[white paper]

Diamond Open Access

[waiting peer review]

Searching for new theorems in M: a pure mathematical programming language

Open Mathematics Collaboration*[†]

March 2, 2021

Abstract

We present a project to be deployed in Python to serve as a powerful auxiliar tool for theorem proving. In the future, it can be turned into a programming language in its own right.

keywords: m software, theorem prover, pure mathematics

The most updated version of this paper is available at

<https://osf.io/6gyq4/download>

Preamble

1. *This paper hasn't undergone peer review yet.*

*All *authors* with their *affiliations* appear at the end of this paper.

[†]Corresponding author: mplobo@uft.edu.br | **Open Mathematics Collaboration**

Introduction

2. A **universal** and **unified scientific database**, organized by precise and unique tags, *searchable* both by **human** and **artificial intelligence**, is possible, specially due to the advanced state of the art in the digital technologies we dispose at our fingertips nowadays [1–3].
3. **Artificial intelligence**, *programmed by humans*, might be able in the near future to *inspect all axioms and theorems* in **pure mathematics** so that new theorems *can arise from it naturally*.

M language

4. Hereafter, we refer to **M** as the **programming language** capable of *analyzing, comparing, and drawing conclusions* from theorems and axioms in **pure mathematics**.

Stages of the project

A

5. Deploy in *python* a search engine for **pure mathematics**.
6. In **M**, **theorems** and **axioms** are searchable by *tags*.

B

7. *Insert* **axioms** and **theorems**, each with precise tags like in [4–8].
8. This stage consists of *feeding* a digital **Open Mathematics Knowledge Base** [4] into the **M software**.
9. (7) and (8) are *performed by humans*.

C

10. Build a ***Super Graph*** (SG) [9–11] *connecting all axioms that **prove** the **theorems**.*

D

11. Deploy an *algorithm* to find *patterns* in the SG, based on tags.

E

12. This stage is devoted to *artificial intelligence*.
13. The program should *read* new **theorems** and **axioms** and *add pieces of codes into itself*.
14. Subsequently, it *searches* for *new patterns* and *theorems* using **machine learning**.

Objects in M

15. The following **commands** take into account only the *mathematical objects added* into the **knowledge base** (check `add.ipynb` in the Appendix).
16. `tags()` *shows all searchable tags*.
17. `s('primes')` *accomplishes a simple search for the tag “primes” (it shows all mathematical objects regarding prime numbers)*.
18. `proof('primes')` *shows mathematical proofs about prime numbers*.
19. `m('primes')` *searches for the tag “primes” (it shows all mathematical objects that need prerequisites)*.

In the Appendix

20. All files are available for **download** here [14] (subfolder “195”) or by the *following links*.
21. omkb.py
Python library (the *search engine*)
<https://osf.io/9shbg>
22. add.ipynb
Jupyter notebook that adds **content** into the **mathematical knowledge base**.
<https://osf.io/b3f6h/>
23. example.ipynb
A Jupyter notebook with some examples.
<https://osf.io/qxpw5/>

Final Remarks

24. We hope that the **M language** in the future ultimately be consisted of a huge *mathematical database* comprising **axioms** and **theorems** from nearly all areas in addition to a *highly intelligent algorithm* programmed for *searching new connections* in the realm of the so vast mathematical world.
25. If the mathematical community embraces this very audacious project, the chances of success are high.

Open Invitation

Review, add content, and co-author this paper [12, 13].
Join the **Open Mathematics Collaboration**.
Send your contribution to mplobo@uft.edu.br.

Open Science

The **latex file** for this paper together with other *supplementary files* are available [14].

Ethical conduct of research

This original work was pre-registered under the OSF Preprints [15]; please cite it accordingly [16]. This will ensure that researches are conducted with integrity and intellectual honesty at all times and by all means.

Acknowledgements

+ Center for Open Science

<https://cos.io>

+ Open Science Framework

<https://osf.io>

Agreement

26. All authors **agree** with [13].

References

- [1] Lobo, Matheus P. “Scientific Tags.” *OSF Preprints*, 6 May 2020. <https://doi.org/10.31219/osf.io/tahx5>
- [2] Lobo, Matheus P. “Universal Knowledge Base.” *OSF Preprints*, 21 June 2020. <https://doi.org/10.31219/osf.io/pwvzt>

