METODE ELEMEN HINGGA RANAH
FREKUENSI
UNTUK
SIMULASI PANDU GELOMBANG DALAM
MATLAB/OCTAVE

A.D. Garnadi
H. Alatas
S. Nurdianti
L. Yuliawati

Pendamping: Dr. Diah Chaerani (Dept. Matematika UNPAD)

PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL,
ANALITIK DAN METODE ELEMEN HINGGA,
SERTA APLIKASINYA

ITB Press

2019

A.D. Garnadi^{a,2,†}, H. Alatas^{a,1}, S. Nurdiati², L. Yuliawati^{a,3}

^aResearch Cluster for Dynamics and Complex System,
FMIPA, Institut Pertanian Bogor,

¹Dept. Fisika, Institut Pertanian Bogor,

²Dept. Matematika, Institut Pertanian Bogor

Jl. Meranti, Kampus IPB Darmaga, Bogor 16680

³ STKIP Sebelas April Sumedang , Sumedang

[†] Penulis Utama

Judul Buku:

METODE ELEMEN HINGGA RANAH FREKUENSI UNTUK SIMULASI
PANDU GELOMBANG DALAM MATLAB/OCTAVE

Penulis:

Drs Agah Garnadi, GradDipSci (ANU)
Prof. Dr. Husin Alatas, MSi
Dr. Sri Nurdianti, MSc
Dr. Lia Yuliawati, MSi

Desain Sampul & Penata Isi: -

Korektur : -

Jumlah Halaman:

100 halaman + 10

Edisi/Cetakan:

Cetakan Pertama, ----- 2019

Gd. Perpustakaan Pusat, Lt. Basemen
Jl. Ganesha 10 Bandung 40132
Jawa Barat, Indonesia
+62 22 2504257; +62 22 2534155
office@itbpress.itb.ac.id
www.itbpress.itb.ac.id

ISBN : 978-623-7165-90-3

PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL,
ANALITIK DAN METODE ELEMEN HINGGA, SERTA APLIKASINYA

METODE ELEMEN HINGGA RANAH FREKUENSI
UNTUK
SIMULASI PANDU GELOMBANG DALAM MATLAB/OCTAVE

ISBN : 978-623-7165-90-3
e-Book DOI :10.31227/osf.io/96ksb

Blank

Daftar Isi

1	PERSAMAAN HELMHOLTZ	1
1.1	Persamaan Helmholtz dalam Elektro-Magnetik	2
2	Metode Elemen Hingga Ranah Frekuensi : Hampiran Galerkin	6
3	LATIHAN	27
3.1	Latihan 1. Pandu Gelombang Dua Lapis	28
3.2	Latihan 2. Test Dengan Solusi.	30
3.3	Latihan 3. Geometri Bahan Berbeda.	31
3.4	Latihan 4. Perambatan Gelombang Dalam Ruang Akibat Sum- ber WiFi.	32
3.5	Latihan 5. Syarat Batas Serap	33
3.6	Latihan 6. Geometri Cincin	34
3.7	Latihan 7. Tomografi Microwave Memanjang	35
3.8	Latihan 8. Tomografi Microwave Melintang	37
3.9	Latihan 9. Biosensor Bakteri Berlapis.	38
3.10	Latihan 10. Biosensor Resonator Cincin.	39
3.11	Latihan 11. Biosensor Sisir/bergerigi Plasmonik	40
3.12	Latihan 12. Biosensor Plasmonik Berceruk Dalam.	41
3.13	Latihan 13. SPR (<i>Surface Plasmon Resonance</i>) Sensor.	42
3.14	Latihan 14. Sel Surya Plasmonik.	43
3.15	Latihan 15. Sel Surya Plasmonik dengan PML.	44
3.16	Latihan 16. Alat uji NDT (<i>Non Destructive Testing</i>) pada ge- lombang THz.	45
3.17	Latihan 17. Nanowire.	47
3.18	Latihan 18. Antena Nano	48
3.19	Latihan 19. Antena Nano Pemanen Energi Surya.	49
3.20	Latihan 20. Antena Nano Asimetrik.	50
4	Penutup	51
5	OCTAVE SINGKAT*	55

PRAKATA

Buku cilik (buklik)/buklet ini, merupakan sebuah tutorial bagaimana mengimplementasikan metode elemen hingga berdasarkan metode Galerkin untuk menyelesaikan persamaan Helmholtz, atau lebih dikenal sebagai Metode Elemen Hingga Ranah Frekuensi. Persamaan Helmholtz merupakan model dari persamaan gelombang skalar, yang muncul dari sejumlah fenomena fisis. Misalnya dalam Elektromagnetika untuk memperoleh informasi perilaku pandu gelombang (*waveguide*), persamaan Helmholtz perlu diselesaikan secara numerik, mengingat bentuk geometrik bahan penyusun menyebabkan solusi analitik sulit didapat. Persamaan gelombang skalar untuk pandu gelombang isotropik homogen digunakan untuk memperkenalkan metode elemen hingga (MEH). Untuk lebih sederhananya, digunakan elemen segitiga orde pertama.

Tulisan ini menunjukkan bagaimana pengetahuan tentang metode elemen hingga (*Finite Element Method, FEM*) dapat dipelajari dalam waktu singkat dengan menggunakan MATLAB/OCTAVE. Hal ini menunjukkan bagaimana pengetahuan yang diperoleh dapat diperluas untuk masalah elektromagnetik lainnya.

Berbagai studi kasus diberikan sebagai latihan. Studi kasus yang diberikan, berasal dari bidang yang berkaitan dengan aplikasi fisika terkait bidang hayati yang menjadi misi utama yang diemban penulis. Bahkan beberapa studi kasus dirancang agar dapat digunakan untuk membantu penelitian mahasiswa S1/S2/S3, serta untuk penelitian yang sifatnya garda depan (*research frontier*) dalam bidang Komputasi Fisika, Komputasi Matematika, maupun Komputasi Elektromagnetika.

Terima kasih kepada saudara Teguh Pujanegara, atas bantuannya menyadur rutin `distmesh`. Juga kepada Dr. Diah Chaerani, dari Universitas Padjadjaran atas masukannya.

Penulisan buklik ini merupakan output skim Penelitian Strategis Unggulan, hibah DIPA-IPB, 0558/023-04.2.01/12/2012, yang didanai oleh Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan, Republik Indonesia, dengan kontrak no : 44/I3.24.4/SPK-PUS/IPB/2012. Juga merupakan output hasil penelitian kerjasama lintas disiplin dalam bingkai *Research Cluster for Dynamics and Complex System* di FMIPA-Institut Pertanian Bogor.

Buklik ini merupakan buku kedua dari seri : PERSAMAAN DIFERENSIAL
PARSIAL, ANALITIK DAN METODE ELEMEN HINGGA, SERTA APLIKA-
SINYA.

BOGOR, 31 Agustus 2019

Program Hibah Penulisan Buku

Tahun 2019

Direktorat Pengelolaan Kekayaan Intelektual
Direktorat Jenderal Penguatan Riset dan Pengembangan
Kementrian Riset, Teknologi Dan Pendidikan Tinggi
Republik Indonesia

PENDAHULUAN

Buklik (buku cilik) ini, dapat dipandang sebagai sebuah tutorial bagaimana mengimplementasikan metode elemen hingga berdasarkan metode Galerkin untuk menyelesaikan persamaan Helmholtz, atau lebih dikenal sebagai Metode Elemen Hingga Ranah Frekuensi. Persamaan Helmholtz merupakan model dari persamaan gelombang skalar, yang muncul dari sejumlah fenomena fisis. Misalnya dalam Elektromagnetika untuk memperoleh informasi perilaku pandu gelombang (*waveguide*), persamaan Helmholtz perlu diselesaikan secara numerik, mengingat bentuk geometrik bahan penyusun menyebabkan solusi analitik sulit didapat. Persamaan gelombang skalar untuk *waveguide* isotropik homogen digunakan untuk memperkenalkan metode elemen hingga (MEH). Untuk lebih sederhananya, digunakan elemen segitiga orde pertama. Tulisan ini menunjukkan bagaimana pengetahuan tentang metode elemen hingga (*Finite Element Method*, FEM) dapat dipelajari dalam waktu singkat dengan menggunakan MATLAB/OCTAVE. Hal ini menunjukkan bagaimana pengetahuan yang diperoleh dapat diperluas untuk masalah elektromagnetik lainnya.

Berbagai studi kasus diberikan sebagai latihan. Bahkan beberapa studi kasus dirancang agar dapat digunakan untuk membantu penelitian mahasiswa S1/S2/S3, serta untuk penelitian yang sifatnya garda depan (*research frontier*) dalam Komputasi Fisika, Komputasi Matematika, maupun Komputasi Elektromagnetik. Studi kasus yang diberikan, berasal dari beberapa bidang yang berkaitan dengan aplikasi terkait bidang hayati yang menjadi misi utama keilmuan yang diemban penulis.

1 Bab 1

2 PERSAMAAN 3 HELMHOLTZ

4 Ketersediaan daya komputasi yang besar dan murah menggunakan komputer
5 desktop atau laptop menjadikan solusi numerik dari permasalahan elektromag-
6 netik menjadi hal yang layak, bahkan bagi mahasiswa sarjana sekalipun. Di ka-
7 langan pendidik telah diambil dua pendekatan: menggunakan perangkat lunak
8 yang tersedia secara komersial [16] (yang mungkin menjadi pilihan yang mahal),
9 atau desain antarmuka pengguna dan kode simulasi [21, 22] berdasarkan paket
10 matematis terprogram. Kedua pendekatan ini bukan merupakan obyek dari tu-
11 lisan ini. Tujuan dari tulisan ini adalah memperkenalkan metode elemen hingga
12 ranah frekuensi untuk persamaan Helmholtz melalui MATLAB/OCTAVE dan
13 menyelesaikan permasalahan elektromagnetik. MATLAB telah digunakan di
14 seluruh dunia dalam pengajaran banyak mata kuliah rekayasa, misalnya, pem-
15 rosesan sinyal dan teknik kontrol. Ini tidak akan mudah bagi para pengajar
16 dalam bidang elektromagnetik untuk mengharapkan siswa untuk memiliki pe-
17 ngetahuan dan akses menggunakan MATLAB, alternatifnya dapat digunakan
18 OCTAVE yang merupakan freeware yang menerima skrip MATLAB. Metode
19 Elemen Hingga (FEM) adalah teknik yang relatif mapan dalam elektromagne-
20 tik dan masih merupakan area penelitian yang cukup aktif. Hal ini didukung
21 oleh beberapa buku teks dan monograf yang cukup baik tersedia. Tetapi, bahan
22 tersebut hanya cocok bagi para peneliti atau untuk perkuliahan khusus. Selain
23 itu, buku teks tersebut sangat menekankan dasar matematika yang ketat dari
24 berbagai formulasi berbagai FEM. Sebuah pendekatan praktis untuk penurunan
25 dari FEM dan pelaksanaannya diberikan pada pustaka [14]. Pada tulisan ini
26 diberikan uraian FEM yang singkat dan mudah dipahami melalui MATLAB,
27 mengingat MATLAB menyediakan fasilitas untuk operasi matriks dan aloka-
28 si memori yang dinamis. Materi utama terkait FEM dalam tulisan ini dapat
29 dibahas dalam kuliah selama dua-empat jam. Mahasiswa mungkin diberikan
30 kesempatan selama dua minggu untuk menyerap materi dan mengerjakan tu-
31 gas berupa rangkaian tugas berdasarkan serangkaian latihan yang didaftarkan

dalam tulisan ini. Perlu dicatat bahwa setidaknya satu paket perangkat lunak FEM komersial, yaitu FEMLAB dari COMSOL Inc, [10] memiliki versi sebagai add-on untuk MATLAB. Paket ini tidak cocok untuk mengajar pemrograman FEM. Namun, seperti yang digambarkan dalam rujukan [27], mahasiswa dapat menggunakan software ini untuk menguji formulasi variational yang diperoleh oleh mereka, mengingat perangkat lunak menerima bentuk formulasi variasional sebagai input. Dengan demikian, [27] dan tulisan ini saling melengkapi jika FEMLAB tersedia.

Buklik ini melengkapi komputasi Elektromagnetik berbahasa Indonesia untuk Metoda Beda Hingga Kawasan Waktu (*Finite Difference Time Domain*, FDTD) [25]) dan Metode Momen (*Methods of Moment*, MoM) yang populer di bidang antena [26].

1.1 Persamaan Helmholtz dalam Elektro-Magnetik

Pandu gelombang (*Waveguide*) memainkan peranan penting dalam perambatan gelombang ber-frekuensi tinggi. Secara umum, pemodelan waveguide dimulai dari persamaan Maxwell kemudian menjadi persamaan Helmholtz. Dengan kata lain, dasar analisa perambatan gelombang di waveguide secara umum adalah persamaan Maxwell. Dengan menggunakan hukum Ampere dan hukum Faraday akan dijelaskan penurunan persamaan Maxwell.

Pada tahun 1820 Ampere telah menurunkan hubungan arus listrik dan medan magnet dalam bentuk persamaan matematika. Hukum integral keliling Ampere menyatakan bahwa bila garis tertutup C mengelilingi kabel lurus I yang dialiri listrik, maka besaran integral tertutup sepanjang garis tertutup C untuk medan magnet H yang ditimbulkan oleh I adalah sama dengan besarnya arus listrik tersebut. Integral tertutup medan listrik dinyatakan sebagai jumlah keseluruhan garis tertutup C yang terbagi pada bagian kecil dl dikalikan dengan medan listrik sejajar dl .

$$\oint_C H \bullet dl = I. \quad (1.1)$$

Misalkan J menyatakan kepadatan arus listrik pada tiap satuan unit arus listrik dan arus listrik tersebut menembus penampang S . Asumsikan bahwa penampang tersebut bukan dalam batang tetapi penampang yang terhingga. Penampang tersebut memiliki vektor normal n dan memiliki keliling C . Komponen arus listrik yang melalui penampang S secara tegak lurus dinyatakan oleh $J \bullet n$. Dengan mengintegrasikan permukaan penampang S diperoleh keseluruhan arus listrik pada penampang S . Oleh karena itu bagian kanan pada persamaan (1.1) dapat ditulis

$$\oint_C H \bullet dl = \int_S J \bullet n \, dS. \quad (1.2)$$

68 Pada tahun 1831 Faraday membuktikan fenomena perubahan medan magnet
 69 yang menimbulkan arus listrik. Hukum Faraday menyatakan bahwa perubahan
 70 medan listrik mengakibatkan tegangan di sepanjang loop tertutup C . Pada
 71 saat induksi magnet B yang menembus loop tertutup C berubah maka besaran
 72 tersebut sama dengan berkurangnya tegangan sesuai dengan perubahan waktu
 73 di loop tertutup C tersebut. Fenomena ini dapat dinyatakan oleh

$$\oint_C E \bullet dl = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S B \bullet n \, dS. \quad (1.3)$$

74 Hukum integral keliling Ampere dan hukum Faraday dapat digabungkan
 75 dengan menggunakan perubahan listrik. Rasio perubahan waktu terhadap per-
 76 ubahan listrik D disebut sebagai perubahan arus listrik yang sama dengan arus
 77 listrik dalam hukum Ampere. Akibatnya persamaan (1.2) menjadi

$$\oint_C H \bullet dl = \int_S J \bullet n \, dS + \frac{\partial}{\partial t} \int_S D \bullet n \, dS. \quad (1.4)$$

78 Hukum integral keliling Ampere ini dapat digabungkan dengan hukum Fa-
 79 raday dan persamaan tersebut merupakan persamaan dasar Maxwell. Dengan
 80 menggunakan teori Stokes, ruas kiri pada persamaan (1.3) dan (1.4) dapat diu-
 81 bah menjadi integral permukaan. Permukaan yang diintegrasikan harus diambil
 82 sekecil mungkin supaya berlaku di seluruh ruang. Akibatnya berlaku penurunan
 83 persamaan Maxwell berikut

$$\nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t} \quad (1.5)$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}. \quad (1.6)$$

84 Dalam hukum dasar elektromagnet nilai muatan listrik sama dengan jumlah
 85 perubahan listrik yang ditimbulkannya dan dikenal sebagai hukum Gauss untuk
 86 perubahan listrik. Hukum Gauss yang lain yang berhubungan dengan perubah-
 87 an listrik yaitu tidak ada fenomena muatan listrik yang hanya mempunyai satu
 88 kutub saja. Kedua fenomena di atas dapat digambarkan oleh persamaan di
 89 bawah ini

$$\nabla \bullet D = \rho \quad (1.7)$$

$$\nabla \bullet B = 0. \quad (1.8)$$

90
 91 Persamaan (1.5) hingga 1.8) memuat banyak variabel diantaranya variabel
 92 medan listrik E , perubahan listrik D , medan listrik H dan induksi magnet B .
 93 Untuk mendapatkan medan listrik dan medan magnet akan dilakukan penurun-
 94 an pada persamaan-persamaan tersebut.

95 Suatu medium berdielektrik yang homogen digambarkan di seluruh ruang
 96 analisa dengan permitivitas ε dan permeabilitas μ . Pada medium homogen,

97 perubahan listrik dan induksi magnet dapat dinyatakan sebagai $D = \varepsilon E$ dan
 98 $B = \mu H$. Dengan mensubstitusikan kedua persamaan ini pada persamaan dasar
 99 Maxwell maka diperoleh persamaan medan listrik dan medan magnet. Untuk
 100 mendapatkan persamaan medan listrik dilakukan penghapusan medan magnet
 101 pada persamaan Maxwell dengan menggunakan operasi putaran pada persama-
 102 an (1.6) sehingga diperoleh

$$\nabla \times \nabla \times E + \mu \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times H) = 0. \quad (1.9)$$

103 Dengan menggunakan hubungan $\nabla \bullet E = \rho/\varepsilon$ dan $\nabla \times \nabla \times A = \nabla(\nabla \bullet A) - \nabla^2 A$
 104 maka persamaan (1.9) menjadi

$$\nabla \frac{\rho}{\varepsilon} - \nabla^2 E + \mu \frac{\partial J}{\partial t} + \varepsilon \mu \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0. \quad (1.10)$$

106 Dengan menggunakan operasi putaran pada persamaan (1.5) kemudian di-
 107 substitusikan pada persamaan (1.6) untuk menghilangkan medan listrik dari
 108 persamaan Maxwell maka diperoleh persamaan di bawah ini.

$$-\nabla^2 H - \nabla \times J + \varepsilon \mu \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = 0. \quad (1.11)$$

110 Medan listrik dan medan magnet dalam permasalahan elektromagnet seba-
 111 gian besar berubah sebagai persamaan sinus dengan frekuensi angular ω pada
 112 setiap perubahan waktu, misalnya $e^{j\omega t}$. Akibatnya persamaan medan listrik
 113 dan medan magnet dapat ditulis sebagai berikut.

$$-\nabla^2 E + l^2 E = \nabla \frac{\rho}{\varepsilon} + j\omega \mu J \quad (1.12)$$

$$-\nabla^2 H + l^2 H = -\nabla \times J \quad (1.13)$$

$$l = \omega \sqrt{\varepsilon \mu} = \frac{2\pi f}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (1.14)$$

114 Persamaan (1.12) dan (1.13) disebut sebagai persamaan Helmholtz dengan
 115 l adalah tetapan hantar. Karena $1/\sqrt{\varepsilon \mu}$ memiliki satuan kecepatan yang di-
 116 tunjukkan oleh $v(m/s)$ sedangkan $f(Hz)$ frekuensi dan kecepatan angular $\omega =$
 117 $2\pi f \cdot f/v$ mempunyai satuan panjang maka λ disebut sebagai panjang gelom-
 118 bang.

