas. Dalam bidang biomedis, teknologi ini digunakan sebagai alat monitor klinis dengan kemungkinan aplikasi yang cukup luas[15]. Lebih jauh lagi, dalam industri proses, ERT digunakan sebagai instrumen untuk memonitor peralatan proses yang berbentuk silindris [16].

Meski pun dapat dikatakan sebagai alat yang cukup menjanjikan dan 'murah', untuk menghasilkan distribusi sebagai gambar berdasarkan data yang dikumpulkan melalui algoritma rekonstruksi citra yang andal dan kekar merupakan hal yang tidak mudah.

Metoda Elemen Hingga [12] pada umumnya dijadikan metoda diskretisasi model alat ERT[10], sedangkan varian MEH yang dikenal sebagai metoda campuran, digunakan di [7]. Sementara itu, model analogi mempergunakan rangkaian kapasitor diberikan oleh [6], [11][8], untuk potongan penampang sebagai masalah 2 dimensi, dan [4] untuk masalah 3 dimensi.

2 Rangkaian dengan Elemen bernilai real positif

Misalkan, $\Gamma = (\mathcal{N}, \mathcal{B})$, graph berarah (*digraph*) yang terkait dengan rangkaian listrik, tanpa kehilangan keumuman, anggap Γ graph datar (*planar digraph*). Sebut $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \dots, b_E\}$ menyatakan himpunan cabang berarah (*directed branches/edges*), berkait dengan himpunan elemen $\{c_1, c_2, \dots, c_E\}$ dengan $\text{Re}(c_j) > 0$, $\mathcal{N} = \{n_1, n_2, \dots, n_I, n_{I+1}, n_{I+2}, \dots\}$ menyatakan himpunan simpul (*nodes*), berkait dengan himpunan tegangan, I menyatakan jumlah simpul dalam, dan β menyatakan jumlah simpul di batas, dengan $n_N = I + \beta$. Terkait dengan rangkaian tersebut, misalkan $A_0 \in (\{-1, 0, 1\})^{E \times n_N}$ merupakan matriks *insidensi* dari topologi rangkaian listrik¹.

Dengan menerapkan hukum-hukum listrik pada cabang dan simpul, akan kita peroleh hasil sebagai berikut ini.

Dengan menggunakan Hukum Ohm di cabang, berlaku :

$$\begin{aligned} \epsilon_j + (\Delta V)_j &= i_j c_j; \\ (v_j - v_l) &= i_j c_j; j = 1, \dots, E \quad (\text{TANPA sumber tegangan}) \\ i_j c_j - (v_j - v_l) &= 0; j = 1, \dots, E \end{aligned} \quad (1)$$

serta Hukum Kirchoff di simpul :

$$\sum_{k \in \mathcal{B}} a_{k\ell} i_k = 0, \quad \forall \ell \in \mathcal{N}. \quad (2)$$

¹Istilah matriks insidensi disajikan agak berbeda dari satu buku ke buku yang lain, meski pun secara esensial identik [2][5][17], di sini kita gunakan representasi di [17], sementara di buku yang lain, transposisinya yang disebut sebagai matriks insidensi.

48 Tuliskan :

$$\mathbf{j} = [i_1 i_2 \cdots i_E]^t; \quad \mathbf{v} = [v_1 v_2 \cdots v_I v_{I+1} \cdots v_{I+\beta}]^t.$$

49 Dengan anggapan bahwa elektroda terakhir di bumikan, dan penomoran simpul
50 dilakukan sedemikian rupa sehingga nomor simpulnya merupakan nomor buntut.
51 Maka, kolom terakhir dari matriks *insidensi* akan dibuang [17]. Tuliskan A sebagai
52 matriks dari A_0 setelah kolom terakhirnya dibuang, tanpa kehilangan keumuman,
53 A kita sebut matriks insidensi.

54

55 Maka dari (1) dan (2) akan diperoleh sebuah sistem persamaan linear berikut :

$$\begin{pmatrix} C & A \\ A^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{j} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{q} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

56 dengan $C = \text{diag}(c_1, \dots, c_E)$, dan A matriks insidensi.

