Open Journal of Mathematics and Physics | Volume 3, Article 208, ISSN: 2674-5747
https://doi.org/10.31219/osf.io/935q8 | published: 17 Feb 2021 | https://ojmp.org

[white paper]
Diamond Open Access
Peer Reviewed

Um Conjunto não Mensurável

Colaboração Matemática Aberta[1]

20 de Fevereiro de 2021

Resumo

Uma das criações mais importantes da Análise do século XX foi a Integral de Lebesgue, que estendeu notavelmente a Integral de Riemann, resolveu em um período de poucos anos os problemas fundamentais da Teoria da Integração e deu um impulso relevante à Análise Funcional, à Teoria das Equações Diferenciais e Integrais e à Teoria da Probabilidade. O ponto básico dessa nova teoria foi a introdução da noção de medida. Medida, a grosso modo, é uma função cujo domínio é um conjunto de subconjuntos de $\mathbb{R}$ e cujo contradomínio é o conjunto dos números reais não negativos (unido com o símbolo $+\infty$). O comprimento de um intervalo, por exemplo, é uma medida, digamos L, definida sobre todos os intervalos da reta real, tal que $L(I) = b - a$, onde a e b são os extremos do intervalo L e $L(I) = +\infty$ se L for não limitado. Ora, a medida L está definida apenas para intervalos. Seria interessante estender esse conceito para outros subconjuntos da reta. Neste trabalho, será definida a medida exterior de um subconjunto de $\mathbb{R}$ e, com esta medida, será definida a noção de conjunto mensurável.

palavras-chave: Lebesgue, conjunto mensurável, medida

A versão mais atualizada deste artigo está disponível em

https://osf.io/935q8/download

[1] Todos os autores com suas afiliações aparecem no final deste artigo.

Introdução

1. Iremos definir a **medida exterior** de um conjunto e alguns resultados importantes dessa definição.

2. Apresentaremos, também, o conceito de **medida**.

3. O leitor não especialista nos conceitos de medida e integração pode consultar [1–3].

A Medida

4. A **reta real estendida** é o conjunto $\mathbb{R}^{\pm\infty} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

5. Seja I qualquer intervalo de números reais estendidos.

6. O comprimento $L(I)$ de I é definido como sendo o módulo da diferença entre seus pontos extremos.

7. A função comprimento é um exemplo de uma função de conjuntos, cujo domínio é o conjunto de todos os intervalos de uma reta.

8. Gostaríamos, então, de estender (6) para comprimento de diferentes conjuntos de intervalos.

9. Vamos definir uma função de conjuntos m tal que para todo conjunto E de uma certa coleção M de conjuntos de números reais corresponda a um número real estendido não negativo mE chamado *a medida de* E.

10. Seria ideal que as propriedades (11)–(14) a seguir fossem satisfeitas pela função m.

11. mE está definida para todo conjunto E de números reais, isto é, o domínio de m é $\wp(\mathbb{R})$, o conjunto das partes de $\mathbb{R}$.

12. Para qualquer intervalo I, $mI = L(I)$.

13. Se $\langle E_n \rangle$ é uma sequência de conjuntos disjuntos, então

$$m\left(\bigcup E_n\right) = \sum (mE_n),$$

isto é, a medida da união é a soma das medidas.

14. m é invariante por translação, isto é, se E é um conjunto para o qual m está definida e se $E + y = \{x + y; x \in E\}$ é o conjunto obtido pela substituição do ponto x em E pelo ponto $x + y$ com $y \in \mathbb{R}^{\pm\infty}$, então

$$m(E + y) = mE.$$

15. De fato, considere uma cobertura de E.

16. De (27),

$$m^*(E) = \inf \sum L(I_n).$$

17. Se (I_n) cobre E, então $(I_n + y)$ cobre $E + y$.

18. E, se (J_n) cobre $E + y$, então $(J_n - y)$ cobre E.

19. Além disso, sabemos que

$$L(I_n) = L(I_n + y) \qquad \text{e} \qquad L(J_n) = L(J_n - y).$$

20. Segue que

$$\inf_{e \subset I_n} \sum L(I_n) = \inf_{E+y \subset J_n} \sum L(J_n),$$

isto é,

$$m^*(E) = m^*(E + y), \qquad \forall y \in \mathbb{R}^{\pm\infty}.$$

21. No entanto, é impossível construir m que satisfaça todas as propriedades (11)–(14) (veja [4]).

Medida Exterior

22. Seja A um conjunto qualquer de números reais.

23. Defina I_n para todo $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

24. Considere a coleção de intervalos I_n a qual cobre A, isto é, $A \subset \bigcup I_n$, com $n \in \mathbb{N}$.

25. Considere, também, a soma dos comprimentos de cada I_n.

26. Uma vez que o comprimento de um intervalo é um número positivo, esta soma está unicamente determinada não importando a ordem de seus termos.

