Open Journal of Mathematics and Physics | Volume 3, Article 240, ISSN: 2674-5747
https://doi.org/10.31219/osf.io/6rj4f | published: 22 Jun 2021 | https://ojmp.org
JK

[white paper]
Diamond Open Access
[waiting peer review]

Convergência de funções iteradas

Colaboração Matemática Aberta[1]

22 de Junho de 2021

Resumo

Mostramos, numericamente, algumas órbitas das funções trigonométricas iteradas, seno, cosseno, tangente, bem como da função complexa $f(z)=z^2+c$, responsável por gerar os conjuntos fractais de Julia.

palavras-chave: funções iteradas, órbitas, sistemas dinâmicos discretos, atratores

A versão mais atualizada deste artigo está disponível em
https://osf.io/6rj4f/download
https://zenodo.org/record/5015323

Introdução

1. Para se familiarizar com **sistemas dinâmicos discretos**, veja [1–3].

[1]Todos os autores com suas afiliações aparecem no final deste artigo.

Função iterada

2. Considere a `função` $f(x) = x^2$ para $x \in \mathbb{R}$.

3. Seja x_0 a `condição inicial` (ou `semente`).

4. Considere a seguinte notação:

$$f^1 := f(x_0), \quad f^2 := f(f^1), \quad f^3 := f(f^2), \quad \ldots$$

5. `Iterações` de $f(x)$ significa calcular f^1, f^2, f^3, ...

6. A `órbita` (ou `itinerário`) de x_0 é dada(o) por

$$x_0 \longrightarrow f^1 \longrightarrow f^2 \longrightarrow f^3 \longrightarrow \cdots$$

7. Em palavras, diz-se *a órbita de x_0 sob f*.

8. A órbita depende de f e x_0.

9. Por exemplo, a órbita de 2 sob $f(x) = x^2$ é

$$2 \longrightarrow 4 \longrightarrow 16 \longrightarrow 256 \longrightarrow \cdots$$

10. A órbita (9) `diverge`, isto é, *vai para o infinito.*

11. Por outro lado, a órbita de 0 sob $f(x) = x^2$,

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots,$$

é um `ponto fixo` porque *não é alterado pela função.*

12. `sistema dinâmico discreto` := *função iterada nela mesma*

13. Note que, embora a variável x seja real, o `sistema dinâmico` (2) é **discreto**, pois os *índices* em (5) são *números inteiros positivos.*

14. Sistemas discretos mudam repentinamente do estado 1 para o estado 2, de 2 para 3, de 3 para 4, e assim sucessivamente.

O que faremos?

15. A seguir, calcularemos numericamente as órbitas de funções conhecidas, utilizando *scripts* em `python`.

Seno

16. Nos gráficos das Figs. 1-2, vemos a convergência $\sin x \to 0$ para diversas condições iniciais.

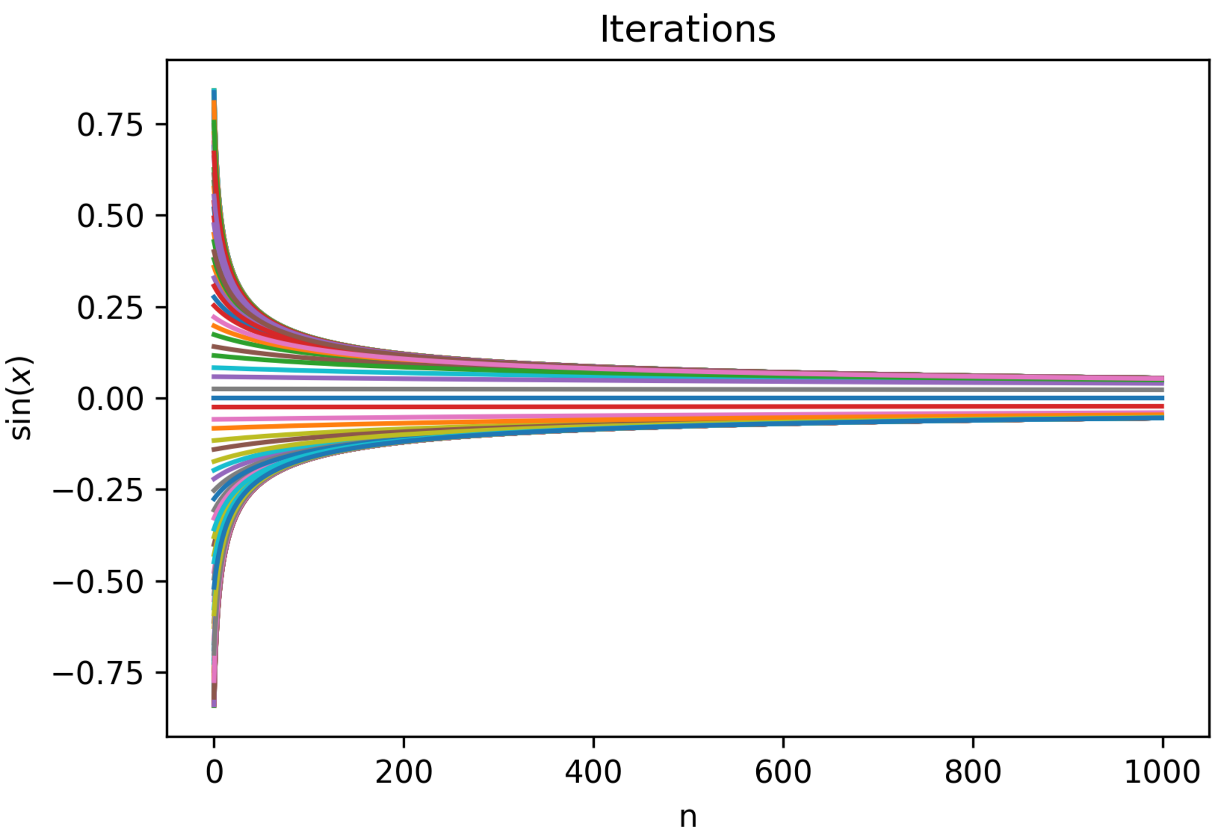

Figura 1: Mil iterações de $\sin x$ para cada uma das condições iniciais $x_0 \in \{0;\ \pm 0,2;\ \pm 0,4;\ \pm 0,6;\ \ldots;\ \pm 9,8;\ \pm 10\}$. Cada cor representa uma condição inicial diferente. Note que todas as condições iniciais levam a $\sin x \to 0$.