119 Jika suatu medan listrik dan medang magnet di titik yang sangat jauh dari
 120 sumber gelombang maka keberadaan muatan listrik ρ dan arus listrik J sebagai
 121 sumber gelombang dapat tidak dianggap. Oleh karena itu diperoleh persamaan
 122 Helmholtz berikut.

$$-\nabla^2 E + l^2 E = 0 \quad (1.15)$$

$$-\nabla^2 H + l^2 H = 0. \quad (1.16)$$

123 Untuk mempelajari penggunaan FEM melalui MATLAB, pada pembahasan
124 lebih lanjut digunakan persamaan Helmholtz berikut

$$-\nabla^2 u + ku = 0, \quad (1.17)$$

125 dengan $k < 0$, $k = -l^2$ dan u sebagai variabel medan listrik atau medan magnet.
126 Persamaan (1.17) menggambarkan gelombang datar yang merupakan ge-
127 lombang ideal dimana gelombang elektromagnet ini terhantar di ruang bebas
128 dengan kecepatan cahaya. Oleh karena itu, gelombang datar merupakan ge-
129 lombang di lokasi tak terhingga dari sumber gelombang yang menimbulkan.
130 Pada saat gelombang datar terhantar di ruang yang homogen, amplitudo ge-
131 lombang tidak akan berubah dan fasenya tidak mengalami ketidakkontinyuan.
132 Tetapi pada saat gelombang datar melewati medium yang mempunyai tetap-
133 an medium yang berlainan maka komponen medan listrik dan medan magnet
134 di perbatasan antar medium tersebut harus memenuhi syarat batas. Untuk
135 kemudahan, kita perhatikan beberapa kasus berikut.

136 Syarat Batas

137 Ada 2 jenis syarat batas yang biasa digunakan pada moda Elektrik atau Mag-
138 netik apabila berada pada daerah yang terbatas, yaitu

- 139 • Syarat Batas: moda-TE
140 Untuk moda-TE, u menyatakan medan magnetik aksial, H_z , dan syarat
141 batas yang digunakan adalah syarat batas Neuman, $\partial u / \partial n = 0$, dengan
142 n menyatakan arah normal di batas.
- 143 • Syarat Batas: moda-TM.
144 Untuk moda-TM, u menyatakan medan elektrik aksial, E_z , dan syarat
145 batas untuk batas konduktif sempurna yang harus dipenuhi adalah, $u = 0$.
146 Syarat ini, sering disebut juga sebagai syarat Dirichlet.

147 Sementara itu, apabila daerah tak terbatas, digunakan syarat Sommerfeld,
148 yang tidak dibahas dalam buklik ini, tetapi bagaimana implementasi pemrogram-
149 manya diberikan sebagai bagian rangkaian latihan.

Bab 2

Metode Elemen Hingga Ranah Frekuensi : Hampiran Galerkin

Untuk mendapatkan hampiran elemen hingga, dapat dilakukan dengan 2 cara, yaitu dengan cara meminimumkan energi yang dikenal dengan *Metode Rayleigh-Ritz*, dan metode hampiran proyeksi di ruang fungsi yang juga dikenal dengan *Metode Galerkin*.

a. *Metode Rayleigh-Ritz*

FEM memecahkan persamaan (1.17) dengan meminimumkan fungsional energi yang diberikan oleh:

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla u + kuu) dx. \quad (2.1)$$

b. *Metode Galerkin*

FEM untuk memecahkan persamaan (1.17) dengan menyelesaikan bentuk lemah yang diberikan oleh:

$$\begin{aligned} b(u, v) &= f(v), \\ \text{dengan } b(u, v) &= \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + kuv) dx, \\ f(v) &= \int f v dx, \end{aligned} \quad (2.2)$$

166 untuk sembarang fungsi v . Bentuk lemah ini, diperoleh dengan cara meng-
 167 alikan persamaan (1.17) dengan fungsi test v , dan kemudian dilakukan
 168 aturan integrasi sebagaimana diberikan di Lampiran.

169 Dalam buklik ini, akan digunakan metode Galerkin untuk mendapatkan
 170 hampiran metode elemen hingga, mengingat konsep yang digunakan mudah
 171 difahami karena mempergunakan pendekatan ruang-vektor dan sifat-sifat di
 172 dalam ruang vektor. Persamaan bentuk lemah yang diperoleh melalui meto-
 173 de Galerkin ini, bisa juga diturunkan melalui metode Rayleigh-Ritz, yang tidak
 174 dibahas di sini karena memerlukan pengetahuan kalkulus variasi. Untuk banyak
 175 masalah fisika, pendekatan melalui metode Rayleigh-Ritz selalu menghasilkan
 176 bentuk lemah yang identik dengan metode Galerkin.

177 Dalam implementasi FEM berdasarkan metode Galerkin, ada 3 langkah uta-
 178 ma yang dilakukan, yaitu:

- 179 1. Memilih basis dari ruang solusi.
- 180 2. Menuliskan solusi hampiran berdasarkan basis yang dipilih.
- 181 3. Solusi hampiran disubstitusikan ke bentuk lemah, atau diproyeksikan ke
 182 ruang solusi.

183 Dengan melalui serangkaian studi kasus berikut, Metoda Galerkin diaplika-
 184 sikan untuk mendapatkan solusi persamaan Helmholtz sebagai Metode Elemen
 185 Hingga ranah frekuensi.

186 **Kasus 1**

187

188

189 Perhatikan persamaan Helmholtz dengan syarat batas Dirichlet berikut

$$\begin{aligned} -\nabla^2 u + ku &= 0 \quad \text{di } \Omega \\ u &= g \quad \text{di } \partial\Omega \end{aligned} \quad (2.3)$$

190 dimana k dan g adalah sembarang fungsi yang diketahui. Hal ini dapat diilus-
 191 trasikan untuk gelombang datar yang melewati medium kedua yang merupakan
 192 penghantar sempurna.

193 Misalkan $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ dan syarat batas $\partial\Omega$ yang diilustrasikan pada
 194 Gambar 2.1.

195 **Kasus 2**

196 Hal lain yang mungkin jika gelombang datar tersebut mengalami perubah-
 197 an setelah melewati medium kedua. Perhatikan persamaan Helmholtz dengan
 198 syarat batas Dirichlet dan Neumann berikut

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot \nabla u + ku &= 0 \quad \text{di } \Omega \\ u &= p \quad \text{di } L_1 \\ n \cdot \nabla u &= q \quad \text{di } L_2 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Gambar 2.1: Daerah Ω

dimana k, p dan q adalah fungsi-fungsi yang diketahui. Misalkan $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ dengan syarat batas Dirichlet di L_1 dan syarat batas Neumann di L_2 .

Untuk menyelesaikan secara numerik kasus yang diuraikan di atas, akan digunakan FEM dengan teknik hampiran Galerkin. Implementasi untuk kedua kasus ini akan diuraikan secara bertahap dengan menggunakan MATLAB.

Kasus 1

Misal $v \in \mathcal{H}^1$ dimana $\mathcal{H}^1$ adalah himpunan dimana elemennya terdiri dari fungsi yang terturunkan, selain fungsinya yang apabila integral kwadratnya hingga, begitu juga turunannya. Atau dikenal juga dengan fungsi dengan energi yang hingga.

Dengan mengalikan persamaan Helmholtz pada kasus 1 dengan v dan dilakukan integrasi bagian (*integration by parts*, lihat Lampiran), akan diperoleh:

$$\int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + kuv) dx = 0. \quad (2.5)$$

Bentuk di atas, disebut bentuk lemah dari kasus 1.

Misal $V_h \in \mathcal{H}^1$ adalah ruang dari semua fungsi *piecewise linear* yang kontinu dalam sebuah partisi $K = \{T_1, T_2, \dots, T_N\}$ dari Ω menjadi segitiga berukuran $|T_i|$. Himpunan fungsi tenda *hat function* didefinisikan $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ dimana N menyatakan banyaknya node dalam partisi $\{T_i\}_{i=1}^N$ yang merupakan basis untuk V_h . Hampiran elemen hingga (*finite element approximation*) dari bentuk lemah (*weak form*) persamaan (2.3) adalah $u_h \in V_h$ sedemikian sehingga

$$\int_{\Omega} (\nabla u_h \cdot \nabla v + ku_h v) dx = 0, \text{ untuk sembarang } v. \quad (2.6)$$

Karena $u_h \in V_h$ maka u_h dapat ditulis

$$u_h = \sum_{j=1}^N z_j \varphi_j,$$

221 mengingat $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$, adalah basis dari V_h .

222 Oleh karena itu persamaan (2.6), karena berlaku untuk v sembarang, kita
 223 pilih $v = \varphi_i$, sehingga dapat dituliskan

$$\sum_{j=1}^N z_j \left(\int_{\Omega} \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i \, dx + \int_{\Omega} k \varphi_j \varphi_i \, dx \right) = 0, \text{ untuk setiap } \phi_i \in \{\phi_i\}_{i=1}^N. \quad (2.7)$$

224 Dari persamaan (2.7) diperoleh sistem persamaan linear $Az = b$, dimana elemen-
 225 elemen sistem persamaan linear tersebut sebagai berikut

$$A_{i,j} = \int_{\Omega} \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i \, dx + \int_{\Omega} k \varphi_j \varphi_i \, dx \quad (2.8)$$

$$b_i = 0 \quad (2.9)$$

$$z = (z_1, z_2, \dots, z_N)^T. \quad (2.10)$$

226 Pada persamaan di atas j bergerak sepanjang node dan i bergerak sepanjang
 227 node dengan nilai u diketahui. Nilai u pada $\partial\Omega$ yang diketahui dinotasikan
 228 dalam vektor z_e dan nilai u selainnya dinotasikan dalam z_n ,

$$(A_e | A_n) \begin{pmatrix} z_e \\ z_n \end{pmatrix} = A_e z_e + A_n z_n = b,$$

229 matriks A_e dihitung pada syarat batas. Sehingga solusi akhir z_n dapat
 230 dihitung dengan sistem persamaan $A_n z_n = b - A_e z_e$ dimana A_n sudah diketahui.

231 Misalkan daerah Ω dibagi menjadi enam ($N = 6$) elemen segitiga yang di-
 232 perlihatkan pada gambar berikut ini

Gambar 2.2: Ilustrasi *mesh* (enam elemen segitiga) dalam Ω

233 Misalkan koordinat dari setiap node diberikan pada tabel di bawah ini

Tabel 2.1: Nomor-nomor koordinat sebagai node

Node	1	2	3	4	5	6	7	8
x	0	1	1	1	1	0	0	0
y	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$

234 MATLAB mampu membaca data dari file yang diberikan dalam format ascii
 235 dengan file .dat, sehingga dalam MATLAB kita dapat menyimpan data koordi-
 236 nat untuk setiap node dengan pemrograman sebagai berikut.

```

237 node1 = [1 0 0;
238          2 1 0;
239          3 1 1/3;
240          4 1 2/3;
241          5 1 1;
242          6 0 1;
243          7 0 2/3;
244          8 0 1/3];
245 dlmwrite('koordinat1.dat', node1, 'u')
246 type koordinat1.dat

```

247 Pada Tabel 2.2 diberikan elemen-elemen yang berpadanan dengan node-node
 248 pada Tabel 2.1

Tabel 2.2: Nomor-nomor elemen segitiga

Elemen	1	2	3	4	5	6
Node 1	7	7	8	8	1	1
Node 2	5	4	4	3	3	2
Node 3	6	5	7	4	8	3

249 Dengan menggunakan MATLAB kita dapat menyimpan data elemen-elemen
 250 di atas dengan pemrograman berikut.

```

251
252 segitiga1=[1 7 5 6;
253            2 7 4 5;
254            3 8 4 7;
255            4 8 3 4;
256            5 1 3 8;
257            6 1 2 3];
258 dlmwrite('elemen1.dat', segitiga1, ' ')
259 type elemen1.dat

```

260 Syarat batas untuk Gambar 2.1 diperlihatkan pada tabel berikut.

```

261
262 deltaomega=[1 1 2;

```

Tabel 2.3: Nomor-nomor edge dengan syarat batas

Edge	1	2	3	4	5	6	7	8
Node 1	1	2	3	4	5	6	7	8
Node 2	2	3	4	5	6	7	8	1

```

263     2 2 3;
264     3 3 4;
265     4 4 5;
266     5 5 6;
267     6 6 7;
268     7 7 8;
269     8 8 1];
270 dlmwrite('deltaomega.dat', deltaomega, ' ')
271 type deltaomega.dat

```

272 Menyusun matriks *stiffness*

273 Perhatikan bahwa untuk sebuah elemen segitiga T misalkan $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$,
 274 dan (x_3, y_3) adalah titik-titik verteks dan φ_1, φ_2 dan φ_3 adalah fungsi basis
 275 yang berkorespondensi di K , yaitu

$$\varphi_i(x_j, y_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

276 Oleh karena itu, diperoleh

$$\varphi_i(x, y) = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_{i+1} & y_{i+1} \\ 1 & x_{i+2} & y_{i+2} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_{i+1} & y_{i+1} \\ 1 & x_{i+2} & y_{i+2} \end{pmatrix}}, \quad (2.11)$$

277 dengan

$$\nabla \varphi_i(x, y) = \frac{1}{2|T|} \begin{pmatrix} y_{i+1} - y_{i+2} \\ x_{i+2} - x_{i+1} \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

278 Indeks yang digunakan pada persamaan di atas di dalam modulo 3, sehingga
 279 diperoleh

$$2|T| = \det \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix}.$$

280 Matriks *stiffness* yang diperoleh adalah

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \int_T \nabla \varphi_i (\nabla \varphi_j)^T dx dy \\ &= \frac{|T|}{(2|T|)^2} \begin{pmatrix} y_{i+1} - y_{i+2} & x_{i+2} - x_{i+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{j+1} - y_{j+2} \\ x_{j+2} - x_{j+1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

dengan indeks di dalam modulo 3. Bentuk sederhana persamaan di atas adalah

$$M = \frac{|T|}{2} GG^T,$$

dimana

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pemrograman dalam MATLAB untuk menyusun matriks stiffness dapat kita tuliskan sebagai berikut.

```
function M = stima(vertices)
d = size(vertices,2);
G = [ones(1,d+1);vertices'] \ [zeros(1,d);eye(d)];
M = det([ones(1,d+1);vertices']) * G * G' / prod(1:d);
end
```

Menyusun matriks massa

Perhatikan bahwa

$$B_{ij} = \sum_{T \subset \Omega} \int_T \varphi_i \varphi_j k dx.$$

Dengan cara yang hampir sama dalam menyusun matriks *stiffness*, diperoleh matriks massa

$$\int_T \varphi_i \varphi_j k dx = \frac{1}{24} \det \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} k(x_s, y_s)$$

dimana (x_s, y_s) adalah titik tengah pada segitiga T .

Untuk $k = 0$, dengan menggunakan MATLAB diperoleh solusi dalam bentuk grafik berikut ini.

Solusi analitik pada kasus 1 untuk $k = 0$ adalah $u = 0$ mempunyai kesimpulan yang sama dengan solusi numerik yang ditampilkan pada Gambar 2.3.

```
function k = k0(x,y);
k = 0;
end
function SyaratBatas = deltaO(x)
SyaratBatas = zeros(size(x,1),1);
end
```

Pemrograman dengan MATLAB untuk kasus 1 sebagai berikut

```
load koordinat1.dat; koordinat1(:,1)=[];% koordinat simpul
load elemen1.dat; elemen1(:,1)=[];% elemen hingga segitiga
```

Gambar 2.3: Solusi kasus 1 untuk $k = 0$.

```

311 load deltaomega.dat; deltaomega(:,1)=[];
312 koordinat = koordinat1;
313 elemen = elemen1;
314 %
315 % Pembangkitan mesh
316 %
317 %
318 NodeBebas=setdiff(1:size(koordinat,1),unique(deltaomega));
319 A = sparse(size(koordinat,1),size(koordinat,1));
320 b = sparse(size(koordinat,1),1);
321 %
322 % 1. menyusun matriks A1
323 % dengan memanggil fungsi stima
324 for i = 1:size(elemen,1)
325 A(elemen(i,:),elemen(i,:)) = A(elemen(i,:),elemen(i,:)) ...
326 + stima(koordinat(elemen(i,:),:));
327 end
328 % 2. menyusun matriks A2
329 for i = 1:size(elemen,1)
330 A(elemen(i,:),elemen(i,:))=A(elemen(i,:),elemen(i,:)) +...
331 det([ones(1,3);koordinat(elemen(i,:),:)])*...
332 (diag(ones(3,1))+ones(3))*...
333 k0(sum(koordinat(elemen(i,:),:))/3)/24;
334 end
335 u = sparse(size(koordinat,1),1);
336 u(unique(deltaomega)) = ...
337 deltaO(koordinat(unique(deltaomega),:));
338 b = b - A*u;
339 %
340 % 3. Menghitung solusi

```

```

341 %
342 u(NodeBebas) = A(NodeBebas,NodeBebas) \ b(NodeBebas);
343 %
344 % 4. Grafika
345 %
346 show(elemen,[],koordinat,full(u));
347 xlabel('x');ylabel('y');zlabel('u');
348
349 Kasus 2
350 Bentuk lemah untuk kasus 2 adalah

```

$$\int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + kuv) dx = \int_{L_2} qv ds. \quad (2.13)$$

350 Pendekatan elemen hingga (*finite element approximation*) dari bentuk lemah persama-
 351 maan (2.13) adalah $u_h \in V_h$ sedemikian sehingga

$$\int_{\Omega} (\nabla u_h \cdot \nabla v + ku_h v) dx = \int_{L_2} qv ds. \quad (2.14)$$

352 Dengan cara yang sama seperti yang sudah diuraikan pada kasus 1, terdapat sistem
 353 persamaan linear dengan elemen-elemen berikut.