- [3] Lobo, Matheus P. “Open Knowledge Base from Resources and Units of Knowledge.” *OSF Preprints*, 17 May 2020.
<https://doi.org/10.31219/osf.io/7vayt>
- [4] Lobo, Matheus P. “Open Mathematics Knowledge Base.” *OSF Preprints*, 13 May 2020.
<https://doi.org/10.31219/osf.io/evq8a>
- [5] Lobo, Matheus P. “Mathematical Tags of Group Theory.” *OSF Preprints*, 10 May 2020.
<https://doi.org/10.31219/osf.io/9xk68>
- [6] Lobo, Matheus P. “A List of Notations and Mathematical Definitions for Abstract Algebra Organized by Tags.” *OSF Preprints*, 6 May 2020. <https://doi.org/10.31219/osf.io/u8yx2>
- [7] Calcina, Sabrina G. S. “Test Functions and Distributions (open Mathematics Knowledge Base).” *OSF Preprints*, 23 July 2020.
<https://doi.org/10.31219/osf.io/xne52>
- [8] Hanco, Alvaro J. Y. “Differential Forms (open Mathematics Knowledge Base).” *OSF Preprints*, 19 July 2020.
<https://doi.org/10.31219/osf.io/g7uqb>
- [9] West, Douglas Brent. *Introduction to graph theory*. Vol. 2. Upper Saddle River, NJ: Prentice hall, 1996.
- [10] Bollobás, Béla. *Modern graph theory*. Vol. 184. Springer Science & Business Media, 2013.
- [11] Biggs, Norman, E. Keith Lloyd, and Robin J. Wilson. *Graph Theory*, 1736-1936. Oxford University Press, 1986.
- [12] Lobo, Matheus P. “Microarticles.” *OSF Preprints*, 28 Oct. 2019.
<https://doi.org/10.31219/osf.io/ejrct>

- [13] Lobo, Matheus P. “Simple Guidelines for Authors: Open Journal of Mathematics and Physics.” *OSF Preprints*, 15 Nov. 2019.
<https://doi.org/10.31219/osf.io/fk836>
- [14] Lobo, Matheus P. “Open Journal of Mathematics and Physics (OJMP).” *OSF*, 21 Apr. 2020.
<https://doi.org/10.17605/osf.io/6hzyp>
<https://osf.io/6hzyp/files>
- [15] COS. *Open Science Framework*. <https://osf.io>
- [16] Lobo, Matheus P. “Searching for New Theorems in M: A Pure Mathematical Programming Language.” *OSF Preprints*, 31 Dec. 2020.
<https://doi.org/10.31219/osf.io/6gyq4>

The Open Mathematics Collaboration

Matheus Pereira Lobo (lead author, mplobo@uft.edu.br)^{1,2}
<https://orcid.org/0000-0003-4554-1372>

Sergio Williams Ferreira de Sousa¹
(programmer, wlllyvn@gmail.com)

¹Federal University of Tocantins (Brazil)

²Universidade Aberta (UAb, Portugal)

example

January 17, 2021

0.1 Example of M

First, import the following library.

```
[1]: from omkb import *  
globals().update(aaz.load())  
globals().update({'aaz.aaz1':add_aaz1()})
```

```
[2]: # To show all the tags inserted into the knowledge base  
tags()
```

1. +	27. factorial	53. primeira ordem
2. :=	28. finite	54. primes
3. :	29. função	55. primitiva
4. L-símbolo	30. função n-ária	56. proof
5. alcance	31. fórmula	57. prova
6. aridade	32. fórmula atômica	58. quantificador
7. atômica	33. goldbach	59. real
8. axiom	34. grupo	60. recursão
9. axioma	35. identidade	61. relação
10. cadeia	36. igualdade	62. relação n-ária
11. caso base	37. induction	63. sequence
12. caso indutivo	38. indução	64. sequência
13. complexidade	39. infinite	65. simples
14. conectivo	40. inversa	66. sintaxe
15. conjecture	41. linguagem	67. sistema
16. conjunto	42. mais	68. subfórmula
17. constante	43. metalinguístico	69. símbolo
18. definição	44. modelo	70. símbolo constante
19. equation	45. n-upla	71. termo
20. equivalente	46. n-ária	72. theorem
21. espaço	47. no prime	73. trio ordenado
22. especificar	48. notação	74. upla
23. estrutura	49. notação polonesa	75. variable
24. estrutura matemática	50. número real	76. variável
25. even	51. operação binária	
26. exemplo	52. parêntesis	


```
[3]: # To show all the tags inserted into the knowledge base and their corresponding
      ↪ objects
tags(1)
```

```
1. +...[aap]
2. :=...[aae]
3. : ...[aba]
4. L-símbolo...[aay]
5. alcance...[abf]
6. aridade...[aao, aaq, aar, abb, abf]
7. atômica...[abh]
8. axiom...[aac]
9. axioma...[aaf, aag, aaj]
10. cadeia...[aam, aax, abb, abe, abf]
11. caso base...[abi, abk]
12. caso indutivo...[abj, abk]
13. complexidade...[abn]
14. conectivo...[aak, abh, abk, abl, abo]
15. conjecture...[aaa]
16. conjunto...[aag, aaj, aaw]
17. constante...[aak, aas, abb]
18. definição...[aae, aaf, aag, aah, aak, aal, aam, aao, abf]
19. equation...[aac]
20. equivalente...[aba, abd, abe]
21. espaço...[aaj]
22. especificar...[aas]
23. estrutura...[aah, aai, aaj, abc, abk, abo]
24. estrutura matemática...[aah, aai, aaj, abc]
25. even...[aaa]
26. exemplo...[aai, aap, abd]
27. factorial...[aac]
28. finite...[aab]
29. função...[aak, aao, aap, aas, abb, abe]
30. função n-ária...[abb]
31. fórmula...[abc, abf, abg, abh, abk, abl, abn, abo]
32. fórmula atômica...[abh]
33. goldbach...[aaa]
34. grupo...[aai, aaw]
35. identidade...[aau, aaw]
36. igualdade...[aak]
37. induction...[aab]
38. indução...[abi, abj, abk]
39. infinite...[aab]
40. inversa...[aav, aaw]
41. linguagem...[aal, aan, aas, aax, aay, abb, abf]
42. mais...[aap]
43. metalinguístico...[aae, aba]
44. modelo...[aah, aai, aaj, abc]
```