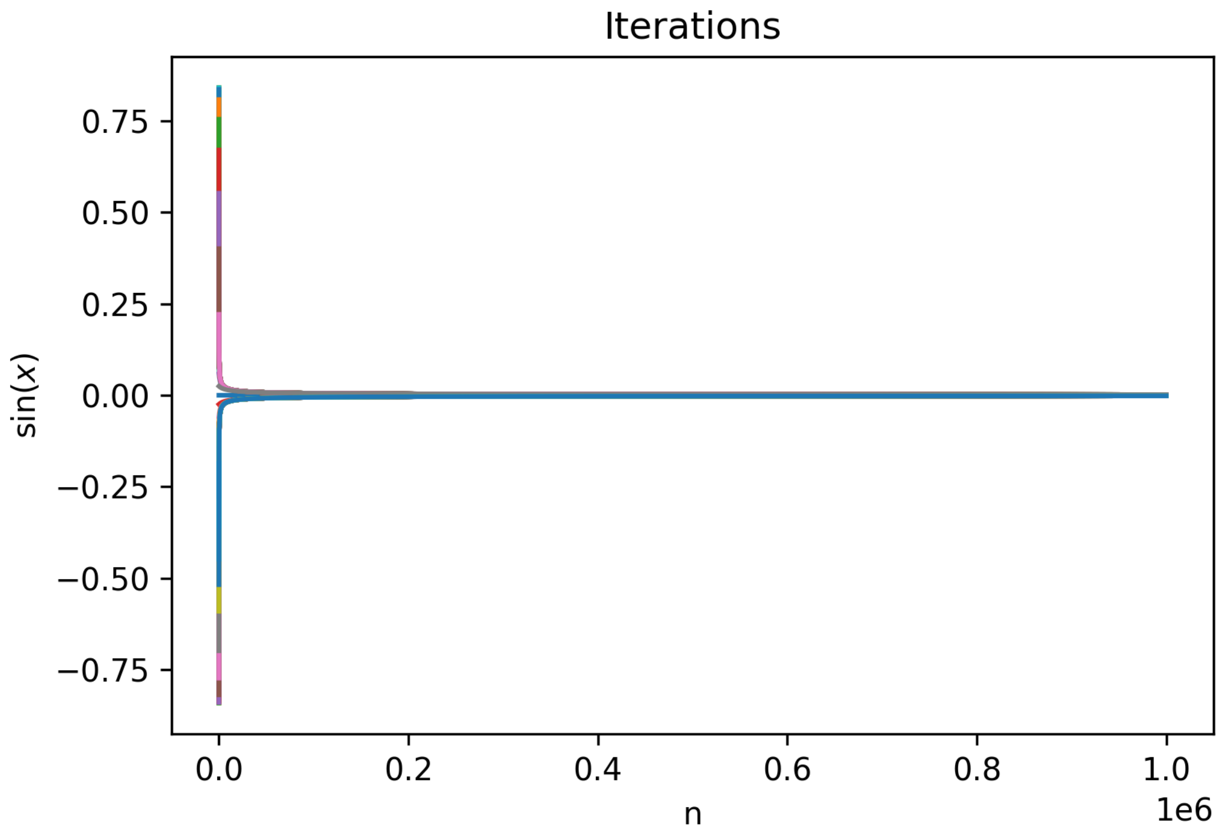

Figura 2: Um milhão de iterações de $\sin x$ para cada uma das condições iniciais $x_0 \in \{0;\ \pm 0,2;\ \pm 0,4;\ \pm 0,6;\ ...;\ \pm 9,8;\ \pm 10\}$. Cada cor representa uma condição inicial diferente. Note que todas as condições iniciais levam a $\sin x \to 0$.

Cosseno

17. Nos gráficos das Figs. 3-4, vemos a convergência $\cos x \to 0,74$, aproximadamente, para diversas condições iniciais.

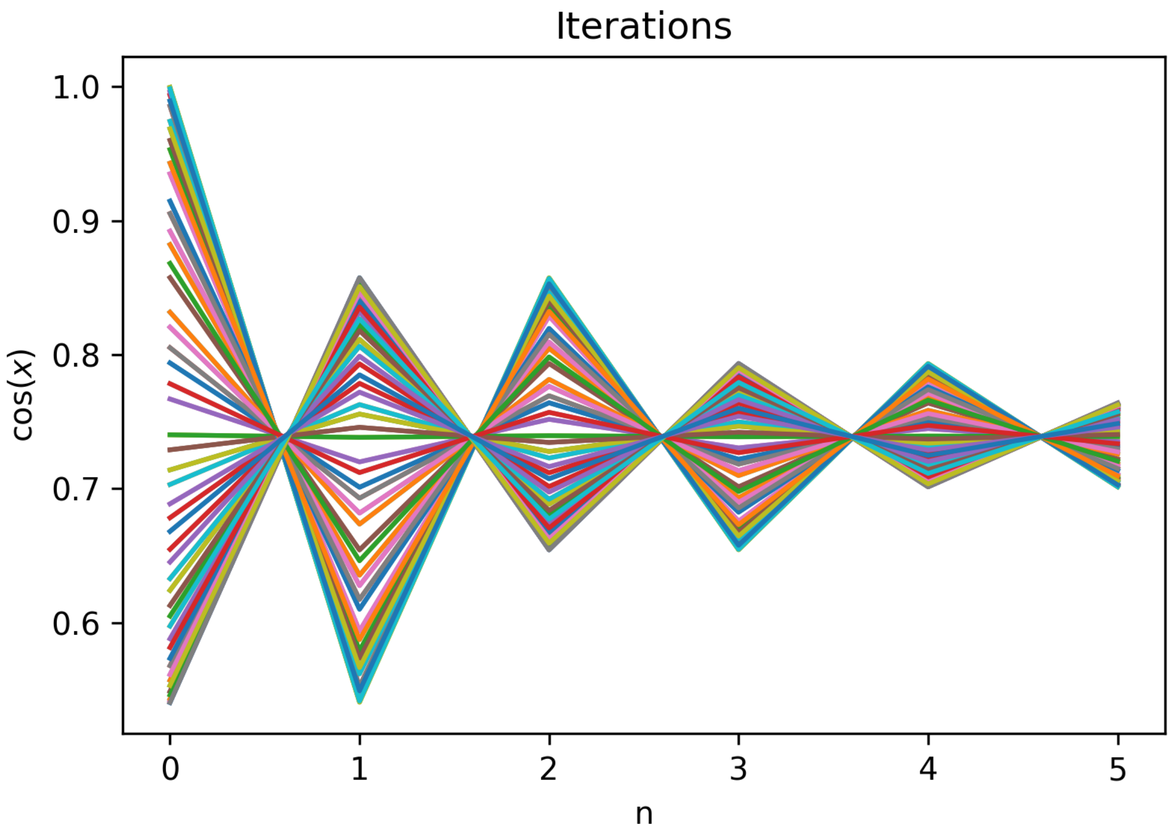

Figura 3: Seis iterações de $\cos x$ para cada uma das condições iniciais $x_0 \in \{0;\ \pm 0,2;\ \pm 0,4;\ \pm 0,6;\ \ldots;\ \pm 9,8;\ \pm 10\}$. Cada cor representa uma condição inicial diferente. Note que todas as condições iniciais levam a $\cos x \to 0,74$, aproximadamente.