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \left(\int_{\Omega} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j dx dy + \int_{\Omega} k(x,y) \varphi_i \varphi_j dx dy \right) \\ b_i &= \int_{L_2} \varphi_i q ds \\ z &= (z_1, z_2, \dots, z_N)^T. \end{aligned}$$

354 Dengan menggunakan cara yang serupa pada kasus 1, matriks A_e dihitung pada syarat
 355 batas Dirichlet. Sehingga solusi akhir z_n dapat dihitung dengan sistem persamaan

$$A_n z_n = b - A_e z_e.$$

356 Beberapa simulasi untuk kasus 2 akan dibahas di bawah ini, dengan sejumlah
 357 subkasus.

a (Kasus 2a) Misal Ω dan syarat batas diberikan pada gambar berikut. Jika Ω dibagi

Gambar 2.4: Syarat batas untuk kasus 2a

menjadi enam segitiga seperti pada gambar 1 dengan syarat batas seperti pada Gambar 2.4, maka dalam MATLAB kita dapat menyimpan data syarat batas dengan pemrograman berikut.

```

neumann1=[1 1 2;
2 5 6];
dlmwrite('neumann1.dat',neumann1,'_')
type neumann1.dat
dirichlet1=[1 2 3;
2 3 4;
3 4 5;
4 6 7;
5 7 8;
6 8 1];
dlmwrite('dirichlet1.dat', dirichlet1,'_')
type dirichlet1.dat

```

Misalkan dipilih $k = -(2\pi)^2$, $p = \cos(2\pi y)$ dan $q = 0$.

```

function k = k1(x,y);
k = -((2*pi))^2;
end
function S = g(x)
S = zeros(size(x,1),1);
end
function a=q1(x);
a=0;
end
function BatasDirichletKasus2a = ud1(x)
BatasDirichletKasus2a = zeros(size(x,1),1);
I=find(x(:,1)==0|x(:,1)==1);
BatasDirichletKasus2a(I) = cos(2*pi*x(:,2));
end

```

Dengan menggunakan MATLAB diperoleh solusi pada Gambar 2.5. Pemrograman dengan MATLAB sebagai berikut

```

% inisialisasi
load koordinat1.dat;
koordinat1(:,1)=[];%koordinat simpul
load elemen1.dat;
elemen1(:,1)=[];%elemen hingga segitiga
load neumann1.dat; neumann1(:,1)=[];
load dirichlet1.dat; dirichlet1(:,1)=[];
koordinat = koordinat1;
elemen = elemen1;
neumann = neumann1;
dirichlet = dirichlet1;
NodeBebas=...
    setdiff(1:size(koordinat,1),unique(dirichlet));
A = sparse(size(koordinat,1),size(koordinat,1));

```

Gambar 2.5: Grafik permukaan solusi kasus 2a. Program lengkap ada di Lampiran 2.

```

405     b = sparse(size(koordinat,1),1);
406     %
407     % 1. menyusun matriks kekakuan A1
408     % dengan memanggil fungsi stima_1
409     %
410     for i = 1:size(elemen,1)
411         A(elemen(i,:),elemen(i,:))=...
412             A(elemen(i,:),elemen(i,:)) ...
413             + stima(koordinat(elemen(i,:),:));
414     end
415     %
416     % 2. menyusun matriks massa A2
417     %
418     for i = 1:size(elemen,1)
419         A(elemen(i,:),elemen(i,:)) = ...
420             A(elemen(i,:),elemen(i,:))+...
421             det([ones(1,3);koordinat(elemen(i,:),:)]')*...
422             (diag(ones(3,1))+ones(3))* ...
423             k1(sum(koordinat(elemen(i,:),:))/3)/24;
424     end
425     % 3. Gaya luar
426     for i = 1:size(elemen,1)
427         b(elemen(i,:)) = b(elemen(i,:))+...
428             det([ones(1,3);koordinat(elemen(i,:),:)]')*...
429             g(sum(koordinat(elemen(i,:),:))/3)/6;
430     end
431     %
432     % 4. Syarat Batas Neumann
433     %

```

```

434 for i = 1:size(neumann,1)
435     b(neumann(i,:))=b(neumann(i,:)) +...
436     norm(koordinat(neumann(i,1),:)- ...
437     koordinat(neumann(i,2),:)) *...
438     q1(sum(koordinat(neumann(i,:),:))/2)/2;
439 end
440 %
441 % 5. Syarat Batas Dirichlet
442 %
443 u = sparse(size(koordinat,1),1);
444 u(unique(dirichlet)) = ...
445     ud1(koordinat(unique(dirichlet),:));
446 b = b - A*u;
447 %
448 % 6. Perhitungan Solusi Sistem Persamaan Linear
449 %
450 u(NodeBebas) = A(NodeBebas,NodeBebas)\b(NodeBebas);
451 %
452 % 7. Grafika
453 %
454 show(elemen,[],koordinat,full(u));
455 xlabel('x');ylabel('y');zlabel('u');

```

- 456 **b** (Kasus 2b) Misalkan daerah Ω dibagi menjadi empat ($N = 4$) elemen segitiga yang diperlihatkan pada gambar berikut ini Dengan nomor-nomor node, elemen

Gambar 2.6: Daerah Ω dibagi menjadi empat segitiga

457
458 segitiga dan edge syarat batas pada tabel berikut: Misalkan $k = -(2\pi)^2$, $p =$
459 $\cos(2\pi y)$ dan $q = 0$, dengan menggunakan MATLAB, diperoleh solusi dalam
460 bentuk grafik berikut ini: Pemrograman kasus 2b dengan MATLAB sebagai
461 berikut

```

462 load koordinat2.dat;% koordinat node
463 koordinat2(:,1)=[];
464 load elemen2.dat;% daftar elemen segitiga

```

Tabel 2.4: Nomor-nomor node, elemen, dan *edge* syarat batas

Nomor	Node (Koordinat)	Elemen Segitiga	Syarat Batas Neumann	Syarat batas Dirichlet
1.	(0,0)	1-2-3	1-2	4-1
2.	(1,0)	1-3-4	2-5	
3.	(1/2,1/2)	3-2-5	5-4	
4.	(0,1)	3-5-4		
5.	(1,1)

Gambar 2.7: Grafik permukaan solusi kasus 2b. Dihasilkan oleh program lengkap yang diberikan di Lampiran 2.

```

465     elemen2(:,1) = [];
466     load neumann3.dat; neumann3(:,1) = [];
467     load dirichlet3.dat; dirichlet3(:,1) = [];
468     koordinat = koordinat2;
469     elemen = elemen2;
470     neumann = neumann3;
471     dirichlet = dirichlet3;
472     NodeBebas = setdiff(1:size(koordinat,1), ...
473                        unique(dirichlet));
474     A = sparse(size(koordinat,1), size(koordinat,1));
475     b = sparse(size(koordinat,1), 1);
476     % 1. menyusun matriks A1
477     % dengan memanggil fungsi stima_1
478     for i = 1:size(elemen,1)
479         A(elemen(i,:), elemen(i,:)) = ...
480           A(elemen(i,:), elemen(i,:)) ...
481           + stima(koordinat(elemen(i,:),:));
482     end

```

```

483 % 2. menyusun matriks A2
484 for i = 1:size(elemen,1)
485     A(elemen(i,:),elemen(i,:)) = ...
486         A(elemen(i,:),elemen(i,:))+...
487         det([ones(1,3);koordinat(elemen(i,:),:)]')*...
488         (diag(ones(3,1))+ones(3))*...
489         k1(sum(koordinat(elemen(i,:),:))/3)/24;
490 end
491 % 3. Gaya luar
492 for i = 1:size(elemen,1)
493     b(elemen(i,:)) = b(elemen(i,:))+...
494         det([ones(1,3);koordinat(elemen(i,:),:)]')*...
495         g(sum(koordinat(elemen(i,:))/3))/6;
496 end
497 % 4. Syarat Neumann
498 for i = 1:size(neumann,1)
499     b(neumann(i,:))=b(neumann(i,:)) +...
500         norm(koordinat(neumann(i,1,:),:)- ...
501             koordinat(neumann(i,2,:),:)) *...
502             q1(sum(koordinat(neumann(i,:),:))/2)/2;
503 end
504 % 5. Syarat Dirichlet
505 u = sparse(size(koordinat,1),1);
506 u(unique(dirichlet))=...
507     ud1(koordinat(unique(dirichlet),:));
508 b = b - A*u;
509 % 6. Komputasi solusi
510 u(NodeBebas) = A(NodeBebas,NodeBebas) \ b(NodeBebas);
511 %
512 % 7. Grafika
513 %
514 show(elemen,[],koordinat,full(u));
515 xlabel('x');ylabel('y');zlabel('u');

```

516 **c** (Kasus 2c) Misalkan daerah Ω dibagi menjadi delapan ($N = 8$) elemen segitiga
517 yang diperlihatkan pada gambar berikut ini. Dengan nomor-nomor node, elemen
518 segitiga dan edge syarat batas pada Tabel 2.5. Dengan fungsi k yang melompat

$$k = \begin{cases} 1.5 & ; y > 0.5 \\ 1.4 & ; y \leq 0.5 \end{cases},$$

519 dengan syarat Dirichlet yang diberikan oleh fungsi :

$$p = \exp\left(\frac{-(y-0.5)^2}{0.4}\right),$$

520 dan $q = 0$.

```

521 function k = k3(x)
522 if x(:,2) <= 0.5
523     k = 1.5;
524 else if x(:,2) > 0.5

```

Gambar 2.8: Daerah Ω dibagi menjadi delapan segitigaTabel 2.5: Nomor-nomor node, elemen, dan *edge* syarat batas

Nomor	Node (Koordinat)	Elemen Segitiga	Syarat Batas Neumann	Syarat batas Dirichlet
1.	(0,0)	1-2-3	1-2	7-4
2.	(1,0)	1-3-4	2-5	4-1
3.	(1/2,1/4)	3-2-5	5-8	
4.	(0,1/2)	4-3-5	8-7	
5.	(1,1/2)	4-5-6		
6.	(1/2,3/4)	4-6-7		
7.	(0,1)	6-5-8		
8.	(1,1)	7-6-8		

```

525         k = 1.4;
526     end
527 end
528 end
529 function DirichletBoundaryValueCase2d = ud3(x)
530 DirichletBoundaryValueCase2d = zeros(size(x,1),1);
531 I=find(x(:,1)==0);
532 DirichletBoundaryValueCase2d(I) = ...
533     exp(-(x(I,2)-0.5).^2)./0.4);
534 end

```

535 Dengan menggunakan MATLAB, diperoleh solusi dalam bentuk grafik berikut
536 ini:

537 Pemrograman untuk kasus 3 dengan MATLAB sebagai berikut

```

538 load koordinat3.dat; % koordinat simpul
539 koordinat3(:,1)=[];
540 load elemen3.dat; % elemen hingga segitiga
541 elemen3(:,1)=[];
542 load neumann4.dat; neumann4(:,1)=[];

```

Gambar 2.9: Grafik permukaan solusi kasus 2c. Dihasilkan oleh program lengkap di Lampiran 2.

```

543     load dirichlet4.dat; dirichlet4(:,1)=[];
544     koordinat=koordinat3;
545     elemen=elemen3;
546     neumann = neumann4;
547     dirichlet = dirichlet4;
548     NodeBebas = ...
549         setdiff(1:size(koordinat,1),unique(dirichlet));
550     A = sparse(size(koordinat,1),size(koordinat,1));
551     b = sparse(size(koordinat,1),1);
552     % 1. menyusun matriks A1
553     % dengan memanggil fungsi stima_1
554     for i = 1:size(elemen,1)
555         A(elemen(i,:),elemen(i,:)) = ...
556             A(elemen(i,:),elemen(i,:)) ...
557             + stima(koordinat(elemen(i,:),:));
558     end
559     % 2. menyusun matriks A2
560     for i = 1:size(elemen,1)
561         A(elemen(i,:),elemen(i,:)) = ...
562             A(elemen(i,:),elemen(i,:))+...
563             det([ones(1,3);koordinat(elemen(i,:),:)]')*...
564             (diag(ones(3,1))+ones(3))*...
565             k2(sum(koordinat(elemen(i,:),:))/3)/24;
566     end
567     % 3. Gaya luar
568     for i = 1:size(elemen,1)
569         b(elemen(i,:)) = b(elemen(i,:))+...
570             det([ones(1,3);koordinat(elemen(i,:),:)]')*...
571             g(sum(koordinat(elemen(i,:),:))/3)/6;

```

```

572     end
573     % 4. Syarat Neumann
574     for i = 1:size(neumann,1)
575         b(neumann(i,:))=b(neumann(i,:)) +...
576             norm(koordinat(neumann(i,1,:),:)- ...
577                 koordinat(neumann(i,2,:),:)) *...
578                 q1(sum(koordinat(neumann(i,:),:))/2)/2;
579     end
580     % 5. Syarat Dirichlet
581     u = sparse(size(koordinat,1),1);
582     u(unique(dirichlet)) = ...
583         ud3(koordinat(unique(dirichlet),:));
584     b = b - A*u;
585     % 6. Komputasi solusi
586     u(NodeBebas) = A(NodeBebas,NodeBebas) \ b(NodeBebas);
587     % 7. Grafika
588     show(elemen,[],koordinat,full(u));
589     xlabel('x');ylabel('y');zlabel('u');

```

590 d (Kasus 2d) Misalkan daerah Ω dibagi menjadi duabelas ($N = 12$) elemen segitiga yang diperlihatkan pada Gambar 2.10. Sedangkan nomor-nomor node, elemen

Gambar 2.10: Daerah Ω dibagi menjadi duabelas segitiga

591 segitiga dan node dengan syarat batas pada Tabel 2.6. Misalkan
592

$$k = \begin{cases} 1.4 & ; y > 2/3 \text{ atau } y < 1/3 \\ 1.5 & ; 1/3 \leq y \leq 2/3 \end{cases}$$

593 sedangkan p dan q sama seperti pada kasus 2c.

```

594     function k = k4(x)
595     if (x(:,2) < 1/3) || (x(:,2) > 2/3)
596         k = 1.4;
597     else
598         k = 1.5;
599     end
600     end

```


Tabel 2.6: Nomor node, elemen, dan *edge* syarat batas

Nomor	Node (Koordinat)	Elemen Segitiga	Syarat Batas Neumann	Syarat batas Dirichlet
1.	(0,0)	1-2-3	1-2	10-7
2.	(1,0)	1-3-4	2-5	7-4
3.	(1/2,1/6)	3-2-5	5-8	4-1
4.	(0,1/3)	3-5-4	8-11	
5.	(1,1/3)	4-5-6	11-10	
6.	(1/2,1/2)	4-6-7		
7.	(0,2/3)	6-5-8		
8.	(1,2/3)	6-8-7		
9.	(1/2,5/6)	7-8-9		
10.	(0,1)	7-9-10		
11.	(1,1)	9-8-11		
12.		9-10-11		

601 Dengan menggunakan MATLAB, diperoleh solusi dalam bentuk grafik sebagai-
 602 mana diperlihatkan pada gambar berikut ini,

Gambar 2.11: Grafik permukaan solusi kasus 2d. Dihasilkan oleh program lengkap di Lampiran 2.

603 Pemrograman untuk kasus ini dengan MATLAB sebagai berikut
 604
 605 **load** koordinat4.dat; % koordinat simpul
 606 koordinat4(:,1) = [];
 607 **load** elemen4.dat; % elemen hingga segitiga
 608 elemen4(:,1) = [];

```

609     load neumann5.dat; neumann5(:,1)=[];
610     load dirichlet5.dat; dirichlet5(:,1)=[];
611     koordinat=koordinat4;
612     elemen=elemenB4;
613     neumann = neumann5;
614     dirichlet = dirichlet5;
615     %
616     NodeBebas = ...
617         setdiff(1:size(koordinat,1),unique(dirichlet));
618     A = sparse(size(koordinat,1),size(koordinat,1));
619     b = sparse(size(koordinat,1),1);
620     % 1. menyusun matriks A1
621     % dengan memanggil fungsi stima_1
622     for i = 1:size(elemen,1)
623         A(elemen(i,:),elemen(i,:)) = ...
624             A(elemen(i,:),elemen(i,:)) ...
625             + stima(koordinat(elemen(i,:),:));
626     end
627     % 2. menyusun matriks A2
628     for i = 1:size(elemen,1)
629         A(elemen(i,:),elemen(i,:)) = ...
630             A(elemen(i,:),elemen(i,:))+...
631             det([ones(1,3);koordinat(elemen(i,:),:)]')*...
632             (diag(ones(3,1))+ones(3))*...
633             k3(sum(koordinat(elemen(i,:),:))/3)/24;
634     end
635     % 3. Gaya luar
636     for i = 1:size(elemen,1)
637         b(elemen(i,:)) = b(elemen(i,:))+...
638             det([ones(1,3);koordinat(elemen(i,:),:)]')*...
639             g(sum(koordinat(elemen(i,:),:))/3)/6;
640     end
641     % 4. Syarat Neumann
642     for i = 1:size(neumann,1)
643         b(neumann(i,:))=b(neumann(i,:)) +...
644             norm(koordinat(neumann(i,1,:))- ...
645                 koordinat(neumann(i,2,:),:)) *...
646                 q1(sum(koordinat(neumann(i,:),:))/2)/2;
647     end
648     % 5. Syarat Dirichlet
649     u = sparse(size(koordinat,1),1);
650     u(unique(dirichlet)) = ...
651         ud3(koordinat(unique(dirichlet),:));
652     b = b - A*u;
653     % 6. Komputasi solusi
654     u(NodeBebas) = A(NodeBebas,NodeBebas) \ b(NodeBebas);
655     % 7. Grafika
656     show(elemen,[],koordinat,full(u));
657     xlabel('x');ylabel('y');zlabel('u');

```

HISTORIANA

Gambar 2.12: Boris G. Galerkin (1871-1945), Seorang Insinyur Teknik Perkapalan Rusia, yang bekerja menggeluti bidang Mekanika Kontinua. Dari pengalamannya menggeluti PDP untuk pelat dan batang, lahir teknik penghampiran yang menjadi landasan Metode Elemen Hingga. (Sumber: Mac Tutor History of Mathematics Archive)

Gambar 2.13: Richard Courant (1832-1925), perintis teori Metode Elemen Hingga yang memformulasikan penyelesaian PDP numerik memanfaatkan partisi segi tiga (Triangular element) dan fungsi basis atas elemen untuk metode Galerkin. (Sumber: Mac Tutor History of Mathematics Archive)

Gambar 2.14: Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), perumus tipe syarat batas dalam persamaan differensial parsial. (Sumber: Mac Tutor History of Mathematics Archive)

Gambar 2.15: Carl Friedrich Neumann (1888-1972), perumus tipe syarat batas dalam persamaan differensial parsial. (Sumber: Mac Tutor History of Mathematics Archive)

Gambar 2.16: Ferdinand Helmholtz (1821-1894), fisikawan perumus persamaan differensial parsial yang mendiskripsikan perambatan gelombang. (Sumber: Mac Tutor History of Mathematics Archive)

Bab 3

LATIHAN

Pada bagian ini, diberikan serangkaian latihan, dimana secara bertahap implementasi Metode Elemen Hingga ranah frekuensi untuk masalah sederhana, dimodifikasi tahap demi tahap sehingga dapat digunakan sebagai alat untuk memecahkan masalah persamaan Helmholtz yang muncul dalam aplikasi di bidang Elektromagnetik. Total tersedia 20 latihan, dari yang sifatnya sangat sederhana, sampai ke tingkat yang cukup sulit. Juga rentang aplikasinya, dari yang sifatnya pedagogis, sampai ke permasalahan garda depan (*research frontier*) di bidang nanosains, antara lain pada ranah gelombang TerraHertz serta aplikasi dalam disain divais seperti biosensor, sel surya dan antena nano.