45. n-upla...[aaq, aar]
 46. n-ária...[aao, aar, abb, abf]
 47. no prime...[aad]
 48. notação...[aae, aak, aba, abd, abe]
 49. notação polonesa...[abd, abe, abf]
 50. número real...[aaj]
 51. operação binária...[aat, aaw]
 52. parêntesis...[aak]
 53. primeira ordem...[aan]
 54. primes...[aaa, aad]
 55. primitiva...[abh]
 56. proof...[aab]
 57. prova...[abi, abj]
 58. quantificador...[aak, abh, abk, abl, abo]
 59. real...[aaj]
 60. recursão...[abg, abh]
 61. relação...[aak, aar, aas, abf]
 62. relação n-ária...[abf]
 63. sequence...[aad]
 64. sequência...[aam]
 65. simples...[abh, abl]
 66. sintaxe...[aal]
 67. sistema...[aag]
 68. subfórmula...[abl, abn]
 69. símbolo...[aae, aak, aal, aam, aan, aap, aas, aax, aay, aba, abb, abe, abf]
 70. símbolo constante...[abb]
 71. termo...[aax, abb, abf]
 72. theorem...[aad]
 73. trio ordenado...[aaj]
 74. upla...[aaq, aar]
 75. variable...[aac]
 76. variável...[aak, aap, abb, abf]

[4]: `s('goldbach')`

```

-----
tags: goldbach
results: 1 from 1

-----
goldbach:
aaa [conjecture, goldbach, primes, even]
 $\forall n \in \mathbb{N}_{>1} : (m = 2n) \rightarrow (m = p_i + p_j)$ 

```

[5]: `s('primes/conjecture')`

```

-----
tags: primes, conjecture

```

results: 2 from 2

conjecture, primes:
aaa [conjecture, goldbach, primes, even]

$\forall n \in \mathbb{N}_{>1} : (m = 2n) \rightarrow (m = p_i + p_j)$

primes:
aad [theorem, primes, sequence, no prime]

$\forall n \in \mathbb{N}_{>0}, \exists (a_1, a_2, \dots, a_n) = \text{sequence of natural numbers with no prime}$

[6]: `s('primes/theorem')`

tags: theorem, primes
results: 2 from 2

theorem, primes:
aad [theorem, primes, sequence, no prime]

$\forall n \in \mathbb{N}_{>0}, \exists (a_1, a_2, \dots, a_n) = \text{sequence of natural numbers with no prime}$

primes:
aaa [conjecture, goldbach, primes, even]

$\forall n \in \mathbb{N}_{>1} : (m = 2n) \rightarrow (m = p_i + p_j)$

[7]: `proof('primes')`

for the tags: primes

results: 2 de 2

aab, aac ~> aad

aad: [theorem, primes, sequence, no prime]
 $\forall n \in \mathbb{N}_{>0}, \exists (a_1, a_2, \dots, a_n) = \text{sequence of natural numbers with no prime}$

aab: [proof, induction, infinite, finite]
induction

aac: [axiom, variable, equation, factorial]
 $x = (n + 1)! + 2$

~> aaa

aaa: [conjecture, goldbach, primes, even]
 $\forall n \in \mathbb{N}_{>1} : (m = 2n) \rightarrow (m = p_i + p_j)$

[8]: m('linguagem')

for the tags: linguagem

-----aal: [sintaxe, linguagem]-----

sintaxe := símbolos (de uma linguagem)

aak:

CATEGORIAS DE SÍMBOLOS

Parêntesis: (,)

Conectivos: $\vee, \neg$

Quantificador: $\forall$

Variáveis (uma para cada inteiro positivo n): $v_1, v_2, \dots, v_n, \dots$

Vars := conjunto de símbolos de variáveis

Igualdade: =

Constante: para cada n inteiro positivo, algum conjunto contendo zero ou mais símbolos

Função: para cada n inteiro positivo, algum conjunto contendo zero ou mais símbolos de funções n -árias

Relação: para cada n inteiro positivo, algum conjunto contendo zero ou mais símbolos de relações n -árias

aae:

O símbolo := indica que o que aparece à esquerda é definido como o que aparece à direita.