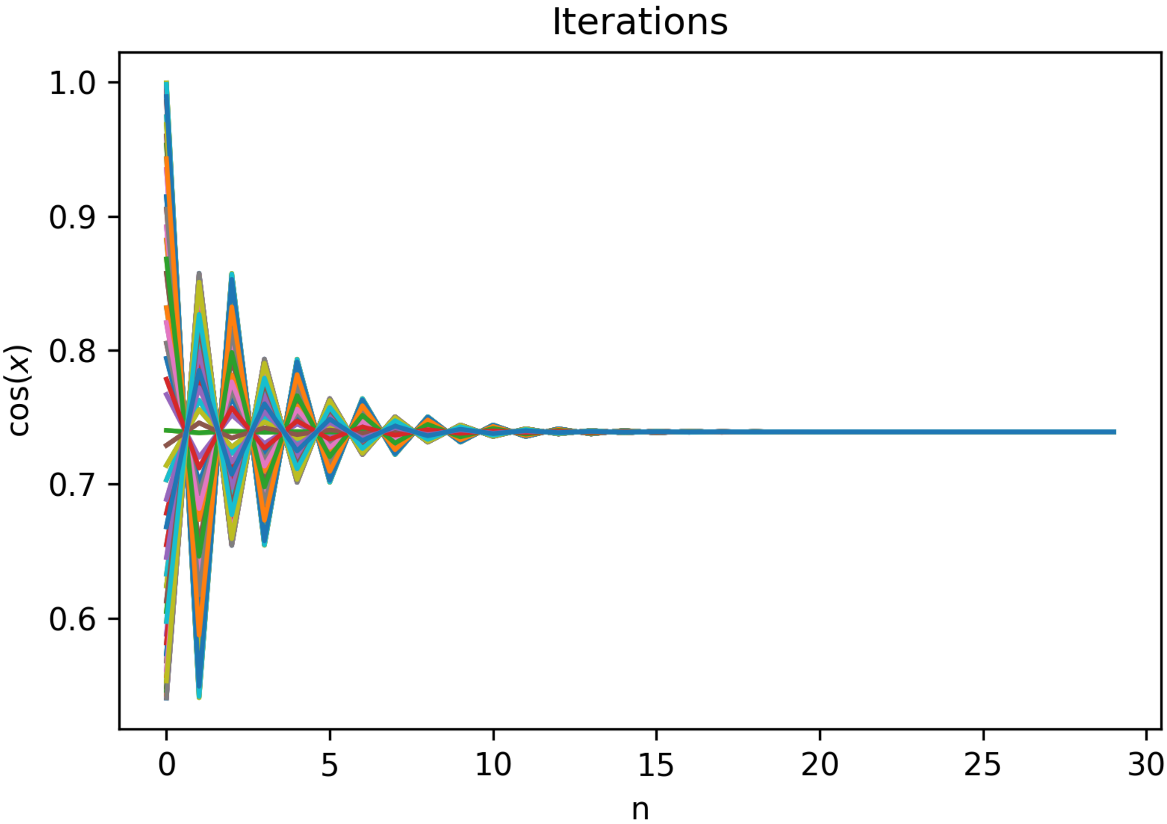

Figura 4: Trinta iterações de $\cos x$ para cada uma das condições iniciais $x_0 \in \{0;\ \pm 0,2;\ \pm 0,4;\ \pm 0,6;\ \ldots;\ \pm 9,8;\ \pm 10\}$. Cada cor representa uma condição inicial diferente. Note que todas as condições iniciais levam a $\cos x \to 0,74$, aproximadamente.