Latihan 1-4 dapat dikategorikan sebagai latihan sederhana yang harus dilakukan seusai mencoba skrip MATLAB, mengkaji studi kasus yang diberikan.

Latihan 5-10 dapat dikategorikan sebagai latihan tingkat madya yang dapat diberikan sebagai tugas mandiri yang dapat dilakukan dalam waktu 2-3 minggu, mengingat diperlukan keterampilan untuk pembangkit mesh yang di buket ini, digunakan **distmesh**, atau pembangkit mesh lainnya seperti *gmesh*.

Latihan 11-20 dikategorikan sebuah latihan tingkat lanjut yang dapat dijadikan dasar penelitian tugas akhir S1, maupun bagian dari Thesis S2 maupun S3. Bahkan bisa menjadi bahan penelitian tersendiri.

3.1 Latihan 1. Pandu Gelombang Dua Lapis

Pada kasus 2c dan 2d, ditunjukkan kemungkinan sifat bahan yang bervariasi.

Pada latihan ini, bertujuan bagaimana memodifikasi bangun sederhana yang telah diberikan, sehingga dapat mengakomodir sifat bahan yang konstan di sejumlah daerah. Dengan melakukan pembentukan elemen segi tiga kasar menurut bagian material sesuai dengan yang diinginkan, sering disebut sebagai body-fit triangulation.

Gambar 3.1: Gambar untuk Latihan 1. Pandu gelombang persegi terisi dielektrik tak homogen. $[a = 22.86 \text{ mm}, b = 10.16 \text{ mm}, h = 1/3b, \epsilon_1 = 2.56\epsilon_0, \epsilon_2 = \epsilon_0, \mu_1 = \mu_2 = \mu_0]$

Dengan nomor-nomor node, elemen segitiga dan edge syarat batas pada Tabel 3.1.

Definisikan geometri di atas dengan memanfaatkan triangulasi yang digunakan pada gambar 8, sehingga simpul/nodes segitiga berada di atas dan tidak ada elemen segitiga yang melintang garis pemisah bahan.

Perhatikan bahwa, nilai koefisien k akan bernilai konstan pada masing-masing segitiga. Susunlah sifat bahan yang dikaitkan pada elemen yang termuat di bagian tersebut sehingga pemberian sifat bahan pada elemen dapat dihitung saat assembly matriks massa.

Gambar 3.2: Daerah Ω dibagi menjadi delapan segitiga

Tabel 3.1: Nomor-nomor node, elemen, dan *edge* syarat batas

Nomor	Node (Koordinat)	Elemen Segitiga	Syarat Batas Neumann	Syarat batas Dirichlet
1.	(0,0)	1-2-3	1-2	7-4
2.	(a,0)	1-3-4	2-5	4-1
3.	(1/2,1/4)	3-2-5	5-8	
4.	(0,h)	4-3-5	8-7	
5.	(a,h)	4-5-6		
6.	(1/2,3/4)	4-6-7		
7.	(0,b)	6-5-8		
8.	(a,b)	7-6-8		

3.2 Latihan 2. Test Dengan Solusi.

Tujuan latihan berikut adalah melanjutkan latihan terdahulu, yaitu bagaimana menguji solusi numerik apabila solusi analitik permasalahan diketahui. Pada latihan berikut, akan diselesaikan masalah pandu gelombang untuk polarisasi-TM.

Masalah yang dihadapi adalah sebuah pandu gelombang yang merupakan struktur dengan permitivitas ε bernilai konstan ke satu arah. Sehingga untuk sistem koordinat (x, y) permitivitas hanya merupakan fungsi dari sumbu, dalam hal ini sumbu- x saja. Perhatikan masalah nilai eigen berikut:

$$\partial_{xx} \Psi(x) + k(x)^2 \Psi(x) = \beta^2 \Psi(x)$$

dengan $k(x)^2 = \varepsilon(x)\omega^2/c^2$, $u(x, y) = \Psi(x)\exp(i\beta y)$ yang memenuhi persamaan TM-Helmholtz. Perhatikan bahwa jika $\beta \in R_+$ medan merambat tanpa redaman ke arah sumbu- y dan disebut sebagai moda terpandu.

Perlu diperhatikan bahwa solusi di atas tidak memenuhi syarat Sommerfeld, sehingga agar solusi analitik ini bisa digunakan sebagai pengujian untuk mendapatkan solusi analitik, maka daerah definisi merupakan daerah terbatas dengan syarat batas Neumann atau Dirichlet.

Sebagai contoh, perhatikan pandu gelombang dengan index melompat:

$$k(x)^2 = \begin{cases} k_2^2 & \text{for } |x| < d, \\ k_1^2 & \text{for } |x| > d. \end{cases}$$

Dalam hal ini, $2d$ merupakan lebar dari pandu gelombang, dan kita anggap $k_2^2 > k_1^2$. Moda dasar (fundamental mode) u -yg belum tentu ada, terkait dengan fungsi-eigen $\Psi(x)$ dengan nilai maksimal β^2 diberikan oleh

$$u(x, y) = \begin{cases} (e^{i\sqrt{k_2^2\beta^2}x} + e^{i\sqrt{k_2^2\beta^2}x})e^{i\beta y}, & \text{untuk } |x| < d, \\ Ce^{\sqrt{-k_1^2+\beta^2}x}e^{i\beta y}, & \text{untuk } x \leq -d, \\ Ce^{\sqrt{-k_1^2+\beta^2}x}e^{i\beta y}, & \text{untuk } x > d, \end{cases} \quad (3.1)$$

dengan $C = (\exp(i\sqrt{k_2^2\beta^2}d) + \exp(i\sqrt{k_2^2\beta^2}d))/\exp(\sqrt{k_1^2 + \beta^2}d)$. Perhatikan bahwa moda fundamentalnya meluruh dengan cepat secara eksponensial untuk $|x| \rightarrow \infty$.

Untuk eksperimen Numerik, dipilih $d = 1/\sqrt{2}$, $k_1 = 0.29$ dan $k_2 = 1.32$. Pemilihan ini, akan mendapatkan moda fundamental $\beta = 0.8767339289$.

Gunakan gambar geometri pada Latihan 2., dan gunakan parameter yang diberikan untuk persamaan (3.1), serta tentukan jenis syarat batasnya berdasarkan solusi eksak (3.1) yang diberikan.

719 3.3 Latihan 3. Geometri Bahan Berbeda.

720 Latihan ini, bertujuan melakukan penyusunan geometri yang bersesuaian dengan sifat
 721 bahan yang digunakan, Lihat juga kasus (2c) dan Latihan 1.

Gambar 3.3: Latihan 3. Pandu Gelombang Ridge

722 Dalam latihan ini, terdiri dari 2 bagian bahan yang menempati daerah tertentu.
 723 Susunlah sifat bahan yang dikaitkan pada elemen yang termuat di bagian tersebut
 724 sehingga pemberian sifat bahan pada elemen dapat dihitung saat assembly matriks
 725 massa.

3.4 Latihan 4. Perambatan Gelombang Dalam Ruang Akibat Sumber WiFi.

Gambar 3.4: Sketsa tapak ruangan dengan posisi router WiFi berada di titik $\mathbf{o}$.

Pada latihan ini, meskipun tidak menyangkut pandu gelombang, memodelkan perambatan medan listrik akibat adanya sumber. Dalam hal ini, memodelkan perambatan medan elektrik di dalam ruangan akibat adanya router WiFi.

$$-\nabla^2 u + l^2 u = f, \quad (3.2)$$

dengan f menyatakan sumber pemancar WiFi. Implementasi dalam MATLAB, hanya dengan menambah satu rutin serupa dengan konstruksi matriks massa. Dengan mengingat bahwa, cukup diperlukan evaluasi $\int f \varphi_j dx dy$, untuk sembarang fungsi basis φ_j .

735 3.5 Latihan 5. Syarat Batas Serap

736 Dalam banyak permasalahan, diperlukan situasi perambatan medan, dimana seakan
 737 tidak ada pembatas yang menghalangi. Syarat batas yang secara fisik lebih realistis
 738 ialah menjamin bahwa semua gelombang dari daerah komputasi akan merambat keluar
 739 tanpa kecuali, sedikitpun tak ada yang kembali. Diperlihatkan di ([3], halaman 16)
 740 bahwa syarat batas seperti ini adalah syarat batas jenis Robin, yaitu

$$\frac{\partial u}{\partial n} - \imath ku = 0 \text{ di } \partial\Omega$$

741 dengan $\imath = \sqrt{-1}$. Implementasikan pada Latihan 1, dengan memodifikasi bentuk sya-
 742 rat batas yang mirip dengan syarat-Neumann yang tak homogen : $\frac{\partial u}{\partial n} = g, g := \imath ku$.

3.6 Latihan 6. Geometri Cincin

Gambar 3.5: Ilustrasi *mesh* Ω berupa lingkaran bolong

Pada latihan ini, dengan menggunakan geometri sebagaimana diberikan di Lampiran, untuk menyelesaikan persamaan Helmholtz berbentuk:

$$-\nabla^2 u + l^2 u = f. \quad (3.3)$$

Jika pada lingkaran bagian dalam berupa syarat batas Dirichlet, coba bereksperimen untuk syarat batas dengan melakukan eksperimen numerik, dengan menetapkan pada batas lingkaran terluar dengan syarat batas Dirichlet, Neumann, atau Robin sebagaimana dibahas di latihan sebelum ini.

3.7 Latihan 7. Tomografi Microwave Memanjang

Gambar 3.6: Skematik masalah. Potongan melintang dari alat Microwave dan model. 1: Ruang kerja; 2: Serangkaian transmitter; 3: Serangkaian penerima; 4: Setengah bola; 5: Area kecil nonhomogen; 6: Lapisan lemak; 7: Lapisan otot; 8: Lapisan tulang.

Pada latihan ini, diberikan model perambatan Microwave memanjang [4] untuk Tomografi Microwave.

Sebagaimana disebutkan, persamaan Helmholtz skalar memodelkan perambatan elektromagnetik di ruang bebas dan di dalam objek:

$$-\nabla^2 E_s + k^2 E_s = (k_0^2 - k^2) E_0, \quad (3.4)$$

dengan

E_s dan E_0	komponen medan datang dan hamburan
k	bilangan gelombang
k_0^2	$= (2\pi/\lambda)^2 \epsilon$
λ	panjang gelombang radiasi dalam vakum

758 Dalam eksperimen numerik, digunakan medan sumber titik sebagai medan datang

$$E_0(r) = \frac{\exp(ik_0r)}{4\pi r}$$

759 dengan r menyatakan jarak titik sumber dengan pusat fasa antenna pemancar, k_0
760 menyatakan bilangan gelombang untuk ruang homogen.

761

Lemak	ε_f	$10 + \imath$
Tulang	ε_b	$11 + 2\imath$
Otot	ε_m	$25 + 15\imath$
Jaringan Payu Dara	ε_{bt}	$10 + 1.5\imath$
Jaringan malignan	ε_c	$23 + 15\imath$

762

Data besaran sifat bahan.

3.8 Latihan 8. Tomografi Microwave Melintang

Gambar 3.7: Skematik Microwave Tomography untuk potongan melintang pada Latihan 7. Dengan susunan bahan berupa 1: Lapisan Lemak; 2: Anomali

Pada latihan ini, dengan memanfaatkan triangulasi sebagaimana di Lampiran untuk pembangkitan grid, direpresentasikan model perambatan medan Elektrik secara melintang mengikuti model dan sifat bahan pada Latihan 8.

3.9 Latihan 9. Biosensor Bakteri Berlapis.

Gambar 3.8: Biosensor pendeteksi Bakteri berupa pandu gelombang dengan 5 lapis. Dengan syarat batas Neumann di dinding kiri/kanan, dan Dirichlet di atap dan dasar.[24]

Secara matematis, permasalahan pada latihan ini, hampir serupa dengan Latihan 2. Yaitu, pada hakekatnya, menyelesaikan persamaan Helmholtz dengan koefisien yang bervariasi relatif terhadap satu arah sumbu.

Parameter yang digunakan dalam latihan ini, diberikan sebagai berikut :

Panjang gelombang operasional: $\lambda_0 = 0.6328\mu m$. Indeks refraktif substrat, metal, dan film secara berturutan $n_S = 1.495$, $n_M = 0.064 + 4i$, $n_F = 0.15 + 3.2i$. Lebar lapisan metal dan film $d_M = 0.03\mu m$, $d_F = 0.5\mu m$. Indeks Refraktif beberapa bahan uji: toluena = 1.49268, nikotin = 1.5265.

Data eksperimen untuk pandu gelombang dengan *cladding* perak, secara bervariasi digunakan 3 eksperimen numerik berikut ini:

- $n_s = 1.49$, $n_F = 1, 59$, $d_M = 0.03\mu m$, $d_F = 0.5\mu m$, $d_A = 0.06\mu m$.
- $n_s = 1.49$, $n_F = 1, 59$, $d_M = 0.5\mu m$, $d_F = 0.03\mu m$, $d_A = 0.045\mu m$.
- $n_s = 1.49$, $n_F = 1, 59$, $d_M = 0.03\mu m$, $d_F = 0.5\mu m$, $d_A = 0.04\mu m$.

3.10 Latihan 10. Biosensor Resonator Cincin.

Gambar 3.9: Biosensor deteksi gas berupa gabungan pandu gelombang dan cincin resonator. Syarat batas Neumann di dinding kiri/kanan, dan di atas, Dirichlet pada dasar. $\beta_{1,2}$ secara berturut-turut merupakan konstanta perambatan di pandu gelombang dan cincin resonator. $n_{0,1,2,3}$ secara berturut-turut merupakan indeks refraktif di udara, pandu gelombang, cincin resonator, dan air.[5]

Indeks refraktif resonator cincin terbuat dari gelas : 1.52, Indeks refraktif pandu gelombang terbuat dari Silikon Oksida : 1.468, Indeks refraktif udara : 1.0, Indeks refraktif air : 1.333. Sumber cahaya eksitasi berupa sinar laser ditembakkan dari sisi kiri pandu gelombang pada panjang gelombang : $[1, 530, 1.560]nm$ Diameter resonator : $100 \mu m$, Tebal resonator : $3 \mu m$, Tebal pandu gelombang : $2 \mu m$, Variasi celah pandu gelombang dan resonator : $[0, 100, 200, 300]\mu m$.

Latihan 10a. Sensor MEMS (Catatan)

Dalam [28], struktur resonator dan pandu gelombang digunakan sebagai sensor MEMS untuk sensor tekanan dengan memanfaatkan efek Fano. Selain untuk menyelesaikan persamaan Helmholtz dengan menggunakan FEFD sebagaimana diuraikan di dalam buklik ini, diperlukan simulasi tambahan untuk medan elastik dan termal yang dapat diselesaikan dengan metode Galerkin dengan cara memodifikasi beberapa baris MATLAB/OCTAVE di Albery dkk [1].

3.11 Latihan 11. Biosensor Sisir/bergerigi Plasmonik

Permasalahan yang dihadapi [17] adalah mencari difraksi dari medan Elektrik dan Magnetik dalam $V_j (j = 1, 2, 3)$. Perhatikan bahwa setiap komponen TE maupun TM di setiap arah ada karena diasumsikan pemasangan kerucut.

Solusi harus bersifat :

- Berlaku persamaan Helmholtz di kedua daerah;
- syarat kondisi radiatif ke arah-Z bahwa gelombang ke arah V_1 (atau V_3) menjalar atau mengalami attenuasi ke arah Z positif (atau negatif);
- Syarat periodik bahwa berlaku hubungan $f(X + d, Y, Z) = f(X, Y, Z)$, serta konstanta fase dalam Y adalah β untuk setiap komponen dari setiap cahaya difraksinya.
- Syarat batas di S_1 dan S_2 bahwa komponen tangensial medan Elektrik dan Magnetik harus kontinu.

Gambar 3.10: Biosensor plasmonik. Skematik dari difraksi oleh kisi metal berlapis dan definisi dari sudut polarisasi.

Parameter yang digunakan adalah $2h = 0.072\mu m$, $d = 0.556\mu m$ dan $e = 0.778\mu m$. Sumber cahaya berupa gelombang bidang monokromatik dengan panjang gelombang $0.633\mu m$. Sementara indeks refraktif dari aluminium dan emas $n_2 = 0.1594 + i3.2166$ dan $n_3 = 1.2078 + i7.0148$

3.12 Latihan 12. Biosensor Plasmonik Berceruk Dalam.

Gambar 3.11: Biosensor plasmonik. Skematik dari difraksi oleh kisi metal berlapis dan definisi dari sudut polarisasi. [18]

Pada latihan ini, merupakan varian dari latihan 11, dimana salah satu celah gerigi memiliki kedalaman yang lebih dari kedalaman gerigi yang lain.