27. Definimos, então, a **medida exterior** de A como sendo

$$m^*A = \inf_{A \subset \bigcup I_n} \sum L(I_n).$$

28. O lado direito de (27) é o ínfimo da soma dos comprimentos da coleção de intervalos I_n a qual cobre o conjunto A.

29. Veja que $m^*\varnothing = 0$ e se $A \subset B$, então $m^*A \leq m^*B$. [4]

30. Se A contém um único ponto, então A tem medida exterior zero. [4]

31. Se I é um intervalo qualquer, então $m^*I = L(I)$. [4]

32. Seja $\{A_n\}$ uma **coleção enumerável** de subconjuntos de $\mathbb{R}$. Então

$$m^*(\bigcup A_n) \leq \sum m^*A_n.$$

Conjuntos Mensuráveis

33. A função m^* está definida para qualquer conjunto da reta.

34. Nem sempre a propriedade (13) será satisfeita devido a (31) e (32).

35. Um conjunto E é mensurável se para cada conjunto A tivermos

$$m^*A = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c).$$

36. A Fig. 1 nos ajuda a compreender melhor (35).

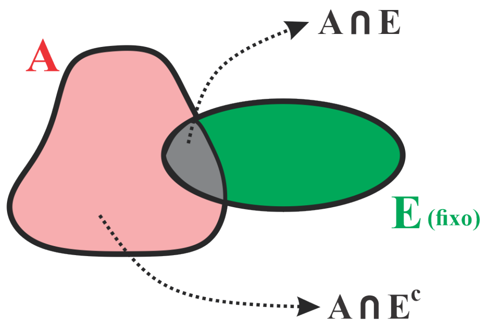

Figura 1: Conjunto Mensurável E.

Teorema

37. *A coleção M de conjuntos mensuráveis é uma σ-álgebra.* [4]

Proposição 1

38. Seja $\langle E_n \rangle$ uma sequência de conjuntos mensuráveis. Então [4]

$$m(\bigcup E_n) \leq \sum mE_n.$$

39. Se os conjuntos E_n são dois a dois disjuntos, então

$$m(\bigcup E_n) = \sum mE_n.$$

Lema 1

40. Seja $E \subset [0,1]$ um conjunto mensurável. [4]

41. Então para cada $y \in [0,1]$, o conjunto $E + y$ é mensurável e

$$m(E + y) = mE.$$

Um Conjunto não Mensurável

42. Considere, no intervalo $[0,1] \subset \mathbb{R}$, a seguinte relação:

$$x, y \in [0,1],\ x \sim y \Leftrightarrow x - y \text{ é racional.}$$

43. Note que $\sim$ define uma relação de equivalência no conjunto $[0,1]$.

44. Escolhemos um representante de cada classe de equivalência de $\sim$ por meio do **Axioma da Escolha**.

45. Chamemos de V o conjunto formado pelos representantes de (44).

46. Considere $\{r_j\}_{j=1}^{\infty}$ uma enumeração do conjunto $[-1,1] \bigcap \mathbb{Q}$.

47. Defina

$$S = \bigcup_{j=1}^{\infty} (V + r_j), \quad \text{onde } V + r_j = x + r_j :\ x \in V.$$

48. Veja que as seguintes inclusões são verdadeiras:

$$[0,1] \subseteq S \subseteq [-1,2].$$

49. Pela construção do conjunto V, existe $y \in V$ tal que $r = x - y \in \mathbb{Q}$.

50. Como $x, y \in [0,1]$, então $x - y = r \in [-1,1]$.

51. Logo, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $r = r_j$.

52. Isso mostra que $x = y + r_j \in (V + r_j) \subset S$. Daí $[0,1] \subset S$.

53. Agora, seja $x \in S$, isto é, $x = y + r_j$ para algum $j \in \mathbb{N}$ e $y \in V$.

54. Como $r_j \in [-1,1]$ e $y \in V \subset [0,1]$, a soma $y + r_j \in [-1,2]$.

55. Portanto, $x \in [-1,2]$ e as inclusões (48) estão provadas.

56. Os conjuntos $\{V + r_j : j \in \mathbb{N}\}$ são dois a dois disjuntos.

57. Facilmente prova-se (56).

58. Suponha agora, por absurdo, que V seja mensurável.

59. Decorre da Proposição 1 (38) e do Lema 1 (40) que

$$[0,1] \subseteq S \subseteq [-1,2] \Rightarrow m([0,1]) \le m(S) \le m([-1,2])$$

$$\Rightarrow 1 \le \sum_{j=1}^{\infty} m(V) \le 3.$$

60. Note que o somatório de (59) pode assumir apenas dois valores, a saber, zero, quando $m(V) = 0$, ou infinito, quando $m(V) > 0$.

61. Mas isso é um absurdo, pois essa soma está entre 1 e 3.

62. A contradição se deve ao fato de admitir que V é mensurável.

Considerações Finais

63. Assim, fica provado que V é um **conjunto não mensurável**.

Ciência Aberta

O **arquivo latex** para este artigo, juntamente com outros *arquivos-suplementares*, estão disponíveis em [5].

Consentimento

64. O autor **concorda** com [6].

Referências

[1] Bartle, R. G. *Elements of integration*. John Wiley and Sons. New-York. 1966.

[2] Royden, M. *Real Analysis*. MacMillan, New York, 1963.

[3] Rudin, W. *Real and Complex Analysis*. Mc-Graw Hill, New York, 1966.

[4] Fernandez, P. J. *Medida e Integração*. Rio de Janeiro: IMPA, 1986.

[5] Lobo, Matheus P. "Open Journal of Mathematics and Physics (OJMP)." *OSF*, 21 Apr. 2020.
`https://doi.org/10.17605/osf.io/6hzyp`
`https://osf.io/6hzyp/files`

[6] Lobo, Matheus P. "Simple Guidelines for Authors: Open Journal of Mathematics and Physics." *OSF Preprints*, 15 Nov. 2019.
`https://doi.org/10.31219/osf.io/fk836`

Colaboração Matemática Aberta

Eduardo Dias Lima[1]
(`autor principal, duardo.dias16@hotmail.com`)

[1]Universidade Federal de Goiás (Brasil)