57 Akibat pengurutan nomor simpul dengan menomori terlebih dulu simpul di
58 bagian dalam, kemudian mengikuti terkemudian simpul pada batas, kita peroleh
59 partisi matriks sebagaimana berikut ini :

$$A = (A_I | A_\beta); \quad A_I \in (\{-1, 0, 1\})^{E \times I}, A_\beta \in (\{-1, 0, 1\})^{E \times \beta},$$

60 maka persamaan (3) dapat dituliskan dalam bentuk partisi :

$$\begin{pmatrix} C & [A_I A_\beta] \\ \begin{bmatrix} A_I^t \\ A_\beta^t \end{bmatrix} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{j} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{q} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

61 Bila input diberikan dalam bentuk arus pasangan dipol pada batas :

$$\mathbf{q}_\beta = \begin{cases} \pm 1; j \neq k & \text{sepasang node di batas} \\ 0 & \text{lainnya.} \end{cases}$$

62 Apabila dilakukan pengukuran dari batas sebanyak m kali pengukuran dengan
63 input arus pasangan dipol yang semuanya berbeda, kita peroleh sebuah persamaan
64 matriks :

$$K[a_1 \cdots a_m] = [b_1 \cdots b_m]$$

65 dengan K merupakan matriks sisi kiri di (4), dan kolom di ruas kanan berasal dari
66 eksitasi arus input.

3 Pemetaan Tegangan ke Arus di Batas (*Dirichlet to Neumann Map*, Λ_γ) dari Rangkaian Bujur Sangkar (*Square Network*).

Dalam bagian ini, akan ditinjau kasus khusus rangkaian kapasitor di bidang. Untuk setiap bilangan bulat positif n , sebuah jala kapasitor Ω_h dibangun dengan cara sebagai berikut. Simpul (*nodes*) dari Ω_h ialah titik kisi di bidang $p = (i, j)$ dengan $0 \leq i \leq n+1$ dan $0 \leq j \leq n+1$, dengan tidak mengikutkan titik di sudut $(0, 0), (n+1, 0), (0, n+1), (n+1, n+1)$. Titik simpul dari Ω_h kita notasikan dengan Ω_0 . *Interior* dari Ω_0 , sebut $\text{int}(\Omega_0)$, terdiri dari titik simpul $p = (i, j)$ dengan $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq n$. *Batas* dari Ω_0 , sebut $\partial\Omega_0$, ialah $\Omega_0 \setminus \text{int}(\Omega_0)$. Setiap titik interior p memiliki 4 simpul tetangga, masing-masing bertempat di satu kisi terdekat di atas, kanan, bawah, dan kiri; himpunan tetangga dari simpul p , kita tuliskan $\mathcal{N}(p)$. Setiap simpul dalam p , $p \in \text{int}(\Omega_0)$, memiliki sifat semua simpul tetangganya merupakan simpul dalam, $\mathcal{N}(p) \subset \text{int}(\Omega_0)$. Setiap titik p di batas, hanya tepat memiliki satu tetangga, tepatnya satu simpul dalam berada pada jarak satu kisi. Satu *edge*(sisi) (p, q) di Ω , dengan p dan q di $\text{int}(\Omega_0)$ yang berjarak satu unit kisi, atau simpul batas p dengan tetangganya q yang merupakan titik dalam. Himpunan *edge* disimbolkan dengan Ω_1 . Suatu sisi (p, q) dengan p titik batas dan q merupakan titik dalam, disebut *edge* batas.

Dengan melakukan eliminasi variabel $\mathbf{j}$ di persamaan (3) kita dapatkan :

$$A^t C^{-1} A \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{q}_\beta \end{pmatrix}$$

Akibat partisi yang diinduksi oleh penomoran simpul, maka akan kita peroleh pemetaan dari tegangan ke arus di batas (*Dirichlet to Neumann map*) dari rangkaian listrik :[11]

$$\mathbf{q}_\beta = \underbrace{[A_\beta^t \cdot C^{-1} \cdot A_\beta - A_\beta^t \cdot C^{-1} \cdot A_I (A_I^t \cdot C^{-1} \cdot A_I)^{-1} A_I^t \cdot C^{-1} \cdot A_\beta]}_{\Lambda_\gamma} \mathbf{v}_\beta .$$

Sebaliknya pula, kita dapatkan peta input arus ke tegangan di batas (*Neumann to Dirichlet map*) :

$$\mathbf{v}_\beta = \Lambda_\gamma^\dagger \mathbf{q}_\beta,$$

dengan $[\cdot]^\dagger$ menyatakan invers Moore-Penrose dari $[\cdot]$.

Kedua peta ini mengungkapkan pada kita, bahwa tegangan pada bata selalu dapat diperoleh untuk setiap arus yang menjadi input di batas, demikian pula sebaliknya. Curtis & Morrow [3], membahas sifat-sifat Λ_γ untuk rangkaian bujur sangkar.