-----aan: [linguagem, primeira ordem]-----

linguagem de primeira ordem := coleção infinita de símbolos distintos (tal que nenhum esteja contido no outro)

aak:

CATEGORIAS DE SÍMBOLOS

Parêntesis: (,)

Conectivos: $\vee, \neg$

Quantificador: $\forall$

Variáveis (uma para cada inteiro positivo n): $v_1, v_2, \dots, v_n, \dots$

Vars := conjunto de símbolos de variáveis

Igualdade: $=$

Constante: para cada n inteiro positivo, algum conjunto contendo zero ou mais símbolos

Função: para cada n inteiro positivo, algum conjunto contendo zero ou mais símbolos de funções n -árias

Relação: para cada n inteiro positivo, algum conjunto contendo zero ou mais símbolos de relações n -árias

aae:

O símbolo $:=$ indica que o que aparece à esquerda é definido como o que aparece à direita.

_____aas: [especificar, linguagem]_____

especificar uma linguagem $:=$ listar os símbolos (constante, função, relação)

[]:

add

January 18, 2021

```
[12]: from omkb import *
globals().update(aaz.load())
globals().update({'aaz.aaz1':add_aaz1()})
```

```
[13]: # aaz
# abc = aaz('abc', latex, tags, tags_name, derivation, dependent, references)
# aaa = aaz('aaa', r'', [], [], [], [], [])
```

0.1 AAA: Goldbach's Conjecture

$\forall n \in \mathbb{N}_{>1} : (m = 2n) \rightarrow (m = p_i + p_j)$

```
[14]: aaa = aaz('aaa', r'\forall n \in \mathbb{N}_{>1} : (m=2n) \rightarrow (m=p_i+p_j)',
               ['conjecture', 'goldbach', 'primes', 'even'], ['conjecture', 'goldbach'])
aaa.save()
aaa()
print(aaa.tags)
aaa.tags_name
```

saved

$\forall n \in \mathbb{N}_{>1} : (m = 2n) \rightarrow (m = p_i + p_j)$

['conjecture', 'goldbach', 'primes', 'even']

```
[14]: ['conjecture', 'goldbach']
```

0.2 AAB: Proof by Induction

induction

```
[15]: aab = aaz('aab', r'\mbox{induction}',
               □
               ↪ ['proof', 'induction', 'infinite', 'finite'], ['proof', 'induction'], [abi, abj], [])
aab.save()
aab()
print(aab.tags)
aab.tags_name
```

saved

induction

['proof', 'induction', 'infinite', 'finite']

[15]: ['proof', 'induction']

0.3 AAC: Factorial (equation)

$$x = (n + 1)! + 2$$

```
[16]: aac = aaz('aac',r'x=(n+1)!+2',
              ['axiom','variable','equation','factorial'],['equation','factorial'])
aac.save()
aac()
print(aac.tags)
aac.tags_name
```

saved

$$x = (n + 1)! + 2$$

['axiom', 'variable', 'equation', 'factorial']

[16]: ['equation', 'factorial']

0.4 AAD: Sequence with no primes (theorem)

$\forall n \in \mathbb{N}_{>0}, \exists (a_1, a_2, \dots, a_n) = \text{sequence of natural numbers with no prime}$

```
[74]: aad = aaz('aad',r'\forall n \in \mathbb{N}_{>0}, \exists (a_1, a_2, \dots, a_n) = \text{sequence of natural numbers with no prime}',
              ['theorem','primes','sequence','no prime'],['theorem','sequence','no prime'],[aab,aac])
aad.save()
aad()
print(aad.tags)
print(aad.tags_name)
aad.d
```

saved

$\forall n \in \mathbb{N}_{>0}, \exists (a_1, a_2, \dots, a_n) = \text{sequence of natural numbers with no prime}$

['theorem', 'primes', 'sequence', 'no prime']

['theorem', 'sequence', 'no prime']

[74]: [:aab, :aac]

0.5 AAE: Definição (símbolo)

\$O símbolo := indica que o que aparece à esquerda é definido como o que aparece à direita.\$

```
[18]: aae = aaz('aae',r'\mbox{O símbolo $:= $ indica que o que aparece à esquerda é
↳definido como o que aparece à direita.}',
            ['símbolo','metalinguístico','definição',':
↳=' , 'notação'], ['símbolo','definição',':=','notação'])
aae.save()
aae()
print(aae.tags)
aae.tags_name
```

saved

O símbolo $:=$ indica que o que aparece à esquerda é definido como o que aparece à direita.

['símbolo', 'metalinguístico', 'definição', ':=', 'notação']

```
[18]: ['símbolo', 'definição', ':=', 'notação']
```

0.6 AAF: Axioma

axioma $:=$ verdade matemática evidente que não precisa ser demonstrada

```
[19]: aaf = aaz('aaf',r'\mbox{axioma $:= $ verdade matemática evidente que não precisa
↳ser demonstrada}',
            ['axioma','definição'])
aaf.save()
aaf()
aaf.tags
```

saved

axioma $:=$ verdade matemática evidente que não precisa ser demonstrada

```
[19]: ['axioma', 'definição']
```

0.7 AAG: Sistema de Axiomas

sistema de axiomas $:=$ conjunto de axiomas

```
[20]: aag = aaz('aag',r'\mbox{sistema de axiomas $:= $ conjunto de axiomas}',
            ↳
↳['sistema','axioma','conjunto','definição'], ['sistema','axioma'], [], [aaf])
aag.save()
aag()
print(aag.tags)
aag.tags_name
```

saved

sistema de axiomas $:=$ conjunto de axiomas

['sistema', 'axioma', 'conjunto', 'definição']


```
[20]: ['sistema', 'axioma']
```