Parameter yang digunakan sebagai berikut :

indeks refraksi slab	: $n_{sl} = 1.45$
indeks refraksi substrat	: $n_{su} = 2.21$
ketebalan slab	: $h_{sl} = 60\mu m$
ketebalan substrat	: $h_{su} = 80\mu m$
perioda gerigi	: $\Lambda = 31\mu m$
panjang	: $L = 300\mu m$

820 **3.13 Latihan 13. SPR (*Surface Plasmon Resonance*)**
 821 **Sensor.**

Gambar 3.12: SPR Sensor, sensor yang memanfaatkan resonansi permukaan plasmonik.

- 822 Besaran fisis yang digunakan untuk SPR:[6]
 indeks refraksi slab gelas : $n_{sl} = 1.52$
 indeks refraksi metal : $n_{Ag} = 2.21$
 823 ketebalan slab gelas : $h_{sl} = 3.2 \mu\text{m}$
 ketebalan metal : $h_{Ag} = 32.4 \text{ nm}$
 panjang : $L = 7.0 \mu\text{m}$

3.14 Latihan 14. Sel Surya Plasmonik.

Gambar 3.13: Unit sel dari sel surya plasmonik lapis tipis. Tersusun dari 4 lapisan terdiri dari Indium Tin Oxide (ITO), bahan penyerap, elektroda emas (Au) atau perak (Ag), dan substrat. Cahaya datang dari arah atas melewati ITO.

Sel Surya plasmonik. Unit sel dari sel surya plasmonik lapis tipis. Tersusun dari 4 lapisan terdiri dari Indium Tin Oxide (ITO), bahan penyerap, elektroda emas (Au) atau perak (Ag), dan substrat dengan ketebalan masing-masing secara berturut-turut $d_1 = 25 \text{ nm}$, $d_2 = 120 \text{ nm}$, $d_3 = 40 \text{ nm}$, dan $d_4 = 40 \text{ nm}$. Jarak antara dua elektroda berturut-turut $d_s = 100 \text{ nm}$ dan periode $P = 200 \text{ nm}$. Cahaya datang dari arah atas melewati ITO. [29]

3.15 Latihan 15. Sel Surya Plasmonik dengan PML.

Gambar 3.14: Sel Surya plasmonik. Unit sel dari sel surya plasmonik lapis tipis. Tersusun dari 4 lapisan terdiri dari Indium Tin Oxide (ITO), bahan penyerap, elektroda emas (Au) atau perak (Ag), dan substrat dengan ketebalan masing-masing secara berturut-turut d_1, d_2, d_3 , dan d_4 . Jarak antara dua elektroda berturut-turut d_s dan periode P (lihat Latihan 4 untuk ukurannya). Cahaya datang dari arah atas melewati ITO. Idealnya syarat batas PML diberikan pada atap dan dasar, serta syarat batas periodik di kiri-kanan [29]

Sebagaimana diperlihatkan di atas, ke arah y diperlukan syarat batas penyerap (*Absorbing Boundary Conditions, ABC*) agar tidak terjadi pantulan gelombang yang sifatnya artifisial di bagian atas dan bawah. Salah satu bentuk ABC adalah berbentuk seperti ini:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{1}{s_y} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{s_y} \frac{\partial u}{\partial y} + k_0^2 u = 0, \text{ dengan } s_y = \begin{cases} 1 - j \frac{\sigma(y)}{\omega \epsilon_0} & \text{di dalam PML} \\ 1, & \text{lainnya.} \end{cases}$$

dengan ϵ_0 merupakan permitivitas ruang bebas, dan ω merupakan frekuensi sudut dari cahaya datang.

839 **3.16 Latihan 16. Alat uji NDT (*Non Destructive***
 840 ***Testing*) pada gelombang THz.**

Gambar 3.15: Alat uji NDT gelombang THz. Tersusun dari 3 domain terdiri dari udara, lensa dielektrik, dan benda uji yang memiliki cacat (defect). Sumber gelombang datang dari port di bagian atas. Syarat batas PML diberikan pada atap dan dasar, serta sisi di kiri-kanan[15].

841 Sebagaimana diperlihatkan di atas, ke arah y diperlukan syarat batas penyerap
 842 (ABC, 'Absorbing Boundary Conditions') agar tidak terjadi pantulan gelombang yang
 843 sifatnya artifisial di bagian atas dan bawah.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{s_y} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{s_y} \frac{\partial u}{\partial y} + k_0^2 u = 0, \text{ dengan } s_y = \begin{cases} 1 - j \frac{\sigma(y)}{\omega \epsilon_0} & \text{di PML atas/bawah} \\ 1, & \text{lainnya.} \end{cases}$$

844 Begitu pula ke arah x diperlukan syarat batas penyerap (ABC, 'Absorbing Bo-
 845 undary Conditions') agar tidak terjadi pantulan gelombang yang sifatnya artifisial di
 846 bagian kiri dan kanan.

$$\frac{1}{s_x} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{s_x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k_0^2 u = 0, \text{ dengan } s_x = \begin{cases} 1 - j \frac{\sigma(x)}{\omega \epsilon_0} & \text{di PML kiri/kanan} \\ 1, & \text{lainnya.} \end{cases}$$

847 Sementara di pojok atas/bawah-kiri/kanan,

$$\frac{1}{s_x} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{s_x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{s_y} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{s_y} \frac{\partial u}{\partial y} + k_0^2 u = 0,$$

848

$$\text{dengan } \begin{cases} s_x = 1 - j \frac{\sigma(x)}{\omega \varepsilon_0} \\ s_y = 1 - j \frac{\sigma(y)}{\omega \varepsilon_0} \end{cases} \quad \text{di PML pojok atas/bawah-kiri/kanan}$$

849 dengan ε_0 merupakan permitivitas ruang bebas, dan ω merupakan frekuensi sudut
850 dari sumber.

3.17 Latihan 17. Nanowire.

Gambar 3.16: SPR Sensor yang memanfaatkan struktur Nanowire metal[30], alih-alih menggunakan lapisan tipis sebagaimana pada Latihan 13.

852 Bandingkan dengan latihan 13, SPR sensor yang memiliki struktur yang serupa.
 indeks refraksi slab gelas : $n_{sl} = 1.52$
 indeks refraksi metal : $n_{Ag} = 2.21$
 853 ketebalan slab gelas : $h_{sl} = 3.2\mu m$
 ketebalan metal : $h_{Ag} = 32.4nm$
 panjang : $L = 7.0\mu m$

3.18 Latihan 18. Antena Nano

Gambar 3.17: Struktur Antenna Nano [7] terbuat dari perak. (a). Antena dipol nano. (b) Jenis-1, Antena dipol nano bertangga 2 (*2-steps tapered dipole*). (c) Jenis-2, Antena dipol nano bertangga 3 (*3-steps tapered dipole*). Panjang gelombang operasional $\lambda = 300nm$. Syarat batas PML

Antenna parameters	conventional dipole	Type 1	Type 2
T	40 nm	40 nm	40 nm
G	10 nm	41.3 nm	49.8 nm
L_1	250 nm	97.5 nm	103.5 nm
W_1	40 nm	31.3 nm	51 nm
L_2	-	103.4 nm	70 nm
W_2	-	11.6 nm	19.5 nm
L_3	-	-	5 nm
W_3	-	-	13.4 nm
Relative volume	1	0.42	0.67

Gambar 3.18: Dimensi rancangan antenna dipol dalam *nanometer*

3.19 Latihan 19. Antena Nano Pemanen Energi Surya.

Gambar 3.19: Struktur antena nano pemanen energi surya dari perak berbentuk kembang[9]. Panjang gelombang operasional $\lambda = 300 - 1400nm$

Ukuran:

$a_1 = 125nm, b_1 = 40nm, a_2 = 100nm, b_2 = 20nm, G = 10nm, \theta = 10^\circ, L = 40nm$.

3.20 Latihan 20. Antena Nano Asimetrik.

Gambar 3.20: Struktur antena nano asimetrik[8] terbuat dari perak. Panjang gelombang operasional $\lambda = 300 \text{ nm}$. Syarat batas PML

Antenna parameters	Tapered dipole	Asymmetric dipole—case 1 (nm)	Asymmetric dipole—case 2
T	40 nm	40	40 nm
G	49.8 nm	41.3	49.8 nm
L_1	5 nm	5.4	6 nm
L_2	70 nm	60.6	99.7 nm
L_3	103.5 nm	102.9	90.6 nm
W_1	13.4 nm	12	5 nm
W_2	19.5 nm	23.6	15 nm
W_3	51 nm	60	60 nm
L_4	—	23.6	56.5 nm
L_5	—	43.7	28.9 nm
L_6	—	101.6	110.8 nm
W_4	—	12	—
W_5	—	27.8	—
W_6	—	59.9	—

Gambar 3.21: Dimensi rancangan antena dipol asimetrik dalam *nanometer*.

Bab 4

Penutup

Baris demi baris perintah dalam MATLAB yang berhubungan langsung dengan implementasi FEM. Ditunjukkan bagaimana FEM diperkenalkan kepada mahasiswa hanya menggunakan beberapa baris kode MATLAB. Beberapa studi kasus yang lengkap script MATLABnya yang diberikan dapat dijalankan pada PC standar tanpa kesulitan. Hal ini juga menunjukkan bagaimana konsep-konsep yang diperoleh dapat dengan mudah diperluas ke masalah lain yang diberikan bersifat 2D. Namun demikian, teknik pemrograman yang diberikan pada 2D dapat digunakan untuk masalah yang lebih kompleks untuk permasalahan di 3D sebagaimana disajikan oleh Silvester dan Ferrari [23]. Lembaga pendidikan dengan sumber daya keuangan yang terbatas dapat mengambil manfaat dari metodologi yang diberikan, karena cukup menggunakan OCTAVE yang mana perintah-perintah yang diberikan dalam MATLAB masih bisa digunakan tanpa kecuali, tidak memerlukan tambahan apapun bahkan pembangkit mesh sekalipun). Materi yang disajikan dalam buklik ini mungkin juga berguna untuk para peneliti pemula yang belum mengenal FEM.

Sebagaimana disampaikan di kata pengantar, buklik ini tujuan utamanya adalah tutorial terkait FEM, khususnya untuk menyelesaikan persamaan Helmholtz, dan implementasinya dalam MATLAB/OCTAVE. Beberapa hal yang dapat dilakukan sebagai lanjutan dari tulisan ini :

- Pengembangan lanjutan menjadi program terintegrasi untuk menyelesaikan model yang menggunakan Persamaan Helmholtz, maupun persamaan Yukawa (modified Helmholtz) yang muncul di bidang ilmu lainnya.
- Implementasi PLM yang lebih 'rigorous', terutama untuk geometri bangun tak beraturan yang ditemui di bidang lain [31].
- Pada Albery dkk [1], disajikan implementasi FEM 3D dalam MATLAB, karenanya untuk geometri 3D sederhana dengan memanfaatkan buku Silvester dan Ferrari [23], dengan mudah diperluas aplikasinya termasuk syarat batas penyerap.
- Juga tidak sulit memperluas buklik ini yang membahas persamaan Helmholtz skalar untuk menyelesaikan persamaan Helmholtz vektorial, dengan memanfaatkan hasil [2].

Bibliografi

- [1] Albery, Jochen and Carstensen, Carsten and Funken, Stefan A, 1999, *Remarks around 50 lines of Matlab: short finite element implementation*, Numerical Algorithms, **20**, 2-3, 117–137
- [2] Anjam, I. and Valdman, J., 2015. Fast MATLAB assembly of FEM matrices in 2D and 3D: Edge elements. Applied Mathematics and Computation, 267, pp.252-263.
- [3] Babuska, Ihlenburg, Paik, Sauer, 1995, *A Generalized Finite Element Method for solving the Helmholtz equation in two dimension with minimal Pollution*, Comp.Meth.Appl.Mech.Eng., V128,3-4, pp 325-359.
- [4] Bulyshev AE, Semenov SY, Souvorov AE, Svenson RH, Nazarov AG, Sizov YE, Tatsis GP. Computational modeling of three-dimensional microwave tomography of breast cancer. IEEE Transactions on Biomedical Engineering. 2001 Sep;48(9):1053-6.
- [5] Cho, H.K. and Han, J., 2012. Numerical study of opto-fluidic ring resonators for biosensor applications. Sensors, 12(10), pp.14144-14157.
- [6] Christensen, D. and Fowers, D., 1996. Modeling SPR sensors with the finite-difference time-domain method. Biosensors and Bioelectronics, 11(6-7), pp.677-684.
- [7] El-Toukhy, Y.M., Hussein, M., Hameed, M.F.O., Heikal, A.M., Abd-Elrazzak, M.M. and Obayya, S.S.A., 2016. Optimized tapered dipole nanoantenna as efficient energy harvester. Optics Express, 24(14), pp.A1107-A1122.
- [8] El-Toukhy, Y.M., Hussein, M., Hameed, M.F.O. and Obayya, S.S.A., 2018. Characterization of asymmetric tapered dipole nanoantenna for energy harvesting applications. Plasmonics, 13(2), pp.503-510.
- [9] El-Toukhy, Y.M., Heikal, A.M., Hameed, M.F.O., Abd-Elrazzak, M.M. and Obayya, S.S.A., 2016, March. Optimization of nanoantenna for solar energy harvesting based on particle swarm technique. In Wireless Information Technology and Systems (ICWITS) and Applied Computational Electromagnetics (ACES), 2016 IEEE/ACES International Conference on (pp. 1-2). IEEE.
- [10] K. Foster, Retaking the field an old computational favourite is overhauled, IEEE Spectrum, July (2004), 5455.
- [11] Funken, S., Praetorius, D. and Wissgott, P., 2011. Efficient implementation of adaptive P1-FEM in Matlab. Computational Methods in Applied Mathematics Comput. Methods Appl. Math., 11(4), pp.460-490.
- [12] A. K. Ghatak and K. Thyagarajan, Optical Electronics (Cambridge University Press, Cambridge, 1989).

- [13] Haldar, M.K., 2006. Introducing the Finite Element Method in electromagnetics to undergraduates using MATLAB. *International journal of electrical engineering education*, 43(3), pp.232-244.
- [14] S. R. H. Hoole, *Computer-Aided Design of Electromagnetic Devices* (Elsevier, New York, 1989).
- [15] Lopato, P., Chady, T., Sikora, R., Gratkowski, S & Ziolkowski, M., 2013, Full wave numerical modelling of terahertz systems for nondestructive evaluation of dielectric structures, *COMPEL-The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering*, **v323**, 736–749.
- [16] J. Lu and D. V. Thiel, Computational and visual electromagnetics using an integrated programming language for undergraduate engineering students, *IEEE Trans. Magnetics*, 36 (2000), 10001003
- [17] Luo, Z., Suyama, T., Xu, X. and Okuno, Y., 2011. A grating-based plasmon biosensor with high resolution. *Progress In Electromagnetics Research*, 118, pp.527-539
- [18] Negara, T.P., Alatas, H., Garnadi, A.D. and Nurdianti, S., 2014. Transmission characteristics of a microscale dielectric slab waveguide device with a deep groove and an embedded metallodielectric grating at low terahertz frequency. *Optik-International Journal for Light and Electron Optics*, 125(13), pp.3134-3137.
- [19] Persson, P.O. and Strang, G., 2004. A simple mesh generator in MATLAB. *SIAM review*, 46(2), pp.329-345.
- [20] S. Ramo, J. R. Whinnery and T. Van Duzer, *Fields and Waves in Communication Electronics* (John Wiley, New York, 1994).
- [21] S. Selleri, A MATLAB experimental framework for electromagnetic education, *IEEE Antennas and Propagat. Mag.*, 45 (2003), 8590.
- [22] S. Selleri, A MATLAB application programmer interface for educational electromagnetics in *Antennas and Propagat. Soc. Symp*, 2227 June, 2003.
- [23] P. P. Silvester and R. L. Ferrari, *Finite Elements for Electrical Engineers* (Cambridge University Press, Cambridge, 1990).
- [24] Singh, V. and Kumar, D., 2009. Theoretical modeling of a metal-clad planar waveguide based biosensors for the detection of pseudomonas-like bacteria. *Progress In Electromagnetics Research*, 6, pp.167-184.
- [25] Sumantyo, J.T.S., Ito, K., Rahardjo, E.T., Saito, K., 2004, *Metoda Beda Hingga Kawasan Waktu*, Penerbit ITB
- [26] Sumantyo, J.T.S. & Ito, K., 2004, *Metoda moment untuk analisa Antena*, Penerbit ITB
- [27] L. Y. Tio, A. A. P. Gibson, B. M. Dillon and L. E. Davis, Weak form finite element formulation for Helmholtz equation, *Int. J. Elect. Enging. Educ.*, 41 (2004), 19.
- [28] Wang, J., Mu, J-Q., Ma, N., and Ma, M-L., 2017, Simulation design of a subwavelength Fano-phonic ring resonator pressure sensor based on Finite Element Method, *Optik-International Journal for Light and Electron Optics*, **137**, 195–202
- [29] Wei, E.I., Choy, W.C. and Chew, W.C., 2010. A comprehensive study for the plasmonic thin-film solar cell with periodic structure. *Optics express*, 18(6), pp.5993-6007.

- 972 [30] Yan, S., Krantz, J., Forberich, K., Pflaum, C. and Brabec, C.J., 2013. Numeri-
973 cal simulation of light propagation in silver nanowire films using time-harmonic
974 inverse iterative method. *Journal of Applied Physics*, 113(15), p.154303.
- 975 [31] Zschiedrich, L., Klose, R., Schdle, A. and Schmidt, F., 2006. A new finite element
976 realization of the perfectly matched layer method for Helmholtz scattering pro-
977 blems on polygonal domains in two dimensions. *Journal of Computational and*
978 *applied mathematics*, 188(1), pp.12-32.

979 Bab 5

980 OCTAVE SINGKAT*

981 OCTAVE merupakan program interaktif yang merdeka dan *opensource* untuk kompu-
982 tasi matriks. OCTAVE dikembangkan sebagai alternatif dari produk komersial popu-
983 lar MATLAB. Kini, OCTAVE dikembangkan secara kolaboratif dalam bentuk konsorsium.
984 Dari homepage tersebut, softwaranya dapat diunduh, juga dapat ditinjau berbagai
985 tambahan yang disumbangkan pengguna.

986 OCTAVE mulai banyak digunakan sebagai lingkungan kerja penyelesaian masalah
987 (*Problem Solving Enviroments*) di dunia penelitian bidang rekayasa dan industri. Dan
988 kini mulai banyak digunakan sebagai wahana pembelajaran.

989 Sejumlah buku pengajaran Aljabar Linear mempergunakan MATLAB sebagai waha-
990 na pembelajaran. Tidak terlalu sulit bagi pengguna OCTAVE untuk merubahnya ke
991 lingkungan yang diperlukan.