Tangente

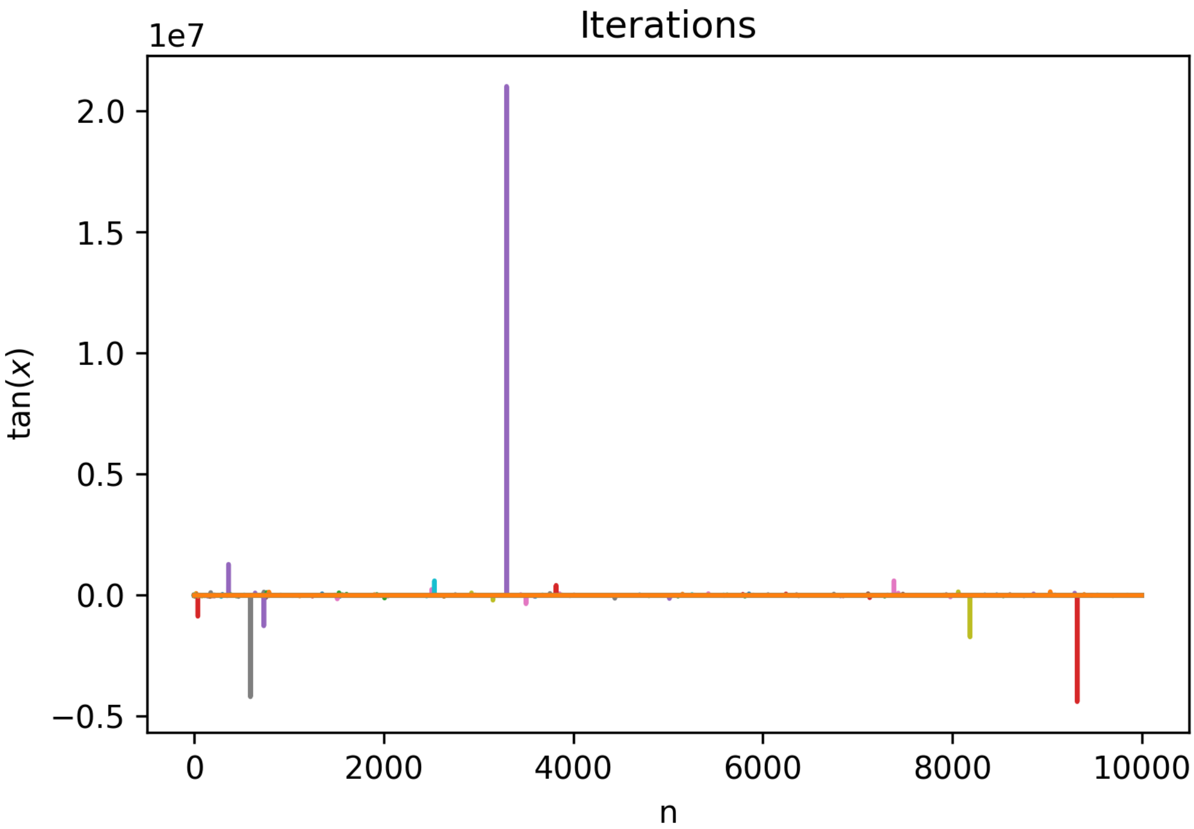

Figura 5: Dez mil iterações de $\tan x$ para cada uma das condições iniciais $x_0 \in \{0;\ \pm 0,001;\ \pm 0,002;\ \ldots;\ \pm 7\}$.

E agora?

18. Vamos iterar a função complexa,

$$f(z) = z^2 + c,$$

com $z, c \in \mathbb{C}$.

19. Vale lembrar que esta função é a responsável por gerar os belíssimos fractais de Julia [4–7].

20. Essencialmente, é a fronteira de $f(z) = z^2 + c$, que separa órbitas finitas das infinitas, que é fractal [4].

Uma função complexa

21. $f(z) = z^2 + c, \quad z_0 = 0,3 - 0,3i, \quad c = 0,3 + 0,3i$

22. $|f(z_0)| \to 0,44$ (aproximadamente)

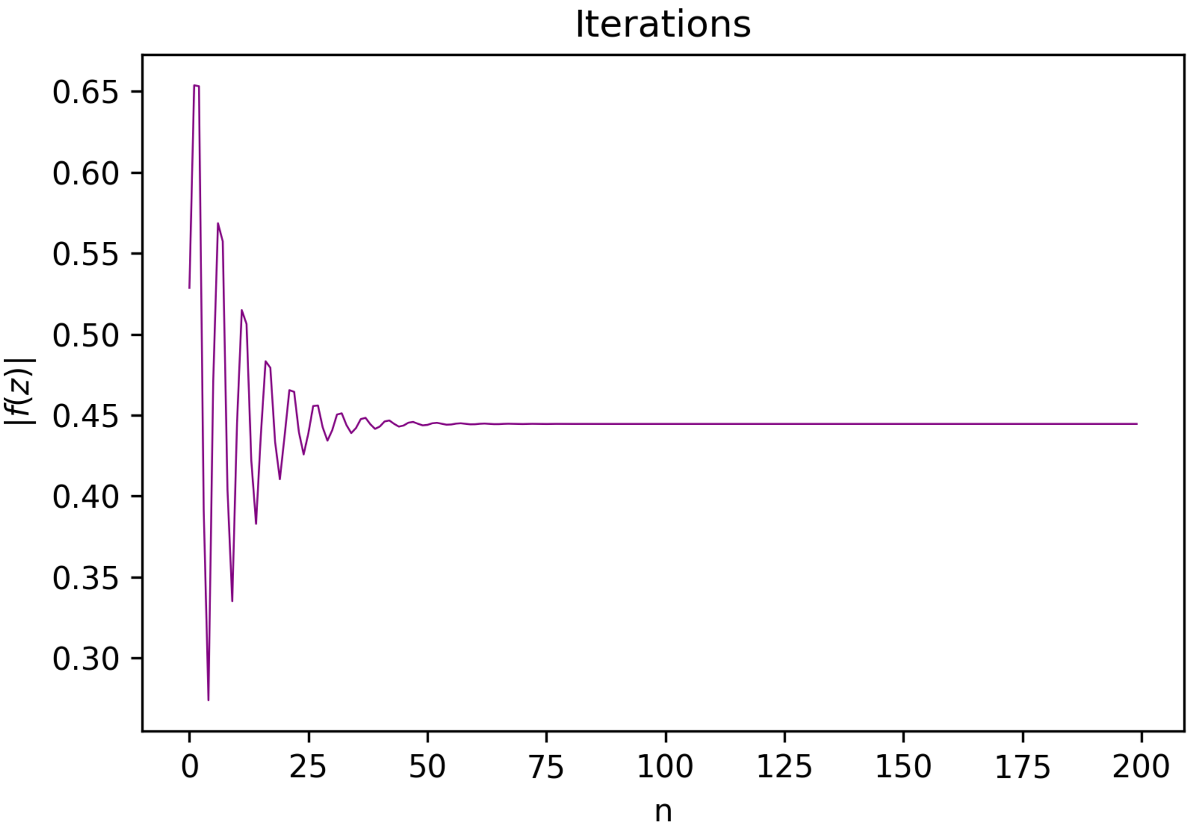

Figura 6: Duzentas iterações do sistema em (21).

23. $f(z) = z^2 + c, \quad z_0 = 0,33 - 0,33i, \quad c = 0,33 + 0,33i$

24. $\quad |f(z_0)| \to 0,48 \quad$ (aproximadamente)