0.8 AAH: Estrutura matemática

modelo := estrutura matemática

```
[21]: aah = aaz('aah', r'\mbox{modelo $:= $ estrutura matemática}',  
              ['modelo', 'estrutura', 'estrutura_␣  
              ↪matemática', 'definição'], ['modelo'], [], [])  
aah.save()  
aah()  
print(aah.tags)  
aah.tags_name
```

saved

modelo := estrutura matemática

['modelo', 'estrutura', 'estrutura matemática', 'definição']

```
[21]: ['modelo']
```

0.9 AAI: grupo (exemplo de modelo)

Um grupo é um modelo (ou estrutura matemática) de um conjunto de axiomas.

```
[22]: aai = aaz('aai', r'\mbox{Um grupo é um modelo (ou estrutura matemática) de um_␣  
              ↪conjunto de axiomas.}',  
              ['grupo', 'modelo', 'estrutura', 'estrutura_␣  
              ↪matemática', 'exemplo'], ['grupo'], [], [aah, aag, aaf])  
aai.save()  
aai()  
print(aai.tags)  
print(aai.tags_name)  
aai.dep
```

saved

Um grupo é um modelo (ou estrutura matemática) de um conjunto de axiomas.

['grupo', 'modelo', 'estrutura', 'estrutura matemática', 'exemplo']
['grupo']

```
[22]: [_:aah, _:aag, _:aaf]
```

0.10 AAJ: $\mathbb{R}^3$ (exemplo de modelo)

$\mathbb{R}^3$, que é uma coleção de trios ordenados de números reais,
é um modelo (ou estrutura matemática) de axiomas do espaço vetorial.

```
[84]: aaj = aaz('aaj',r'''\mathbb R^3, \mbox{ que é uma coleção de trios ordenados de
↪números reais,}\n
\mbox{é um modelo (ou estrutura matemática) de axiomas do espaço vetorial.}''',
      ['conjunto','trio ordenado','número_
↪real','real','modelo','estrutura','estrutura matemática',
      'axioma','espaço'],['trio ordenado','número_
↪real','real','exemplo'],[],[aah,aag,aaf])
aaj.save()
aaj()
print(aaj.tags)
print(aaj.tags_name)
aaj.dep
```

saved

$\mathbb{R}^3$, que é uma coleção de trios ordenados de números reais,
é um modelo (ou estrutura matemática) de axiomas do espaço vetorial.

```
['conjunto', 'trio ordenado', 'número real', 'real', 'modelo', 'estrutura',
'estrutura matemática', 'axioma', 'espaço']
['trio ordenado', 'número real', 'real', 'exemplo']
```

```
[84]: [_:aah, _:aag, _:aaf]
```

0.11 AAK: Categorias de Símbolos

CATEGORIAS DE SÍMBOLO

Parêntesis: (,)

Conectivos: $\vee, \neg$

Quantificador: $\forall$

Variáveis (uma para cada inteiro positivo n): $v_1, v_2, \dots, v_n, \dots$

Vars := conjunto de símbolos de variáveis

Igualdade: =

Constante: para cada n inteiro positivo, algum conjunto contendo zero ou mais símbolos

Função: para cada n inteiro positivo, algum conjunto contendo zero ou mais símbolos de funções
 n -árias

Relação: para cada n inteiro positivo, algum conjunto contendo zero ou mais símbolos de relações
 n -árias

```
[90]: aak = aaz('aak',r'''\mbox{CATEGORIAS DE SÍMBOLOS}\n
\mbox{Parêntesis: $(,)$}\n\n\mbox{Conectivos: $\lor, \neg$}\n\n\mbox{Quantificador:
↪$\forall$}\n\n
\mbox{Variáveis (uma para cada inteiro positivo $n$): $v_1, v_2, \dots, v_n, \dots$}\n\n
\mbox{Vars $:=$ conjunto de símbolos de variáveis}\n\n\mbox{Igualdade: $=$}\n\n
\mbox{Constante: para cada $n$ inteiro positivo, algum conjunto contendo zero_
↪ou mais símbolos}\n\n
\mbox{Função: para cada $n$ inteiro positivo, algum conjunto contendo zero ou_
↪mais símbolos de funções $n$-árias}\n\n
```

```

\mbox{Relação: para cada $n$ inteiro positivo, algum conjunto contendo zero ou
↪mais símbolos de relações $n$-árias}}'',
    ↵
↪['símbolo','definição','parêntesis','conectivo','quantificador','variável',
    ↵
↪'igualdade','constante','função','relação','notação'],['símbolo','notação'],
    [],[aae])
aak.save()
aak()
print(aak.tags)
print(aak.tags_name)
aak.dep

```

saved

CATEGORIAS DE SÍMBOLOS

Parêntesis: (,)

Conectivos: $\vee, \neg$

Quantificador: $\forall$

Variáveis (uma para cada inteiro positivo n): $v_1, v_2, \dots, v_n, \dots$

Vars := conjunto de símbolos de variáveis

Igualdade: =

Constante: para cada n inteiro positivo, algum conjunto contendo zero ou mais símbolos