992 Elemen Data Dasar.

993 Elemen dasar yang digunakan OCTAVE adalah matriks. Saat pengguna membangkitkan
994 matriks, pengguna dengan cepat dapat melakukan perhitungan yang cukup canggih
995 dengan pemrograman seminimum mungkin.

996 Membentuk matriks dalam OCTAVE sangatlah mudah. Misalnya untuk membang-
997 kitkan matriks berikut :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

998 dengan mudah dapat diketik hal berikut ini :

999 `A = [1 2 3 4 ; 5 6 7 8 ; 9 10 11 12 ; 13 14 15 16 ]`

1000 atau dapat pula diketik dengan cara baris demi baris :

```
1001 A = [1  2  3  4
1002       5  6  7  8
1003       9 10 11 12
1004      13 14 15 16 ]
```

Vektor baris dengan jarak sama dengan mudah dibangkitkan dalam **OCTAVE** menggunakan operasi : . Perintah `x = 3:8` akan membangkitkan sebuah vektor dengan entri bilangan bulat dari 3 hingga 8 dalam **OCTAVE** :

```
1008 x = 3:8
```

yang hasilnya sama saja kalau kita mengetikkan dalam **OCTAVE** :

```
1010 x = [3 4 5 6 7 8]
```

Tidak hanya jarak teratur sebesar 1 saja yang dapat dibangkitkan seperti ini. Misalnya,

```
1013 x = 0.0:0.25:1.0
```

yang hasilnya sama dengan mengetikkan :

```
1015 x = [0.0 0.25 0.5 0.75 1.0]
```

1016 Submatriks

Untuk merujuk pada kolom atau baris dari matriks dengan mudah diperoleh. Misalnya kita hendak merujuk pada baris ke-4 dari matriks A, dapat kita perintahkan dengan cara :

```
1020 baris_4 = A(4,:)
```

Maka **OCTAVE** akan merespons :

```
1022 baris_4 =
```

```
1023
```

```
1024 13 14 15 16
```

tanda : pada `A(4,:)` menyatakan seluruh indeks kolom. Begitu pula untuk merujuk pada kolom, misalnya kolom ke-3, kita berikan perintah :

```
1027 kolom_3 = A(:,3)
```

Maka **OCTAVE** akan merespons :

```
1029 kolom_3 =
```

```
1030 3
```

```
1031 7
```

```
1032 11
```

```
1033 15
```

Dalam **OCTAVE** diberikan kemudahan untuk akses sub-matriks. Misalnya, kita hendak mengambil submatriks di baris-1 sampai 3, dan kolom 2 sampai 4, kita berikan perintah berikut ini :

```
1037 A_13_24 = A(1:3,2:4)
```

Maka **OCTAVE** akan merespons :

```
1039 A_13_24 =
```

```
1040
```

```
1041 2 3 4
```

```
1042 6 7 8
```

```
1043 10 11 12
```

1044 Membangkitkan Matriks.

1045 Dengan mempergunakan fungsi **OCTAVE** yang sudah jadi, pengguna dengan mudah
1046 membangkitkan matriks berdasarkan formula yang diinginkan. Misalnya, perintah

1047 **B = rand(4,4)**

1048 akan membangkitkan matriks **B** berukuran 4×4 yang entrinya merupakan bilangan
1049 acak di selang $[0, 1]$. Fungsi lainnya yang dapat digunakan untuk membangkitkan ma-
1050 triks antara lain **eye**, **zeros**, **ones** dan **toeplitz**. Untuk membangkitkan matriks
1051 segitiga dan diagona tersedia fungsi **triu**, **tril**, dan **diag**.

1052 Perintah membangun matriks dapat digunakan untuk mengkonstruksi matriks ber-
1053 dasarkan partisi. Misalnya, perintah **OCTAVE**

1054 **E = [eye(2,2) ones(2,3); zeros(2,2) [1:3; 3:-1:1]]**

1055 Sehingga akan dibangkitkan matriks :

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

1056 Aritmetika Matriks

1057 Aritmetika matriks dalam **OCTAVE** cukup sederhana. Perkalian dua buah matriks **A**
1058 dan **B** dengan mudah dilakukan dengan menuliskan perintah **A*B**. Penjumlahan dan
1059 selisih dua buah matriks pula mudah dilakukan dengan memberikan perintah seseder-
1060 hana berikut ini **A+B** dan **A-B**. Sedangkan transposisi matriks dengan mudah dapat
1061 menggunakan perintah :

1062 **A'**

1063 Jika **c** merupakan vektor (kolom) di $\mathbb{R}^4$, maka solusi sistem persamaan linear **Ax = c**
1064 dapat dihitung dengan memberikan perintah :

1065 **x = A \ c**

1066 Fungsi OCTAVE

1067 Untuk menghitung nilai eigen dari matriks segi **A**, cukup mengetikkan **spec(A)**. Se-
1068 mentara vektor eigen dan nilai eigen dapat diperoleh dengan memberikan perintah :

1069 **[X D] = spec(A)**

1070 dengan matriks **D** berupa matriks diagonal yang pada diagonalnya memuat nilai eigen
1071 matrix **A**, sedangkan matriks **X** yang kolomnya merupakan vektor eigen matriks **A**
1072 yang berkaitan dengan nilai eigen pada diagonal **D**.

1073 Begitu pula beberapa fungsi untuk matriks tersedia misalnya determinan, invers,
1074 bilangan kondisi, norm dan rank sebuah matriks yang perintahnya hanya terdiri dari
1075 perintah satu-kata. Faktorisasi matriks seperti LU, QR, Cholesky, dekomposisi Schur
1076 dan dekomposisi nilai singular juga dapat dihitung dengan perintah satu-kata. Mi-
1077 salnya, perintah

1078 **[Q R] = qr(A)**

1079 akan menghasilkan matriks ortogonal **Q** dan matriks segi tiga atas **R**, dengan ukuran
1080 yang sama dengan **A**, sehingga : **A = Q*R**.

1081 Ciri pemrograman

1082 OCTAVE memiliki semua struktur kendali pemrograman sebagaimana ditemukan di
 1083 pemrograman bahasa tingkat tinggi seperti `for`, `while`, dan `if`. Hal ini memung-
 1084 kinkan pengguna untuk menulis program OCTAVE berdasarkan kebutuhan mereka dan
 1085 menggenapkan fungsi OCTAVE yang ada. Beberapa hal yang perlu di catat antara lain,
 1086 OCTAVE akan mencetak setiap perintah kecuali bila pada akhir perintah tersebut di-
 1087 berikan titik koma. Bila mempergunakan perintah berulang, sebaiknya dalam setiap
 1088 pengulangan perintahnya diakhiri dengan titik koma, untuk menghindari hasil antara
 1089 diperlihatkan di layar.

1090 OCTAVE file.

1091 Pengguna dapat memperluas fungsionalitas OCTAVE dengan menambahkan program
 1092 baru yang dibutuhkannya. Program di OCTAVE dituliskan dalam sebuah file yaitu `.m`
 1093 dan sering dirujuk sebagai OCTAVE m-file.

1094 *Script files* ialah file yang isinya merupakan serangkaian perintah OCTAVE . Se-
 1095 mua variabel dalam file ini bersifat global, sehingga nilai dari variabel tersebut akan
 1096 berubah setiap script ini dijalankan. Sebagai contoh, misalkan seseorang ingin meng-
 1097 hitung nolitas dari sebuah matriks, maka disusunlah sebuah script file dengan nama
 1098 `nolitas.m` yang isinya ialah perintah berikut ini :

```
1099 [n_baris n_kolom] = size(A);
1100 nol_dim = n_kolom - rank(A) ;
```

1101 Dengan mengeksekusi perintah `nolitas` akan mengakibatkan kedua baris perintah di
 1102 atas akan dilaksanakan. Salah satu kelemahan untuk menentukan nolitas seperti di
 1103 atas ialah, matriksnya selalu bernama `A` dan nilai variabel `n_baris` dan `n_kolom` selalu
 1104 berubah manakala perintah tersebut dilaksanakan. Sebagai pilihan, dapat digunakan
 1105 **function file**.

1106 Sebuah function file dimulai dengan sebuah deklarasi fungsional yang berbentuk :

```
1107 [oarg1,oarg2,...,oargj] = f_nama(inarg1,inarg2,...,inargk)
```

1108 Semua variabel dalam function file bersifat lokal. Bila function files ini dipanggil,
 1109 maka hanya variabel output saja yang berubah setiap saat bekerja. Misalnya, disusun
 1110 sebuah function file dengan nama `nolitas.m` untuk menghitung nolitas matriks sebagai
 1111 berikut :

```
1112 function k = nolitas(A)
1113 % perintah nolitas(A) akan menghitung dimensi
1114 % ruang nol dari A.
1115 [n_baris, n_kolom] = size(A);
1116 k = n_kolom - rank(A) ;
```

1117 Baris dengan tanda `%` merupakan komentar dan tidak akan dieksekusi. Bila fun-
 1118 ction files tersebut disimpan, fungsi tersebut dapat dipakai sebagaimana perintah
 1119 OCTAVE biasa. Misalnya, jika kita tetapkan

```
Test_matriks = [1 2 3; 4 5 6; 7 8 9]
```

1120 kemudian kita gunakan perintah :

```
n = nolitas(Test_matriks)
```

1121 OCTAVE akan memberikan jawaban : `n = 1`.

1122 Fungsi pembangkit matriks.

1123 Sejumlah fungsi pembangkit matriks yang cukup bermanfaat antara lain :

eye	matriks identitas
zeros	matriks nol
ones	matriks satu
diag	lihat di bawah
triu	bagian segi tiga atas sebuah matriks
tril	bagian segi tiga bawah sebuah matriks
rand	matriks yang dibangkitkan secara acak
toeplitz	see help toeplitz

1124 Misalnya, **zeros(m,n)** menghasilkan sebuah matriks nol berukuran m -kali- n **zeros(n,n)**
 1125 menghasilkan sebuah matriks nol berukuran n -kali- n ; jika A sebuah matriks, maka
 1126 **zeros(A)** menghasilkan sebuah matriks nol berukuran sama dengan ukuran A .

1127 Jika x sebuah vektor, **diag(x)** ialah sebuah matriks diagonal dengan x sepanjang
 1128 diagonalnya; jika A sebuah matriks segi, maka **diag(A)** ialah sebuah vektor yang isinya
 1129 diagonal dari A . Lalu apakah **diag(diag(A))**? Cobalah.

1130 Matriks dapat dibangun dari blok. Misalnya, jika A sebuah matriks berukuran
 1131 3-kali-3, maka

$$B = [A, \text{zeros}(3, 2); \text{zeros}(2, 3), \text{eye}(2, 2)]$$

1132 akan merupakan sebuah matriks tertentu berukuran 5-kali-5.

1133 LAMPIRAN

LAMPIRAN 1

1134

1135 Script MATLAB lengkap untuk kasus 1,

```

1136 load koordinat1.dat; koordinat1(:,1)=[]; %koordinat
1137 load elemen1.dat; elemen1(:,1)=[]; % elemen hingga segitiga
1138 load deltaomega.dat; deltaomega(:,1)=[];
1139 koordinat = koordinat1;
1140 elemen = elemen1;
1141 NodeBebas=setdiff(1: size(koordinat,1), unique(deltaomega));
1142 A = sparse(size(koordinat,1), size(koordinat,1));
1143 b = sparse(size(koordinat,1),1);
1144 % 1. menyusun matriks A1
1145 % dengan memanggil fungsi stima
1146 for i = 1:size(elemen,1)
1147 A(elemen(i,:), elemen(i,:)) = ...
1148     A(elemen(i,:), elemen(i,:)) ...
1149     + stima(koordinat(elemen(i,:),:));
1150 end
1151 % 2. menyusun matriks A2
1152 for i = 1:size(elemen,1)
1153 A(elemen(i,:), elemen(i,:)) = A(elemen(i,:), elemen(i,:)) + ...
1154     det([ones(1,3); koordinat(elemen(i,:),:)]') * ...
1155     (diag(ones(3,1)) + ones(3)) * ...
1156     k0(sum(koordinat(elemen(i,:),:))/3)/24;
1157 end
1158 u = sparse(size(koordinat,1),1);
1159 u(unique(deltaomega)) = deltaO(koordinat(unique(deltaomega),:));
1160 b = b - A*u;
1161 % 3. Komputasi solusi
1162 u(NodeBebas) = A(NodeBebas, NodeBebas) \ b(NodeBebas);
1163 % 4. Grafika
1164 show(elemen, [], koordinat, full(u));
1165 xlabel('x'); ylabel('y'); zlabel('u');

```

LAMPIRAN 2 A

Script MATLAB lengkap untuk kasus 2a

```

1166
1167
1168 % inisialisasi
1169 load koordinat1.dat; koordinat1(:,1)=[]; % koordinat nodes
1170 load elemen1.dat; elemen1(:,1)=[]; % elemen segitiga
1171 load neumann1.dat; neumann1(:,1)=[];
1172 load dirichlet1.dat; dirichlet1(:,1)=[];
1173 koordinat = koordinat1;
1174 elemen = elemen1;
1175 neumann = neumann1;
1176 dirichlet = dirichlet1;
1177 for k = 1:3
1178     [koordinat, elemen, dirichlet, neumann] ...
1179     = refineRGB(koordinat, elemen, dirichlet, neumann, []);
1180 end
1181 NodeBebas=setdiff(1:size(koordinat,1),unique(dirichlet));
1182 A = sparse(size(koordinat,1),size(koordinat,1));
1183 b = sparse(size(koordinat,1),1);
1184 % 1. menyusun matriks A1
1185 % dengan memanggil fungsi stima_1
1186 for i = 1:size(elemen,1)
1187     A(elemen(i,:), elemen(i,:)) = ...
1188         A(elemen(i,:), elemen(i,:)) ...
1189         + stima(koordinat(elemen(i,:),:));
1190 end
1191 % 2. menyusun matriks A2
1192 for i = 1:size(elemen,1)
1193     A(elemen(i,:), elemen(i,:)) = ...
1194     A(elemen(i,:), elemen(i,:)) + ...
1195     det([ones(1,3); koordinat(elemen(i,:),:)])*...
1196     (diag(ones(3,1))+ones(3))*...
1197     k1(sum(koordinat(elemen(i,:),:))/3)/24;
1198 end
1199 % 3. Gaya luar
1200 for i = 1:size(elemen,1)
1201     b(elemen(i,:)) = b(elemen(i,:)) + ...
1202     det([ones(1,3); koordinat(elemen(i,:),:)])*...
1203     g(sum(koordinat(elemen(i,:),:))/3)/6;
1204 end
1205 %
1206 % 4. Syarat Batas Neumann
1207 %
1208 for i = 1:size(neumann,1)
1209     b(neumann(i,:))=b(neumann(i,:)) +...
1210     norm(koordinat(neumann(i,1,:)) - ...
1211     koordinat(neumann(i,2,:)) *...
1212     q1(sum(koordinat(neumann(i,:),:))/2)/2;
1213 end
1214 %

```



```

1215 % 5. Syarat Batas Dirichlet
1216 %
1217 u = sparse(size(koordinat,1),1);
1218 u(unique(dirichlet)) = udl(koordinat(unique(dirichlet),:));
1219 b = b - A*u;
1220 %
1221 % 6. Komputasi solusi
1222 %
1223 u(NodeBebas) = A(NodeBebas,NodeBebas) \ b(NodeBebas);
1224 %
1225 % 7. Grafika
1226 %
1227 show(elemen,[],koordinat,full(u));
1228 xlabel('x');ylabel('y');zlabel('u');

```

LAMPIRAN 2 B

Script MATLAB lengkap untuk kasus 2b

```

1229
1230
1231 load koordinat2.dat; koordinat2(:,1)=[];%koordinat node
1232 load elemen2.dat; elemen2(:,1)=[];%daftar elemen segitiga
1233 load neumann3.dat; neumann3(:,1)=[];
1234 load dirichlet3.dat; dirichlet3(:,1)=[];
1235 koordinat=koordinat2;
1236 elemen=elemen2;
1237 neumann = neumann3;
1238 dirichlet = dirichlet3;
1239 for k = 1:5
1240     [koordinat,elemen,dirichlet,neumann] ...
1241     = refineRGB(koordinat,elemen,dirichlet,neumann,[]);
1242 end
1243 NodeBebas=setdiff(1:size(koordinat,1),unique(dirichlet));
1244 A = sparse(size(koordinat,1),size(koordinat,1));
1245 b = sparse(size(koordinat,1),1);
1246 % 1. menyusun matriks A1
1247 % dengan memanggil fungsi stima_1
1248 for i = 1:size(elemen,1)
1249     A(elemen(i,:),elemen(i,:)) = ...
1250     A(elemen(i,:),elemen(i,:)) ...
1251     + stima(koordinat(elemen(i,:),:));
1252 end
1253 % 2. menyusun matriks A2
1254 for i = 1:size(elemen,1)
1255     A(elemen(i,:),elemen(i,:)) = ...
1256     A(elemen(i,:),elemen(i,:))+...
1257     det([ones(1,3);koordinat(elemen(i,:),:)]*...
1258     (diag(ones(3,1))+ones(3))*...
1259     k1(sum(koordinat(elemen(i,:),:))/3)/24;
1260 end
1261 % 3. Gaya luar
1262 for i = 1:size(elemen,1)
1263     b(elemen(i,:)) = b(elemen(i,:))+...
1264     det([ones(1,3);koordinat(elemen(i,:),:)]*...
1265     g(sum(koordinat(elemen(i,:),:))/3))/6;
1266 end
1267 % 4. Syarat Batas Neumann
1268 for i = 1:size(neumann,1)
1269     b(neumann(i,:))=b(neumann(i,:)) +...
1270     norm(koordinat(neumann(i,1,:))- ...
1271     koordinat(neumann(i,2,:)) *...
1272     q1(sum(koordinat(neumann(i,:),:))/2)/2;
1273 end
1274 % 5. Syarat Batas Dirichlet
1275 u = sparse(size(koordinat,1),1);
1276 u(unique(dirichlet)) = ud1(koordinat(unique(dirichlet),:));
1277 b = b - A*u;

```

```

1278 % 6. Komputasi solusi
1279 u(NodeBebas) = A(NodeBebas,NodeBebas) \ b(NodeBebas);
1280 %
1281 % 7. Grafika
1282 %
1283 show(elemen,[],koordinat,full(u));
1284 xlabel('x');ylabel('y');zlabel('u');