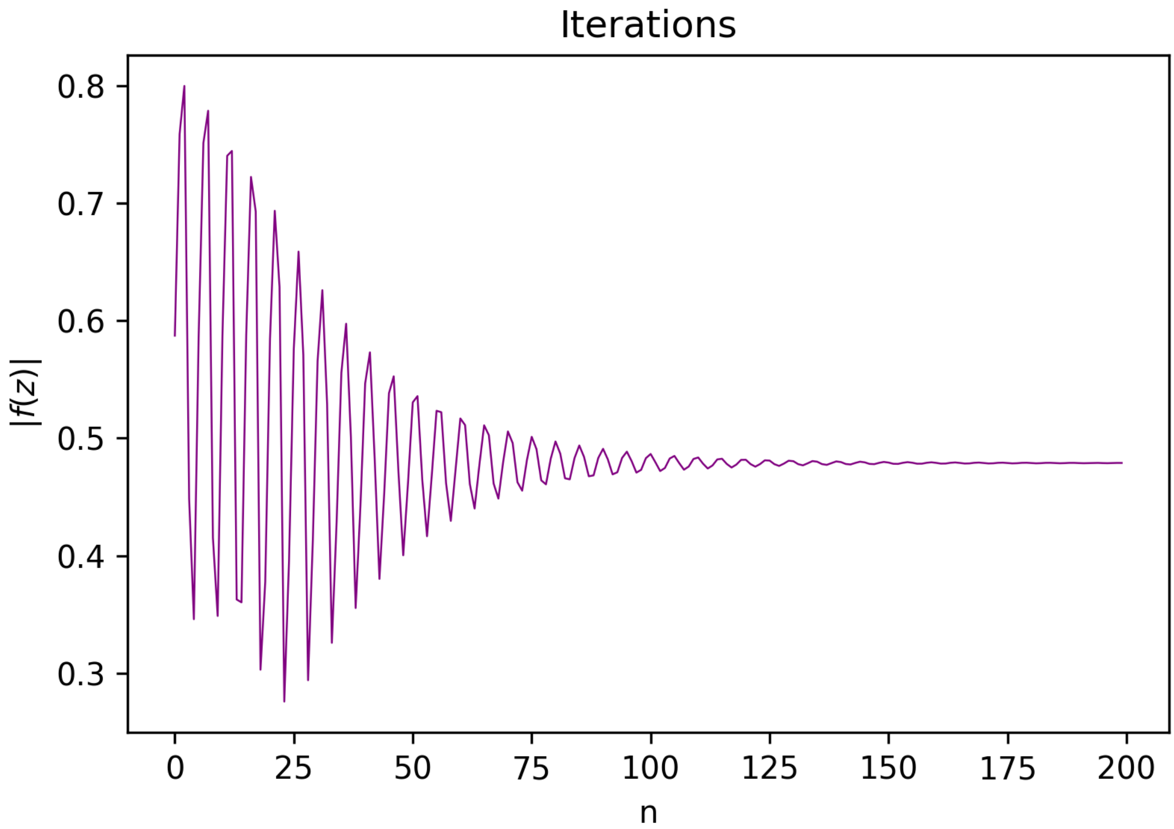

Figura 7: Duzentas iterações do sistema em (23).

25. $f(z) = z^2 + c, \quad z_0 = 0,33 + 0,33i, \quad c = 0,33 + 0,33i$

26. $|f(z_0)| \to 0,48 \quad \text{(aproximadamente)}$

27. A diferença entre as Figs. 7 e 8 é apenas o sinal da condição inicial z_0 na função iterada $f(z)$.

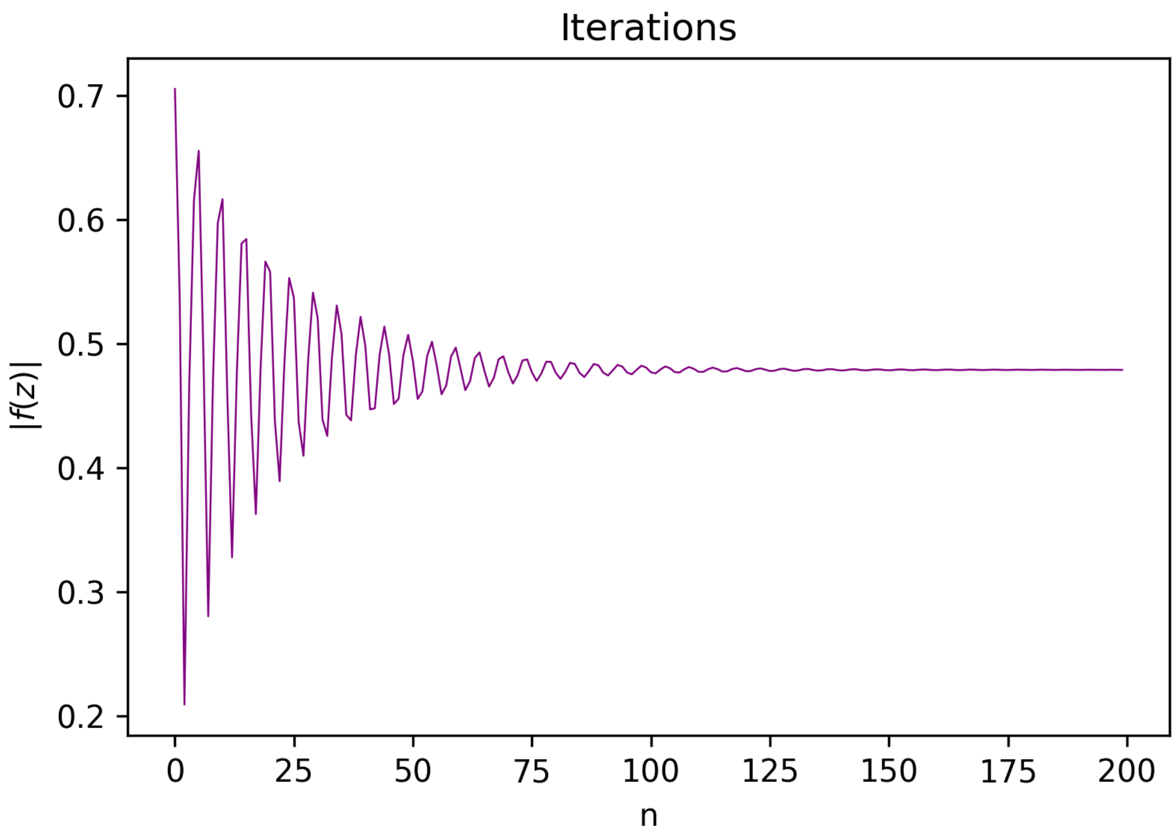

Figura 8: Duzentas iterações do sistema em (25).

28. $f(z) = z^2 + c, \quad z_0 = 0,1 + 0,1i, \quad c = 0,1 + 0,1i$

29. $|f(z_0)| \to 0,15 \quad$ (aproximadamente)