Função: para cada n inteiro positivo, algum conjunto contendo zero ou mais símbolos de funções n -árias

Relação: para cada n inteiro positivo, algum conjunto contendo zero ou mais símbolos de relações n -árias

```

['símbolo', 'definição', 'parêntesis', 'conectivo', 'quantificador', 'variável',
'igualdade', 'constante', 'função', 'relação', 'notação']
['símbolo', 'notação']

```

[90]: [_:aae]

0.12 AAL: Sintaxe de uma linguagem

sintaxe := símbolos (de uma linguagem)

```

[25]: aal = aaz('aal',r'\mbox{sintaxe $:=$ símbolos (de uma linguagem)}',
    ↵
↪['sintaxe','linguagem','símbolo','definição'],['sintaxe','linguagem'],[],
    [aak,aae])
aal.save()
aal()
print(aal.tags)
print(aal.tags_name)
aal.dep

```

saved

sintaxe := símbolos (de uma linguagem)

```
['sintaxe', 'linguagem', 'símbolo', 'definição']
['sintaxe', 'linguagem']
```

[25]: [_:aak, _:aae]

0.13 AAM: Cadeia de Símbolos

cadeia de símbolos := sequência de símbolos

```
[26]: aam = aaz('aam', r'\mbox{cadeia de símbolos $:= $ sequência de símbolos}',
               ['cadeia', 'símbolo', 'sequência', 'definição'], ['cadeia', 'símbolo'], [],
               [aak, aae])
aam.save()
aam()
print(aam.tags)
print(aam.tags_name)
aam.dep
```

saved

cadeia de símbolos := sequência de símbolos

```
['cadeia', 'símbolo', 'sequência', 'definição']
['cadeia', 'símbolo']
```

[26]: [_:aak, _:aae]

0.14 AAN: Linguagem de Primeira Ordem

linguagem de primeira ordem := coleção infinita de símbolos distintos (tal que nenhum esteja contido no outro)

```
[91]: aan = aaz('aan', r'''\mbox{linguagem de primeira ordem $:= $ coleção infinita de
→ símbolos distintos (tal que nenhum esteja contido no outro)}''',
               ['linguagem', 'primeira ordem', 'símbolo'], ['linguagem', 'primeira_
→ ordem'], [], [aak, aae])
aan.save()
aan()
print(aan.tags)
print(aan.tags_name)
aan.dep
```

saved

linguagem de primeira ordem := coleção infinita de símbolos distintos (tal que nenhum esteja contido no outro)

```
['linguagem', 'primeira ordem', 'símbolo']
['linguagem', 'primeira ordem']
```

[91]: [_:aak, _:aae]

0.15 AAO: Função n -ária

função n -ária := função de n variáveis

```
[88]: aao = aaz('aao',r'\mbox{função $n$-ária $:=$ função de $n$ variáveis}',  
              ['função','n-ária','aridade','definição'],['função','n-ária'],[],[])  
aao.save()  
aao()  
print(aao.tags)  
print(aao.tags_name)  
aao.dep
```

saved

função n -ária := função de n variáveis

```
['função', 'n-ária', 'aridade', 'definição']  
['função', 'n-ária']
```

[88]: []

0.16 AAP: Símbolo Mais (+)

O símbolo $+$ tem aridade 2, ou seja, é uma função de duas variáveis.

```
[29]: aap = aaz('aap',r'\mbox{O símbolo $+$ tem aridade 2, ou seja, é uma função de_  
      ↪duas variáveis.}',  
              ↪  
      ↪↪['símbolo','mais','+', 'função','variável','exemplo'],['símbolo','mais','+',],  
      ↪↪[],[])  
aap.save()  
aap()  
print(aap.tags)  
print(aap.tags_name)  
aap.dep
```

saved

O símbolo $+$ tem aridade 2, ou seja, é uma função de duas variáveis.

```
['símbolo', 'mais', '+', 'função', 'variável', 'exemplo']  
['símbolo', 'mais', '+']
```

[29]: []

0.17 AAQ: n -upla

n -upla := ?

```
[30]: aaq = aaz('aaq',r'\n\mbox{-upla}=?',  
              ['n-upla','aridade','upla'],['n-upla','upla'],[],[])  
aaq.save()
```

```

aaq()
print(aaq.tags)
print(aaq.tags_name)
aaq.dep

```

saved

n -upla =?

```

['n-upla', 'aridade', 'upla']
['n-upla', 'upla']

```

[30]: []

0.18 AAR: Relação n -ária

relação n -ária := relação em n -uplas de objetos

```

[31]: aar = aaz('aar',r'\mbox{relação $n$-ária $:=$ relação em $n$-uplas de objetos}',
               ↳
               ↳(['relação', 'n-ária', 'aridade', 'n-upla', 'upla'], ['relação', 'n-ária'], [], [aaq])
aar.save()
aar()
print(aar.tags)
print(aar.tags_name)
aar.dep