```

LAMPIRAN 2 C

Script MATLAB lengkap untuk kasus 2c

```

1285
1286
1287 load koordinat3.dat; koordinat3(:,1)=[]; % koordinat
1288 load elemen3.dat; elemen3(:,1)=[]; % elemen segitiga
1289 load neumann4.dat; neumann4(:,1)=[];
1290 load dirichlet4.dat; dirichlet4(:,1)=[];
1291 koordinat=koordinat3;
1292 elemen=elemen3;
1293 neumann = neumann4;
1294 dirichlet = dirichlet4;
1295 for k = 1:4
1296     [koordinat, elemen, dirichlet, neumann] ...
1297     = refineRGB(koordinat, elemen, dirichlet, neumann, []);
1298 end
1299 NodeBebas=setdiff(1:size(koordinat,1),unique(dirichlet));
1300 A = sparse(size(koordinat,1),size(koordinat,1));
1301 b = sparse(size(koordinat,1),1);
1302 % 1. menyusun matriks A1
1303 % dengan memanggil fungsi stima_1
1304 for i = 1:size(elemen,1)
1305     A(elemen(i,:), elemen(i,:)) = ...
1306     A(elemen(i,:), elemen(i,:)) ...
1307     + stima(koordinat(elemen(i,:),:));
1308 end
1309 % 2. menyusun matriks A2
1310 for i = 1:size(elemen,1)
1311     A(elemen(i,:), elemen(i,:)) = ...
1312     A(elemen(i,:), elemen(i,:)) + ...
1313     det([ones(1,3); koordinat(elemen(i,:),:)]') * ...
1314     (diag(ones(3,1)) + ones(3)) * ...
1315     k2(sum(koordinat(elemen(i,:),:))/3)/24;
1316 end
1317 % 3. Gaya luar
1318 for i = 1:size(elemen,1)
1319     b(elemen(i,:)) = b(elemen(i,:)) + ...
1320     det([ones(1,3); koordinat(elemen(i,:),:)]') * ...
1321     g(sum(koordinat(elemen(i,:),:))/3)/6;
1322 end
1323 % 4. Syarat Neumann
1324 for i = 1:size(neumann,1)
1325     b(neumann(i,:)) = b(neumann(i,:)) + ...
1326     norm(koordinat(neumann(i,1,:)) - ...
1327     koordinat(neumann(i,2,:)) * ...
1328     q1(sum(koordinat(neumann(i,:),:))/2)/2;
1329 end
1330 % 5. Syarat Dirichlet
1331 u = sparse(size(koordinat,1),1);
1332 u(unique(dirichlet)) = ud3(koordinat(unique(dirichlet),:));
1333 b = b - A*u;

```

```
1334 % 6. Komputasi solusi
1335 u(NodeBebas) = A(NodeBebas,NodeBebas) \ b(NodeBebas);
1336 % 7. Grafika
1337 show(elemen,[],koordinat,full(u));
1338 xlabel('x');ylabel('y');zlabel('u');
```

LAMPIRAN 2 D

Script MATLAB lengkap untuk kasus 2d

```

1339
1340
1341
1342 load koordinat4.dat; koordinat4(:,1)=[]; % koordinat
1343 load elemen4.dat; elemen4(:,1)=[]; % elemen segitiga
1344 load neumann5.dat; neumann5(:,1)=[];
1345 load dirichlet5.dat; dirichlet5(:,1)=[];
1346 koordinat=koordinat4;
1347 elemen=elemenB4;
1348 neumann = neumann5;
1349 dirichlet = dirichlet5;
1350 for k = 1:4
1351     [koordinat, elemen, dirichlet, neumann] ...
1352     = refineRGB(koordinat, elemen, dirichlet, neumann, []);
1353 end
1354 NodeBebas=setdiff(1:size(koordinat,1), unique(dirichlet));
1355 A = sparse(size(koordinat,1), size(koordinat,1));
1356 b = sparse(size(koordinat,1), 1);
1357 % 1. menyusun matriks A1
1358 % dengan memanggil fungsi stima_1
1359 for i = 1:size(elemen,1)
1360     A(elemen(i,:), elemen(i,:)) = ...
1361     A(elemen(i,:), elemen(i,:)) ...
1362     + stima(koordinat(elemen(i,:), :));
1363 end
1364 % 2. menyusun matriks A2
1365 for i = 1:size(elemen,1)
1366     A(elemen(i,:), elemen(i,:)) = ...
1367     A(elemen(i,:), elemen(i,:)) + ...
1368     det([ones(1,3); koordinat(elemen(i,:), :)]') * ...
1369     (diag(ones(3,1)) + ones(3)) * ...
1370     k3(sum(koordinat(elemen(i,:), :))/3)/24;
1371 end
1372 % 3. Gaya luar
1373 for i = 1:size(elemen,1)
1374     b(elemen(i,:)) = b(elemen(i,:)) + ...
1375     det([ones(1,3); koordinat(elemen(i,:), :)]') * ...
1376     g(sum(koordinat(elemen(i,:), :))/3)/6;
1377 end
1378 % 4. Syarat Neumann
1379 for i = 1:size(neumann,1)
1380     b(neumann(i,:)) = b(neumann(i,:)) + ...
1381     norm(koordinat(neumann(i,1), :) - ...
1382     koordinat(neumann(i,2), :)) * ...
1383     q1(sum(koordinat(neumann(i,:), :))/2)/2;
1384 end
1385 % 5. Syarat Dirichlet
1386 u = sparse(size(koordinat,1), 1);
1387 u(unique(dirichlet)) = ud3(koordinat(unique(dirichlet), :));

```

```
1388 b = b - A*u;
1389 % 6. Komputasi solusi
1390 u(NodeBebas) = A(NodeBebas,NodeBebas) \ b(NodeBebas);
1391 % 7. Grafika
1392 show(elemen,[],koordinat,full(u));
1393 xlabel('x');ylabel('y');zlabel('u');
```

LAMPIRAN 3

PENJELASAN SINGKAT TENTANG PEMBENTUKAN GRID

1394
1395

1396 Untuk dapat melakukan pekerjaan secara mandiri membangun grid yang diperluk-
1397 an, akan ditampilkan diskusi singkat dan penggunaan sederhana menggunakan per-
1398angkat **Distmesh** [19] yang tersedia dengan bebas, dan didiskusikan secara rinci dalam:

1399 P.O. Persson, G. Strang, A Simple Mesh Generator in MATLAB,
1400 SIAM Review, 46(2), 329-345, 2004
1401 <http://www-math.mit.edu/persson/mesh/>

1402 Tulisan ini juga berfungsi menyediakan user guide yang bersifat komprehensif. **DistMesh**
1403 sangat sesuai karena mudah penggunaannya dan permulaan yang baik sebelum ber-
1404 gerak ke arah yang lebih kompleks dan aplikasi yang lebih canggih tanpa perlu ragu
1405 menggunakan software pembentuk mesh selanjutnya.

1406 Selanjutnya kami menjelaskan bagaimana **DistMesh** dapat memproses secara oto-
1407 matis untuk membentuk mesh 1D dan 2D yang seragam maupun yang tidak seragam.
1408 Kami akan memberikan sedikit penggunaan tulisan dan contoh bagaimana menyusun
1409 dan mendefinisikan sebuah mesh, bagaimana mendefinisikan tipe batas yang dibutuh-
1410 kan untuk kondisi batas yang spesifik, menggunakan fungsi jarak untuk menggambarkan
1411 geometri, dan bagaimana menyusun sebuah mesh periodik yang sederhana.

1412 **B1. Dasar**

1413 Kami menggambarkan mengenai penggunaan **DistMesh** untuk mendapatkan (VX,
1414 VY) dan EToV dibutuhkan untuk menghitung konektivitas dan sebagainya. **DistMesh**
1415 berbasis pada penggunaan fungsi jarak untuk geometri yang spesifik. Dalam hal ini
1416 fungsi jarak dapat dikombinasikan dan dimanipulasi untuk menetapkan apakah dida-
1417 lam atau diluar geometri tertentu adalah negatif.

1418 Bentuk umum bagian dari **DistMesh** adalah:

1419 `>> function [p,t] = distmeshnd(fd,fh,h0,bbox,pfix,varargin);`

1420 Argumennya sebagai berikut:


```

1421 Input: 6 Variabel berupa
        Fd      : Fungsi yang menandakan jarak dari masing-masing node ke
                  batas
        Fh      : Fungsi yang menunjukkan panjang sisi relative untuk semua
                  titik input
1422        H0      : Ukuran grid awal, yang menjadikan ukuran grid
                  teraproksimasi untuk grid
        Bbox     : Box terikat untuk geometri
        Pfix     : Array dari node-node yang tetap
        Varargin : Array optional
1423 Output: dua variabel berupa
        P      : Daftar dari vertex, contohnya  $VX=p(:,1)$ ,  $VY= p(:,2)$ , dan lain lain
1424        T      : Daftar dari elemen,  $EToV=t$ 
1425        Kemudian perhatikan sebuah contoh pembentukan mesh satu D sederhana pada
1426 segmen garis tidak seragam yang dikelompokan pada  $x = 0$  dalam  $\Omega = [-1, 1]$ . Kami
1427 mendefinisikan fungsi jarak yang ditandai sebagai:

1428 % distance function for a circle about xc=0
1429 >> fd=inline(abs(p)-1,p);

1430        Dimana  $P$  bisa dijadikan koordinat  $X$ . Pada kasus ini, fungsi jarak bisa dikhususkan
1431 melalui sebuah fungsi utama, tapi hal tersebut tidak dibutuhkan. Untuk ukuran
1432 grid yang tidak seragam kita harus mengkhususkan sebuah fungsi ukuran elemen yang
1433 menggambarkan distribusi relatif melalui domain, sehingga kumpulan didalam fungsi
1434 ini tidak menggambarkan ukuran grid yang aktual. Sebagaimana contoh.

1435 % distribution weight function
1436 >> fh=inline(abs(p)*0.075+0.0125,p);

1437        Mesh dibentuk melalui bagian:

1438 % generate non-uniform example mesh in 1D using DistMesh
1439 >> h0 = 0.025; % chosen element spacing
1440 >> [p,t]=distmeshnd(fd,fh,h0,[-1;1],[]);
1441 >> K = size(t,1); Nv = size(p,1);

1442        Dua tabel ditunjukan yang secara lengkap mendefinisikan mesh, dan kita bisa
1443 menunjukan sejumlah elemen  $K$ , dan vertexs,  $Nv$ , Secara langsung dari ukuran array
1444 ini.
1445        Sebuah mesh yang seragam bisa dibentuk melalui fungsi intrinsik bernama huniform,
1446 sebagai berikut ini:

1447 % generate uniform example mesh in 1D using DistMesh
1448 >> [p,t]=distmeshnd(fd,@huniform,h0,[-1;1],[]);

1449        Node vertexs ditambahkan menjadi:

1450 >> [x,i]=sort(p(t));
1451 >> t=t(i,:);
1452 >> t=sort(t,ascend);
1453 >> EToV = t; VX = p(:,1);

```

Ini bisa ditunjukkan secara langsung pada solver. Langkah sederhana ini dikumpulkan dalam script yang kecil `MeshGenDistMesh1D.m`.

```

1456 ----- [MeshGenDistMesh1D.m] -----
1457 function [Nv, VX, K, EToV] = MeshGenDistMesh1D()
1458 % function [VX, K, EToV] = MeshGenDistMesh1D()
1459 % Purpose : Generate 1D mesh using DistMesh;
1460 % distance function for a circle about xc=0
1461 fd=inline( abs(p)-1 , p );
1462 % distribution weight function
1463 fh=inline( abs(p)*0.075+0.0125 , p );
1464 % generate non-uniform example mesh in 1D using DistMesh
1465 h0 = 0.025; % chosen element spacing
1466 [p,t]=distmeshnd(fd,fh,h0,[-1;1],[]);
1467 K = size(t,1); Nv = K+1;
1468 % Sort elements in ascending order
1469 [x,i]=sort(p(t));
1470 t=t(i,:);
1471 Met=sort(t , ascend ) ;
1472 EToV = t; VX = p(:,1) ;
1473 return

```

Grid 2D bisa dibentuk dalam cara yang sama. Perhatikan sebagaimana contoh pembentukan grid equidistant dalam sebuah domain melingkar, dikelilingi oleh $[-1,1]^2$. Berikutnya outline dibawah kami lanjutkan sebagai :

```

1477 >> fd = inline(sqrt(sum(p.^2))-1,p);
1478 >> [p,t] = distmeshnd(fd,@huniform,0.2,[-1 -1; 1 1], []);
1479 >> VX = p(:,1); VY = p(:,2);
1480 >> K = size(t,1); Nv = size(p,1);
1481 >> EToV = t;

```

Catatan: Dalam `DistMesh` tidak menghasilkan susunan elemen vertex yang berlawanan arah jarum jam, untuk itu perlu diperiksa dan dikoreksi semua elemen untuk memastikannya. Contoh:

```

1485 >> ax = VX(EToV(:,1)); ay = VY(EToV(:,1));
1486 >> bx = VX(EToV(:,2)); by = VY(EToV(:,2));
1487 >> cx = VX(EToV(:,3)); cy = VY(EToV(:,3));
1488 >> D = (ax-cx).*(by-cy)-(bx-cx).*(ay-cy);
1489 >> i = find(D<0);
1490 >> EToV(i,:) = EToV(i,[1 3 2]);

```

Disini banyak beberapa contoh dalam user guide `DistMesh` yang bisa menunjukkan daftar dari fungsi yang sederhana; contohnya, untuk membentuk grid persegi panjang seseorang bisa menggunakan:

```

1494 ----- [ MeshGenDistMesh2D] -----
1495 function [VX, VY, K, EToV] = MeshGenDistMesh2D()
1496 % function [VX, VY, K, EToV] = MeshGenDistMesh2D()
1497 % Purpose : Generate 2D square mesh using DistMesh;
1498 % By Allan P. Engsig-Karup

```

```

1499 % Parameters to set/define
1500 % fd Distance function for mesh boundary
1501 % fh Weighting function for distributing elements
1502 % h0 Characteristic length of elements
1503 % Bbox Bounding box for mesh
1504 % param Parameters to be used in function call with DistMesh
1505 fd = inline(directangle(p,-1,1,-1,1),p);
1506 fh = @huniform;
1507 h0 = 0.25;
1508 Bbox = [-1 -1; 1 1];
1509 param = [];
1510 % Call distmesh
1511 [Vert,EToV]=distmesh2d(fd,fh,h0,Bbox,param);
1512 VX = Vert(:,1); VY = Vert(:,2);
1513 Nv = length(VX); K = size(EToV,1);
1514 % Reorder elements to ensure counter clockwise orientation
1515 ax = VX(EToV(:,1)); ay = VY(EToV(:,1));
1516 bx = VX(EToV(:,2)); by = VY(EToV(:,2));
1517 cx = VX(EToV(:,3)); cy = VY(EToV(:,3));
1518 D = (ax-cx).*(by-cy)-(bx-cx).*(ay-cy);
1519 i = find(D<0);
1520 EToV(i,:) = EToV(i,[1 3 2]);
1521 return

```

1522 B2. Membentuk Peta Batas

1523 Terkadang banyak contoh dan grid secara umum ditunjukkan dalam user guide
1524 **DistMesh**; pembentukan peta batas yang khusus untuk menunjukkan kondisi batas
1525 yang berbeda dibutuhkan sedikit langkah: Tabel batas untuk semua muka elemen
1526 lebih mudah didapatkan dari array **EToE** sebagai:

```

1527 >> BCType = int8(not(EToE));

```

1528 Berikutnya, jika kita ingin membedakan batas yang berbeda, kita membutuhkan
1529 cara yang efisien untuk syarat batas yang khusus. Secara konvensional bisa dilakukan
1530 dengan fungsi jarak dengan syarat $d = 0$ pada batas dan $d <>$ diluar batas. Perhatikan
1531 contoh berikut ini. Kita set up sebuah unit lingkaran dengan lubang di bagian tengah
1532 sebagai:

```

1533 >> fd=inline(-0.3+abs(0.7-sqrt(sum(p.2,2))));
1534 >> [p,t]=distmeshnd(fd,@huniform,0.1,[-1,-1;1,1],[]);

```

1535 Dengan mudah hanya melalui dua baris perintah pada kode **DistMesh**. Kita ingin
1536 mendefinisikan peta **mapI** dan **mapO** yang bisa mengkhususkan kondisi batas yang ber-
1537 beda di dalam dan diluar batas pada lingkaran berjejari satu satuan dengan bolongan
1538 di tengah. Kami catat bahwa fungsi jarak menggambarkan batas secara lengkap (lihat
1539 gambar B1)

```

1540 >> fd inner=inline(sqrt(sum(p.2,2))-0.4,p);
1541 >> fd outer=inline(sqrt(sum(p.2,2))-1,p);

```

1542 Penggunaan fungsi ini bisa menentukan daftar indeks dari node vertex pada batas
1543 melalui:

Gambar 5.1: *Mesh* Ω berupa cincin

```

1544 >> tol = 1e-8; % tolerance level used for determining nodes
1545 >> nodesInner = find( abs(fd inner(p))<tol );
1546 >> nodesOuter = find( abs(fd outer(p))<tol );

```

1547 Disini `tol` adalah toleransi yang diberikan yang dapat diubah bergantung pada
 1548 grid. Nilai tersebut bisa lebih rendah dibandingkan jarak minimum lokal diantara
 1549 node-node. Oleh karena itu dianjurkan untuk selalu memeriksa peta batas yang di
 1550 definisikan. Cara mudah untuk melakukan ini adalah:

```

1551 % choose a map to plot
1552 >> MAP = nodesInner;
1553 % show all vertices and circle out map nodes in red
1554 >> plot(p(:,1),p(:,2),k.,p(MAP,1),p(MAP,2),ro);