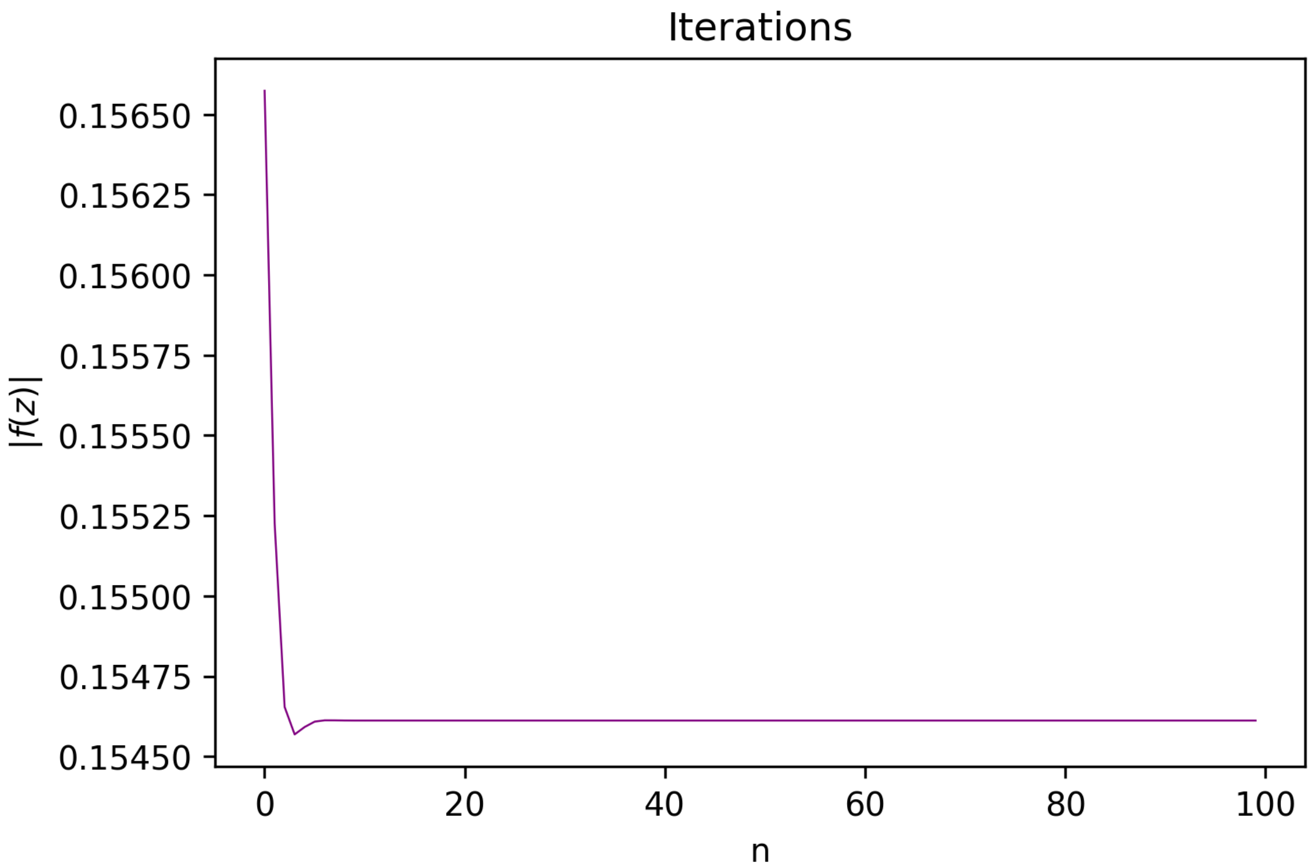

Figura 9: Cem iterações do sistema em (28).

30. $f(z) = z^2 + c, \quad z_0 = 0,1 + 0,1i, \quad c = 0,2 + 0,1i$

31. $\quad |f(z_0)| \to 0,279 \quad$ (aproximadamente)

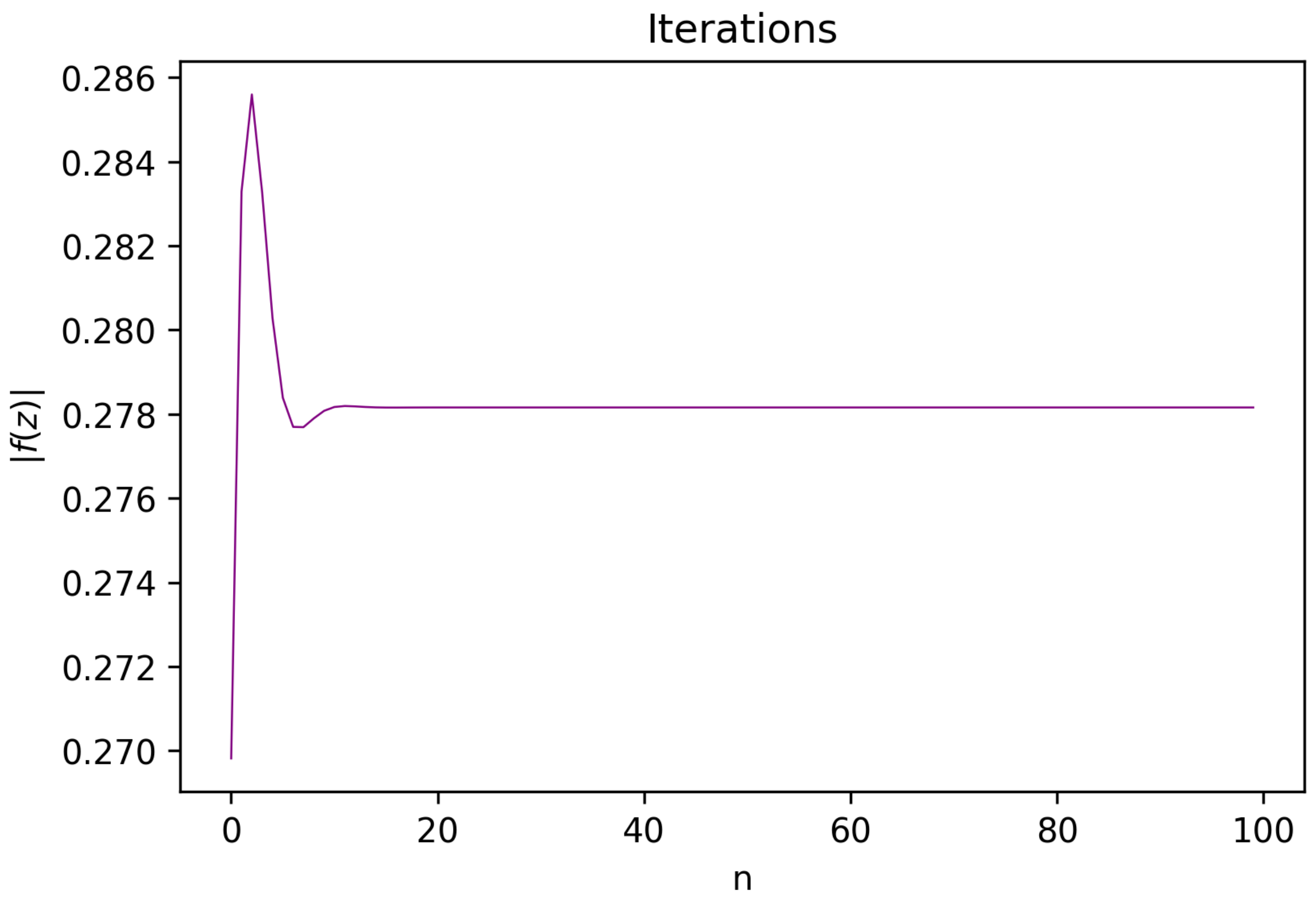

Figura 10: Cem iterações do sistema em (30).