```

saved

relação n -ária := relação em n -uplas de objetos

```

['relação', 'n-ária', 'aridade', 'n-upla', 'upla']
['relação', 'n-ária']

```

[31]: [_:aaq]

0.19 AAS: Especificar uma Linguagem

especificar uma linguagem := listar os símbolos (constante, função, relação)

```

[32]: aas = aaz('aas',r'\mbox{especificar uma linguagem $:=$ listar os símbolos_
               ↳
               ↳(constante, função, relação)}',
               ↳
               ↳(['especificar', 'linguagem', 'símbolo', 'constante', 'função', 'relação'],
               ↳
               ↳(['especificar', 'linguagem'], [], []))
aas.save()
aas()
print(aas.tags)
print(aas.tags_name)
aas.dep

```

saved

especificar uma linguagem := listar os símbolos (constante, função, relação)

```
['especificar', 'linguagem', 'símbolo', 'constante', 'função', 'relação']  
['especificar', 'linguagem']
```

[32]: []

0.20 AAT: Operação Binária

operação binária = ?

```
[33]: aat = aaz('aat', r'\mbox{operação binária $=$ ?}',  
              ['operação binária'], ['operação binária'], [], [])  
aat.save()  
aat()  
print(aat.tags)  
print(aat.tags_name)  
aat.dep
```

saved

operação binária = ?

```
['operação binária']  
['operação binária']
```

[33]: []

0.21 AAU: Identidade

identidade = ?

```
[34]: aaU = aaz('aaU', r'\mbox{identidade $=$ ?}',  
              ['identidade'], ['identidade'], [], [])  
aaU.save()  
aaU()  
print(aaU.tags)  
print(aaU.tags_name)  
aaU.dep
```

saved

identidade = ?

```
['identidade']  
['identidade']
```

[34]: []

0.22 AAV: Inversa

inversa = ?

```
[35]: aav = aaz('aav',r'\mbox{inversa $=$ ?}',
             ['inversa'], ['inversa'], [], [])
aav.save()
aav()
print(aav.tags)
print(aav.tags_name)
aav.dep
```

saved

inversa = ?

```
['inversa']
['inversa']
```

```
[35]: []
```

0.23 AAW: Grupo

grupo := conjunto + operação binária + identidade + inversa

```
[36]: aaw = aaz('aaw',r'\mbox{grupo $:=$ conjunto $+$ operação binária $+$ identidade_
      ↳$+$ inversa}',
             ['grupo', 'conjunto', 'operação_
      ↳binária', 'identidade', 'inversa'], ['grupo'], [], [aat, aau, aav])
aaw.save()
aaw()
print(aaw.tags)
print(aaw.tags_name)
aaw.dep
```

saved

grupo := conjunto + operação binária + identidade + inversa

```
['grupo', 'conjunto', 'operação binária', 'identidade', 'inversa']
['grupo']
```

```
[36]: [_:aat, _:aau, _:aav]
```

0.24 AAX: Termos

Termos são cadeias de símbolos que se referem aos objetos da linguagem.

```
[37]: aax = aaz('aax',r'\mbox{Termos são cadeias de símbolos que se referem aos_
      ↳objetos da linguagem.}',
             ['termo', 'cadeia', 'símbolo', 'linguagem'], ['termo'], [], [aan, aas])
aax.save()
aax()
print(aax.tags)
print(aax.tags_name)
```



```
aax.dep
```

saved

Termos são cadeias de símbolos que se referem aos objetos da linguagem.

```
['termo', 'cadeia', 'símbolo', 'linguagem']  
['termo']
```

```
[37]: [_:aan, _:aas]
```

0.25 AAY: $\mathcal{L}$ -símbolos

$\mathcal{L}$ -símbolos significa os símbolos da linguagem $\mathcal{L}$.

```
[38]: aay = aaz('aay', r'\mbox{\mathcal L}$-símbolos significa os símbolos da linguagem  
→ \mathcal L$}',  
            ['L-símbolo', 'símbolo', 'linguagem'], ['L-símbolo'], [], [])  
aay.save()  
aay()  
print(aay.tags)  
print(aay.tags_name)  
aay.dep
```

saved

$\mathcal{L}$ -símbolos significa os símbolos da linguagem $\mathcal{L}$.

```
['L-símbolo', 'símbolo', 'linguagem']  
['L-símbolo']
```

```
[38]: []
```

0.26 ABA: Símbolo $:\equiv$

O símbolo metalinguístico $:\equiv$ significa que as cadeias de $\mathcal{L}$ -símbolos de cada lado de $:\equiv$ são idênticos.

```
[75]: aba = aaz('aba', r'\mbox{O símbolo metalinguístico $:\equiv$ significa que as  
→ cadeias de \mathcal L}$-símbolos de cada lado de $:\equiv$ são idênticos.}',  
            ['símbolo', 'metalinguístico', ':', 'equivalente', 'notação'],  
            ['símbolo', 'metalinguístico', ':  
→ ', 'equivalente', 'notação'], [], [aam, aay])  
aba.save()  
aba()  
print(aba.tags)  
print(aba.tags_name)  
aba.dep
```

saved

O símbolo metalinguístico $:\equiv$ significa que as cadeias de $\mathcal{L}$ -símbolos de cada lado de $:\equiv$ são idênticos.

```
['símbolo', 'metalinguístico', ':', 'equivalente', 'notação']
['símbolo', 'metalinguístico', ':', 'equivalente', 'notação']
```