4 Hubungan rangkaian kapasitor dan Diskretisasi Elemen Hingga Campuran.

Perhatikan analogi sebagaimana diperlihatkan di tabel berikut :

Rangkaian Listrik	Elemen Hingga Campuran
simpul	Elemen
edge	edge Elemen

Dengan pemilihan basis elemen hingga Raviart-Thomas orde terkecil untuk aproksimasi Elemen Hingga, analogi di atas akan menghasilkan struktur matriks yang serupa manakal koefisien bernilai kompleks real-positif, bandingkan dengan hasil di [9] untuk elemen bernilai positif. Sejalan dengan pemikiran di atas, akan diperoleh pula pemetaan Λ_γ dan $\Lambda_\gamma^\dagger$ hasil diskretisasi elemen hingga yang serupa.

Ucapan Terima Kasih

Pekerjaan ini didanai oleh Kemenristekdikti melalui skim PUPT-IPB dengan kontrak nomor 079/SP2H/LT/DRPM/II/2016.

References

- [1] Pribadi, A., Garnadi, A.D., Indro, M.N. and Julianto, M.T., ‘Phantom Virtual’Berbasis Rangkaian Kapasitor untuk Electrical Capacitance Tomography, Prosiding Seminar ???.
- [2] N.L. Biggs, Algebraic Graph Theory, Oxford University Press.
- [3] E.B. Curtis & J.A. Morrow, The Dirichlet to Neumann Map for a Kapasitor Network, SIAM J.Appl.Math., **50**(1991), 1011-1029.
- [4] A. R. Daniels, R. G. Green, & Basarab-Horwath, Modelling of three dimensional resistive discontinuities using HSPICE, Meas. Sci. Tech., **v 7**, 338-442
- [5] N. Deo, Graph Theory and its Applications, Prentice-Hall India.
- [6] K. A. Dines & R. J. Lyttle, 1981, Analysis of electrical conductivity imaging, Geophysics, **v 46**, 1025-1036
- [7] A. D. Garnadi, 1997, Electrical Impedance Tomography Based on Mixed Finite Element Model, Proceedings CMSE97, IV.C.6-1-IV.C.6-7

- 123 [8] A. D. Garnadi, 2004, Discrete Resistance Tomography, Proc. HPA, Yo-
124 gyakarta.
- 125 [9] A. D. Garnadi, 2004, Mixed Finite Element formulation of Forward Problem
126 of EIT on Quadrilateral, Manuscript.
- 127 [10] P. Hua & E. J. Woo, 1990, Reconstruction Algorithms, in [18], 97-137
- 128 [11] M. A. Hussain, B. Noble, & B. Becker, 1989, Computer simulation of an
129 Inverse Problem for Electric Current Tomography using A Uniform Triangular
130 Discretization, IEEE Eng. Med. Biol. Soc. 11th Ann. Int. Conf., 448-450
- 131 [12] C. Johnson, 1990, Numerical Solution of Partial Differential Equations by the
132 Finite Element Method, Cambridge University Press
- 133 [13] W. R. B. Lionheart, S. B. Arridge, M. Schweizer, M. Vauhkonen, & J. P. Kai-
134 pio, **Electrical Impedance and Diffuse Optical Tomography Reconstruction**
135 **Software**, 1st World Congress in Industrial Process Tomography, Buxton,
136 Greater Manchester, April 14-17, 1999
- 137 [14] T. Murai & Y. Kagawa, 1985, Electrical Impedance Tomography Based on a
138 Finite Element Model, IEEE Trans. Biomed. Eng., v BME-32, 177-184
- 139 [15] J. C. Newell, 1996, State of the art in Impedance Imaging, Lecture Notes
140 distributed at College on medical Physics : Methods, Instrumentation and
141 Techniques in Medical Imaging, 9-27 September 1996, ICTP, Trieste
- 142 [16] A. Plaskowski, M. S. Beck, R. Thorn, & T. Dyakowski, 1995, Imaging Indus-
143 trial Flows: Applications of electrical process, Institute of Physics Publishing
- 144 [17] G. Strang, 1986, Introduction to Applied Mathematics, Wellesley-Cambridge
145 Press
- 146 [18] J. G. Webster (ed), 1990, Electrical Impedance Tomography, Adam Hilger
- 147 [19] T. J. Yorkey, 1990, Electrical impedance tomography with piecewise polyno-
148 mial conductivities, J. Comp. Phys., **91**, 344-360