32. $f(z) = z^2 + c, \quad z_0 = 0,1 + 0,1i, \quad c = 0,3 + 0,1i$

33. $\quad |f(z_0)| \to 0,43 \quad$ (aproximadamente)

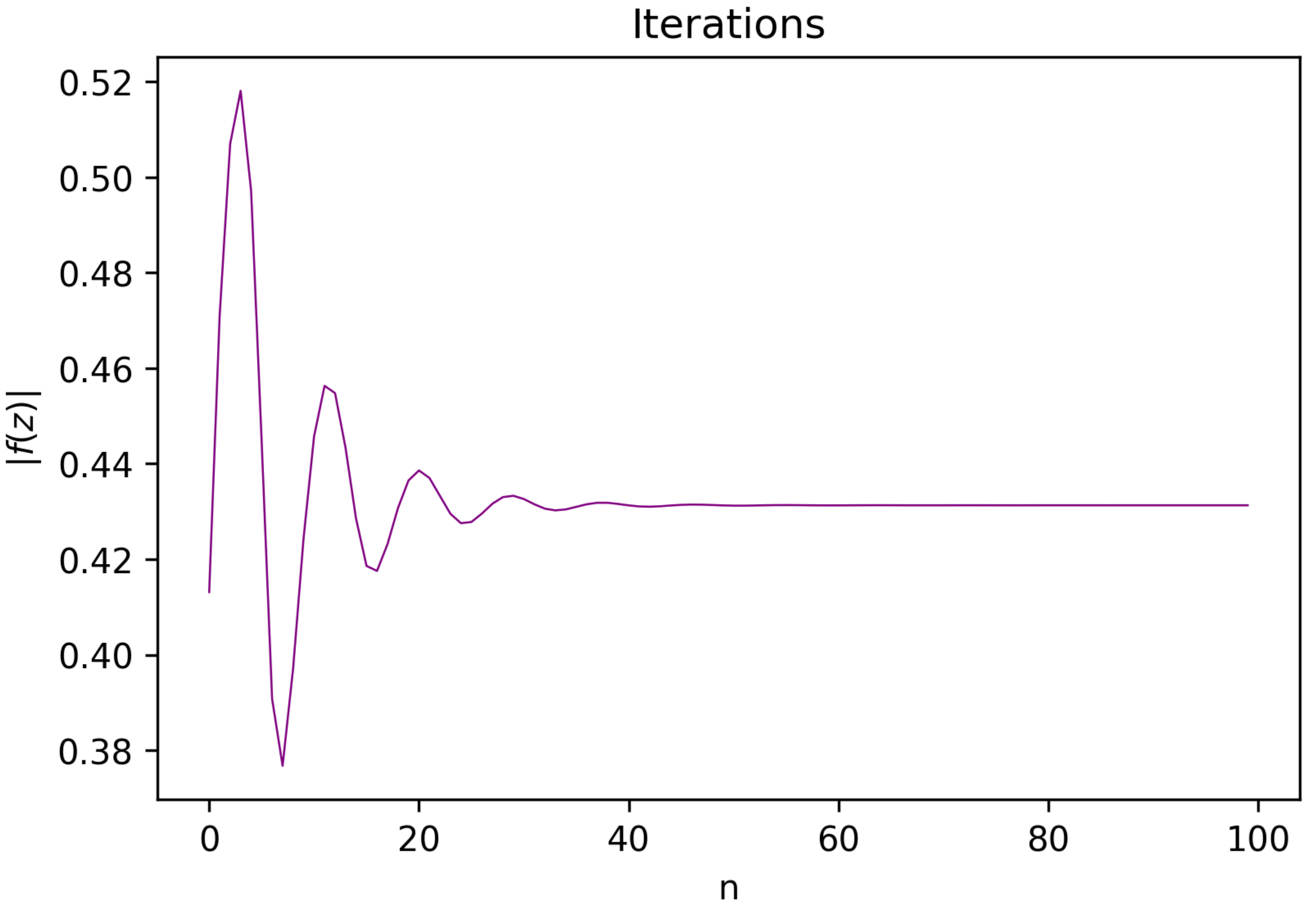

Figura 11: Cem iterações do sistema em (32).

34. $f(z) = z^2 + c, \quad z_0 = 0,1 + 0,1i, \quad c = 0,33 + 0,1i$

35. $\quad |f(z_0)| \to 0,47 \quad$ (aproximadamente)