```

1555 Gambar B.1 Mesh unit lingkaran

1556 Definisikan konstanta:

```

1557 >> In = 1;
1558 >> Out = 2;

```

1559 Dengan menggunakan konstanta tersebut untuk memeriksa informasi dalam tabel,
 1560 **BCType**, melalui:

```

1561 >> BCType = CorrectBCTable(EToV,BCType,nodesInner,In);
1562 >> BCType = CorrectBCTable(EToV,BCType,nodesOuter,Out);

1563     Dimana penggunaan BCType masuk dalam kode yang tepat untuk batas dalam
1564 array: menggunakan:

1565 ----- [CorrectBCTable] -----
1566 function BCType = CorrectBCTable(EToV,BCType,mapnodes,BCcode)
1567 % function BCType = CorrectBCTable(EToV,BCType,mapnodes,BCcode);
1568 % Purpose: Setup BCType for boundary conditions in 2D
1569 % By Allan P. Engsig-Karup
1570 Globals2D;
1571 VNUM = [1 2;2 3;3 1]; % face orientations
1572 for k = 1:K
1573     % Test for each edge
1574     for l = 1:Nfaces
1575         m = EToV(k,VNUM(l,1)); n = EToV(k,VNUM(l,2));
1576         % if both points are on the boundary then it is a boundary
1577         % point!
1578         ok=sum(ismember([m n],mapnodes));
1579         if ok==2
1580             BCType(k,l)=BCcode;
1581         end;
1582     end
1583 end
1584 return

1585     Pembentukan peta batas yang tepat digambarkan menggunakan perintah
1586 ConstructMap.m setelah dilengkapi informasi BCType.

1587 % Construct special face from the BCType table
1588 >> mapI = ConstructMap(BCType, In);
1589 >> mapO = ConstructMap(BCType, Out);

1590 ----- [ConstructMap] -----
1591 function [map] = ConstructMap(BCType, BCcode)
1592 % function map = ConstructMap(BCType, BCcode);
1593 % Purpose: Construct boundary map from the BCType table
1594 % By Allan P. Engsig-Karup, 07-12-2006.
1595 Globals2D;
1596 % Determine which faces in which elements which have
1597 % the specified BCs:
1598 % fids = face id s , eids = element id s ;
1599 [eids,fids] = find(BCType==BCcode);
1600 % initialize length of new map
1601 map = [];
1602 for n=1:length(fids) % go over each boundary face of
1603                     % BCcode type
1604     map=[map(eids(n)-1)*Nfaces*...
1605         Nfp+[ (fids(n)-1)*Nfp + [1:Nfp] ]];
1606 end
1607 return

```

LAMPIRAN 4

1608

1609

Script MATLAB untuk Utilities

1610

- [1.] Refine mesh [11]

1611

```
function [ coordinates , newElements , varargout ] ...
```

1612

```
    = refineRGB( coordinates , elements , varargin )
```

1613

1614

```
%refineRGB: local refinement of finite element mesh by
```

1615

```
%red-green-blue, refinement, where marked elements are
```

1616

```
%red-refined.
```

1617

```
%
```

1618

```
%Usage:
```

1619

```
%
```

1620

```
% [coordinates, elements, dirichlet, neumann] ...
```

1621

```
% = refineRGB(coordinates, elements, dirichlet, ...
```

1622

```
%   neumann, marked)
```

1623

```
%
```

1624

```
%   refineRGB expects as input a finite element mesh
```

1625

```
%   described by the fields coordinates, elements,
```

1626

```
%   dirichlet and neumann.
```

1627

```
%   The vector marked contains the indices of elements
```

1628

```
%   which are refined by red-refinement,
```

1629

```
%   i.e. which are split into 4 similar triangles.
```

1630

```
%
```

1631

```
%   The function returns the refined mesh in terms of
```

1632

```
%   the same data as for the input.
```

1633

```
%
```

1634

```
%   Remark:
```

1635

```
%
```

1636

```
%   This program is a supplement to the paper
```

1637

```
%   "Efficient Implementation of
```

1638

```
%   Adaptive P1-FEM in Matlab"
```

1639

```
%   by S. Funken, D. Praetorius, and P. Wissgott.
```

1640

```
%   The reader should consult that paper for
```

1641

```
%   more information.
```

1642

```
%
```

1643

```
%Authors:
```

1644

```
%
```

1645

```
%   S. Funken, D. Praetorius, P. Wissgott 10-07-08
```

1646

1647

```
markedElements = varargin{end};
```

1648

```
nE = size(elements,1);
```

1649

```
*** Sort elements such that first edge is longest
```

1650

```
dx = coordinates(elements(:,[2,3,1]),1) - ...
```

1651

```
    coordinates(elements,1);
```

1652

```
dy = coordinates(elements(:,[2,3,1]),2) - ...
```

1653

```
    coordinates(elements,2);
```

1654

```
[hT,idxMax] = max(reshape(dx.^2+dy.^2,nE,3),[],2);
```

1655

```
idx = ( idxMax==2 );
```

```

1656 elements(idx,:) = elements(idx,[2,3,1]);
1657 idx = ( idxMax==3 );
1658 elements(idx,:) = elements(idx,[3,1,2]);
1659 *** Obtain geometric information on edges
1660 [edge2nodes, element2edges, ...
1661     boundary2edges{1:nargin-3}] = ...
1662     provideGeometricData(elements, varargin{1:end-1});
1663 *** Mark edges for refinement
1664 edge2newNode = zeros(max(max(element2edges)),1);
1665 edge2newNode(element2edges(markedElements,:)) = 1;
1666 swap = 1;
1667 while ~isempty(swap)
1668     markedEdge = edge2newNode(element2edges);
1669     swap = find( ~markedEdge(:,1) & (markedEdge(:,2) |
1670         markedEdge(:,3)) );
1671     edge2newNode(element2edges(swap,1)) = 1;
1672 end
1673 *** Generate new nodes
1674 edge2newNode(find(edge2newNode)) = ...
1675     size(coordinates,1) + [1:nnz(edge2newNode)];
1676 idx = find(edge2newNode);
1677 coordinates(edge2newNode(idx),:) ...
1678     = (coordinates(edge2nodes(idx,1),:)+...
1679         coordinates(edge2nodes(idx,2),:))/2;
1680 *** Refine boundary conditions
1681 for j = 1:nargout-2
1682     boundary = varargin{j};
1683     if ~isempty(boundary)
1684         newNodes = edge2newNode(boundary2edges{j});
1685         markedEdges = find(newNodes);
1686         if ~isempty(markedEdges)
1687             boundary = [boundary(~newNodes,:); ...
1688                 boundary(markedEdges,1),...
1689                 newNodes(markedEdges);...
1690                 newNodes(markedEdges), boundary(markedEdges,2)];
1691         end
1692     end
1693     varargout{j} = boundary;
1694 end
1695 *** Provide new nodes for refinement of elements
1696 newNodes = edge2newNode(element2edges);
1697 *** Determine type of refinement for each element
1698 markedEdges = (newNodes~=0);
1699 none = ~markedEdges(:,1);
1700 bisec1 = ( markedEdges(:,1) &
1701     ~markedEdges(:,2) & ~markedEdges(:,3) );
1702 bisec12 = ( markedEdges(:,1) &
1703     markedEdges(:,2) & ~markedEdges(:,3) );
1704 bisec13 = ( markedEdges(:,1) &
1705     ~markedEdges(:,2) & markedEdges(:,3) );

```

```

1706     red      = ( markedEdges(:,1) &
1707                 markedEdges(:,2) & markedEdges(:,3) );
1708     **** Generate element numbering for refined mesh
1709     idx = ones(nE,1);
1710     idx(bisec1) = 2; **** green =
1711                     % newest vertex bisection of 1st edge
1712     idx(bisec12) = 3; **** blue(right)=
1713                     % newest vertex bisection of 1st and
1714                     % 2nd edge
1715     idx(bisec13) = 3; **** blue(left)=
1716                     % newest vertex bisection of 1st and
1717                     % 3rd edge
1718     idx(red)      = 4; **** red refinement
1719     idx = [1;1+cumsum(idx)];
1720     **** Generate new elements
1721     newElements = zeros(idx(end)-1,3);
1722     newElements(idx(none),:) = elements(none,:);
1723     newElements([idx(bisec1),1+idx(bisec1)],:) ...
1724     = [elements(bisec1,3),elements(bisec1,1),...
1725         newNodes(bisec1,1); ...
1726         elements(bisec1,2),elements(bisec1,3),...
1727         newNodes(bisec1,1)];
1728     newElements([idx(bisec12),1+idx(bisec12),...
1729         2+idx(bisec12)],:) ...
1730     = [elements(bisec12,3),elements(bisec12,1),...
1731         newNodes(bisec12,1); ...
1732         newNodes(bisec12,1),elements(bisec12,2),...
1733         newNodes(bisec12,2); ...
1734         elements(bisec12,3),newNodes(bisec12,1),...
1735         newNodes(bisec12,2)];
1736     newElements([idx(bisec13),1+idx(bisec13),...
1737         2+idx(bisec13)],:) ...
1738     = [newNodes(bisec13,1),elements(bisec13,3),...
1739         newNodes(bisec13,3); ...
1740         elements(bisec13,1),newNodes(bisec13,1),...
1741         newNodes(bisec13,3); ...
1742         elements(bisec13,2),elements(bisec13,3),...
1743         newNodes(bisec13,1)];
1744     newElements([idx(red),1+idx(red),2+idx(red),...
1745         3+idx(red)],:) ...
1746     = [elements(red,1),newNodes(red,1),...
1747         newNodes(red,3); ...
1748         newNodes(red,1),elements(red,2),...
1749         newNodes(red,2); ...
1750         newNodes(red,3),newNodes(red,2),...
1751         elements(red,3); ...
1752         newNodes(red,2),newNodes(red,3),...
1753         newNodes(red,1)];

```



```

1755 function show(elements3,elements4,coordinates,u)
1756 %SHOW Presents two-dimensional piecewise affine
1757 % function graphically.
1758 % SHOW(ELEMENTS3,ELEMENTS4,COORDINATES,U) presents
1759 % a two-dimensional spline function graphically.
1760 % ELEMENTS3 denotes a set of triangles with
1761 % dimension (no. of triangles) x 3 and
1762 % ELEMENTS4 denotes a set of parallelograms
1763 % (dimension (no. of parallelograms) x 4.
1764 % Both arrays include number of nodes.
1765 % The nodes have to be counted clockwise or
1766 % anti-clockwise.
1767 % The coordinates of the nodes are stored in an
1768 % (no. of coordinates) x 2 - dimensional array
1769 % called COORDINATES.
1770 % Its i'th row defines the x- and y- coordinate of
1771 % the i'th node.
1772 % U is a (no. of coordinates) x 1 - dimensional
1773 % array containing in the i'th row the value of
1774 % the spline function at the i'th node.
1775 %
1776 % J. Alpert, C. Carstensen and S. A. Funken
1777 % 02-11-99
1778 %
1779 %
1780 %
1781
1782 trisurf(elements3,...
1783         coordinates(:,1),coordinates(:,2),...
1784         u,'facecolor','interp')
1785
1786 view(10,40);
1787 title('Solution of the Problem')

```

LAMPIRAN 5
Alat Bantu Matematika
Integration by parts.

1788
1789
1790

1791 1. Rumus satu dimensi skalar

1792 Integration by parts menyangkut variabel skalar di satu dimensi, dinyatakan
1793 sebagai berikut :

$$\int_{x_1}^{x_2} u \frac{dv}{dx} dx = uv|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{du}{dx} v dx$$

1794 2. Rumus integrasi untuk vektor

1795 Teorema divergensi yang diterapkan untuk fungsi $u\mathbf{F}$, u , dan $\mathbf{F}$, dapat dituliskan
1796 sebagai

$$\int_{\Omega} \nabla \bullet (u\mathbf{F}) d\Omega = \int_{\partial\Omega} (u\mathbf{F}) \bullet \mathbf{n} dS$$

1797 Dengan menggunakan aturan perkalian untuk divergensi

$$\nabla \bullet (u\mathbf{F}) = (\nabla u) \bullet \mathbf{F} + u(\nabla \bullet \mathbf{F})$$

1798 Sehingga diperoleh

$$\int_{\Omega} u(\nabla \bullet \mathbf{F}) d\Omega = \int_{\partial\Omega} (u\mathbf{F}) \bullet \mathbf{n} dS - \int_{\Omega} (\nabla u) \bullet \mathbf{F} d\Omega$$

1799 3. Teorema Green

1800 Dengan substitusi $\mathbf{F} = \nabla u$, diperoleh rumus Green

$$\int_{\Omega} u(\nabla \bullet \nabla u) d\Omega = \int_{\partial\Omega} u \nabla u \bullet \mathbf{n} dS - \int_{\Omega} (\nabla u) \bullet \nabla u d\Omega$$

LAMPIRAN 6

Simbol dan satuan

1801
1802

1803

Konsep	Simbol	Satuan
Intensitas medan listrik	E	Volt/meter
Intensitas medan magnetik	H	Ampere/meter
Kepadatan fluks listrik	D	Coulomb/meter ²
Kepadatan fluks magnetik	B	Tesla
Kepadatan arus listrik	J	Ampere/meter ²
Kepadatan muatan listrik	ρ	Coulomb/meter ³
Muatan listrik	Q	Coulomb

Konsep	Medan-Elektrik Medan-E	Medan-Magnetik Medan-H
Potensial skalar	$[\phi] = \text{V}$	$[\phi_m] = \text{A}$
Potensial vektor	$[\mathbf{F}] = \text{Coulomb/meter}$	$[\mathbf{A}] = \text{Vs/m}$
Voltase	$[V_e] = \text{V}$	$[V_m] = \text{A}$
Kuat Medan	$[\mathbf{E}] = \text{V/m}$	$[\mathbf{H}] = \text{A/m}$
Flux	$[\Psi] = \text{As}$	$[\Phi] = \text{Vs (Weber)}$
Densitas Flux	$[\mathbf{D}] = \text{As/m}^2$	$[\mathbf{B}] = \text{Vs/m}^2(\text{Tesla})$
Densitas Vorteks	$[\nabla \times \mathbf{E}] = \text{V/m}^2$	$[\nabla \times \mathbf{H}] = \text{A/m}^2$
Densitas sumber	$[\nabla \bullet \mathbf{D}] = \text{As/m}^3$	$[\nabla \bullet \mathbf{B}] = \text{Vs/m}^3$
Konduktifitas diperumum	$[\varepsilon = \frac{\mathbf{D}}{\mathbf{E}}] = \text{As/Vm}$	$[\mu = \frac{\mathbf{B}}{\mathbf{H}}] = \text{Vs/Am}$

1804

LAMPIRAN 8

Glosarium

1805
1806

- 1807 • Persamaan Differensial Biasa (PDB).
 1808 Ekspresi berbentuk $F(x, u(x), \frac{du}{dx}, \dots, \frac{d^n u}{dx^n}) = 0$ untuk variabel bebas x dan
 1809 fungsi $u(x)$ beserta turunan dari u , yaitu $\frac{du}{dx}, \dots, \frac{d^n u}{dx^n}$. Persamaan differensial
 1810 dinamakan persamaan differensial biasa berorde- n .
- 1811 • Persamaan Differensial Parsial (PDP).
 1812 Ekspresi berbentuk $F(x_i, u(x_i), \frac{\partial u}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial x^n}) = 0$ untuk multi-variabel bebas x_i
 1813 dan fungsi $u(x_i)$ beserta turunan parsial dari u , yaitu $\frac{\partial u}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial x^n}$.
- 1814 • Syarat Awal.
 1815 Untuk PDB berorde- n yang didefinisikan di $[a, b]$, apabila diberikan persyaratan
 1816 pada fungsi u dan turunan-turunannya sampai turunan ke- $(n-1)$ pada titik a .
 1817 Untuk PDP berorde- n yang didefinisikan di $[a, b]^m$, apabila diberikan persya-
 1818 ratan pada fungsi u dan turunan-turunannya sampai turunan parsial ke- $(n-1)$
 1819 pada batas $\{a\} \times [a, b]^{(n-1)}$.
- 1820 • Syarat Batas.
 1821 Untuk PDB berorde- n yang didefinisikan di $[a, b]$, apabila diberikan persyaratan
 1822 pada fungsi u dan turunan-turunannya sampai turunan ke- $(n-1)$ pada titik a
 1823 dan b .
 1824 Untuk PDP berorde- n yang didefinisikan di $[a, b]^m$, apabila diberikan persya-
 1825 ratan pada fungsi u dan turunan-turunannya sampai turunan parsial ke- $(n-1)$
 1826 pada batas domain $[a, b]^n$.
- 1827 • Syarat Batas Dirichlet.
 1828 Untuk PDP berorde- n yang didefinisikan di $[a, b]^m$, apabila diberikan persyarat-
 1829 an pada fungsi u pada batas domain $[a, b]^n$.
- 1830 • Syarat Batas Neumann.
 1831 Untuk PDP berorde- n yang didefinisikan di $[a, b]^m$, apabila diberikan persyarat-
 1832 an pada turunan-turunan dari fungsi u pada batas domain $[a, b]^n$.
- 1833 • Syarat Batas Campuran.
 1834 Untuk PDP berorde- n yang didefinisikan di $[a, b]^m$, apabila diberikan persyarat-
 1835 an pada fungsi u serta turunan-turunannya sampai turunan parsial ke- $(n-1)$
 1836 pada batas domain $[a, b]^n$.

Tentang Penulis

Agah D Garnadi lulus Sarjana Matematika dari Institut Teknologi Bandung, dengan konsentrasi Matematika Murni. Mendapatkan pendidikan Pasca Sarjana dalam bidang Scientific Computing dengan minor matematika murni dari The Australian National University, Canberra, Australia. Sempat bekerja sebagai asisten peneliti dalam Metode Elemen Hingga di Dept. Engineering, ANU. Atas biaya DAAD mendalami bidang Teknomathematik dan Finanzmathematik di TU-Kaiserslautern, Jerman. Kemudian bekerja sebagai Scientific Programmer selama dua tahun di Crystal Growth Group, CAESAR, Bonn, dengan tugas utama perancangan dan simulasi tungku kristal industri semikonduktor. Kemudian selama 4 tahun berkesempatan menjadi peneliti tamu di Institut fuer Numerische und Angewandte Mathematik, Georg-August Universitaet Goettingen.

SINTA ID : 6015353

Husin Alatas lulus S1 Fisika, dari Institut Teknologi Bandung; Dilanjutkan S2 dan S3, juga di Institut Teknologi Bandung. Post-Doctoral di University of Twente, The Netherlands, dalam bidang Fisika Nonlinear.

Terhitung dari tahun 2017, diangkat sebagai Guru Besar Fisika Teori di Institut Pertanian Bogor.

SINTA ID : 5979618

Sri Nurdyati lulus Sarjana dari Departemen Statistika FMIPA IPB. Kemudian, ia melanjutkan pendidikan S2 Ilmu Komputer di The University of Western Ontario, Canada. Pendidikan S3 ditempuh di Twente University, The Netherlands, dengan mengambil bidang Matematika Terapan.
SINTA ID : 6042844

Lia Yuliawati lulus program sarjana di Departemen Matematika FMIPA IPB. Kemudian, ia melanjutkan pendidikan S2 Matematika Terapan di IPB. Pendidikan S3 ditempuh di Institut Teknologi Bandung, dengan mengambil bidang Matematika Terapan.
SINTA ID : 6004495