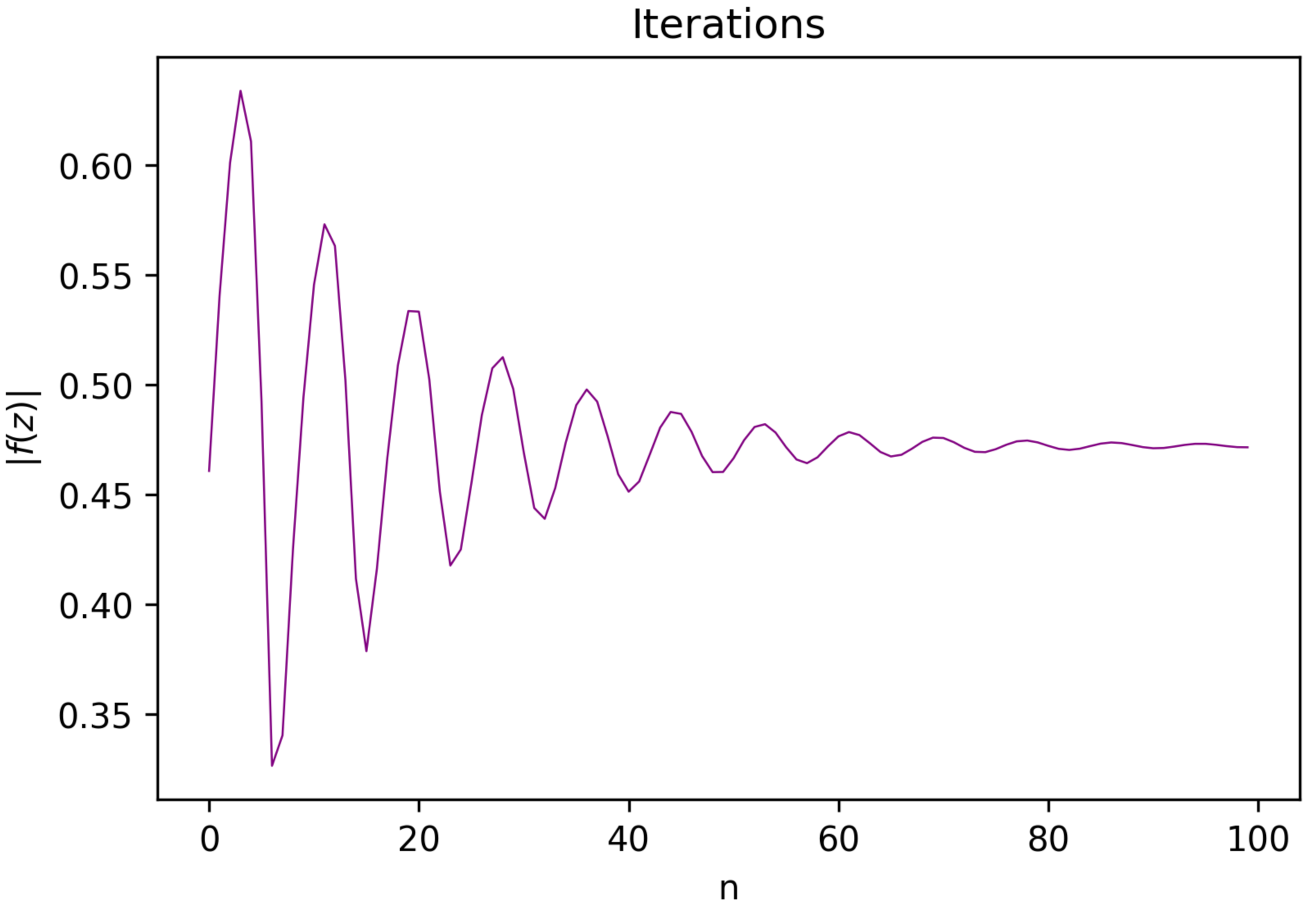

Figura 12: Cem iterações do sistema em (34).

Scripts em Python

36. `https://osf.io/q9fys`

37. `https://osf.io/b5a4t`

38. `https://osf.io/xv3hz`

Considerações Finais

39. Vimos que a função seno converge para zero, o cosseno converge para 0,74 e a tangente tende a zero, mas apresenta alguns picos.

40. A função complexa $f(z) = z^2 + c$ tem uma dinâmica riquíssima, que pode ser melhor apreciada olhando-se os fractais produzidos pelos conjuntos de Julia.

41. Constatamos que $f(z)$ tem a interessante propriedade de apresentar algumas oscilações antes de convergir e que a parte real de c foi responsável por aumentar as oscilações transientes.

42. Sabemos que a geometria fractal está bastante presente na natureza, desde escalas microscópicas até escalas astronômicas [8–12].

43. Acreditamos que sistemas dinâmicos estejam presentes como instruções primordiais do espaço-tempo quântico e, consequentemente, do universo como um todo [13, 14].

44. Se (43) for comprovado, é possível que uma função simples como $f(z) = z^2 + c$ tenha um papel determinante na geração das probabilidades quânticas [13, 14].

Ciência Aberta

O **arquivo latex** para este artigo, juntamente com outros *arquivos suplementares*, estão disponíveis em [15]. Seja coautor(a) deste artigo, envie sua contribuição para `mplobo@uft.edu.br`.

Consentimento

O autor concorda com [16].

Como citar este artigo?

https://doi.org/10.31219/osf.io/6rj4f
https://zenodo.org/record/5015323

Referências

[1] Lobo, Matheus P. "Sistemas Dinâmicos Discretos: Um Passeio Aleatório." *OSF Preprints*, 15 May 2021.
https://doi.org/10.31219/osf.io/by4p6

[2] Feldman, David P. *Chaos and fractals: an elementary introduction.* Oxford University Press, 2012.
http://books.google.com/books?vid=exnWM_ZHK0MC

[3] Strogatz, Steven H. *Nonlinear dynamics and chaos with student solutions manual: With applications to physics, biology, chemistry, and engineering.* CRC press, 2018.
http://books.google.com/books?vid=wUBvDwAAQBAJ

[4] Lobo, Matheus P. "Ensaio Didático Sobre Os Conjuntos De Julia E De Mandelbrot." *OSF Preprints*, 7 May 2021.
https://doi.org/10.31219/osf.io/fkvrt

[5] Lesmoir-Gordon, Nigel, ed. *The Colours of Infinity: The Beauty and Power of Fractals.* Springer Science & Business Media, 2010.
http://books.google.com/books?vid=ahOe6w3RnP4C

[6] Wikipedia. "Julia set."
https://en.wikipedia.org/wiki/Julia_set

[7] Wikipedia. "Mandelbrot set."
https://en.wikipedia.org/wiki/Mandelbrot_set

[8] Mandelbrot, Benoit B. *The fractal geometry of nature.* Vol. 1. New York: WH freeman, 1982.

[9] Barnsley, Michael F. *Fractals everywhere*. Academic press, 2014.
http://books.google.com/books?vid=PbMAAQAAQBAJ

[10] Lesmoir-Gordon, Nigel, ed. *The Colours of Infinity: The Beauty and Power of Fractals*. Springer Science & Business Media, 2010.
http://books.google.com/books?vid=ahOe6w3RnP4C

[11] Stewart, Ian. *Does God play dice?: The new mathematics of chaos*. Penguin UK, 1997.
http://books.google.com/books?vid=wMhsGlFH8OEC

[12] Stewart, Ian. *Do Dice Play God?: The Mathematics of Uncertainty*. Hachette UK, 2019.
http://books.google.com/books?vid=fESDDwAAQBAJ

[13] Lobo, Matheus P. "The Logistics of Quantum Spacetime." *OSF Preprints*, 10 May 2021.
https://doi.org/10.31219/osf.io/s2dnt

[14] Lobo, Matheus P. "Time Is a Discrete Dynamical System." *OSF Preprints*, 21 May 2021.
https://doi.org/10.31219/osf.io/8f4yg

[15] Lobo, Matheus P. "Open Journal of Mathematics and Physics (OJMP)." *OSF*, 21 Apr. 2020.
https://doi.org/10.17605/osf.io/6hzyp

[16] Lobo, Matheus P. "Simple Guidelines for Authors: Open Journal of Mathematics and Physics." *OSF Preprints*, 15 Nov. 2019.
https://doi.org/10.31219/osf.io/fk836

Colaboração Matemática Aberta

Matheus Pereira Lobo (autor principal, mplobo@uft.edu.br)[1,2]
https://orcid.org/0000-0003-4554-1372

[1]Universidade Federal do Tocantins (Brasil)
[2]Universidade Aberta (UAb, Portugal)