[75]: [_:aam, _:aay]

0.27 ABB: Termo de uma Linguagem

TERMO (de uma linguagem $\mathcal{L}$) := cadeia não vazia e finita de t símbolos de $\mathcal{L}$ que satisfazem exatamente uma das seguintes condições:

- (a) t é uma variável, ou
- (b) t é um símbolo constante, ou
- (c) $t \equiv ft_1t_2\dots t_n$, sendo f um símbolo de função n -ária de $\mathcal{L}$ e cada um dos t_i é um termo de $\mathcal{L}$.

```
[93]: abb = aaz('abb',r'''\mbox{TERMO (de uma linguagem $\{\cal L\}):=$ cadeia não
→ vazia e finita de $t$ símbolos }
\mbox{de $\{\cal L\}$ que satisfazem}\mbox{exatamente uma das seguintes
→ condições:}'''\mbox{(a) $t$ é uma variável, ou}'''\mbox{(b) $t$ é um símbolo constante, ou}'''\mbox{(c) $t$:\equiv ft_1t_2\dots t_n$, sendo $f$ um símbolo de função $n$-ária de
→ $\{\cal L\}$ e cada um dos $t_i$ é um termo de $\{\cal L\}$.}''',
    ['termo','linguagem','cadeia','símbolo','variável','símbolo
→ constante','constante','função','função n-ária','n-ária','aridade'],
    ['termo'],[],[aax,aam,aan,aas,aak,aay,aba,aao])
abb.save()
abb()
print(abb.tags)
print(abb.tags_name)
abb.dep
```

saved

TERMO (de uma linguagem $\mathcal{L}$) := cadeia não vazia e finita de t símbolos de $\mathcal{L}$ que satisfazem exatamente uma das seguintes condições:

- (a) t é uma variável, ou
- (b) t é um símbolo constante, ou
- (c) $t \equiv ft_1t_2\dots t_n$, sendo f um símbolo de função n -ária de $\mathcal{L}$ e cada um dos t_i é um termo de $\mathcal{L}$.

```
['termo', 'linguagem', 'cadeia', 'símbolo', 'variável', 'símbolo constante',
'constante', 'função', 'função n-ária', 'n-ária', 'aridade']
['termo']
```

[93]: [_:aax, _:aam, _:aan, _:aas, _:aak, _:aay, _:aba, _:aao]

0.28 ABC: Fórmulas

Fórmulas são afirmações acerca dos objetos de uma estrutura matemática (modelo).

```
[41]: abc = aaz('abc',r'\mbox{Fórmulas são afirmações acerca dos objetos de uma_
↳estrutura matemática (modelo).}',
               ['fórmula','modelo','estrutura_
↳matemática','estrutura'],['fórmula'],[],[aah])
abc.save()
abc()
print(abc.tags)
print(abc.tags_name)
abc.dep
```

saved

Fórmulas são afirmações acerca dos objetos de uma estrutura matemática (modelo).

```
['fórmula', 'modelo', 'estrutura matemática', 'estrutura']
['fórmula']
```

```
[41]: [_:aah]
```

0.29 ABD: Notação Polonesa (exemplo)

Exemplo de notação polonesa

$$\cdot + \overline{3} \overline{2} \overline{4} := (\overline{3} + \overline{2}) \cdot \overline{4} := \overline{5} \cdot \overline{4} := \overline{20}$$

```
[95]: abd = aaz('abd',r'''\mbox{Exemplo de notação polonesa}\\
\cdot+{\overline{3}}\,{\overline{2}}\,{\overline{4}}:
↳\equiv({\overline{3}}+{\overline{2}})\cdot{\overline{4}}
:\equiv{\overline{5}}\cdot{\overline{4}}:\equiv{\overline{20}}''',
               ['notação polonesa','notação','exemplo','equivalente'],
               ['notação polonesa','notação','exemplo','equivalente'],[],[])
abd.save()
abd()
print(abd.tags)
print(abd.tags_name)
abd.dep
```

saved

Exemplo de notação polonesa

$$\cdot + \overline{3} \overline{2} \overline{4} := (\overline{3} + \overline{2}) \cdot \overline{4} := \overline{5} \cdot \overline{4} := \overline{20}$$

```
['notação polonesa', 'notação', 'exemplo', 'equivalente']
['notação polonesa', 'notação', 'exemplo', 'equivalente']
```

```
[95]: []
```

0.30 ABE: Função em notação polonesa

Em notação polonesa, essas duas cadeias de símbolos são equivalentes, $f t_1 t_2 \dots t_n := f(t_1, t_2, \dots, t_n)$.

```
[107]: abe = aaz('abe',r'''\mbox{Em notação polonesa, essas duas cadeias de símbolos
↪ são equivalentes,}\n
ft_1t_2...t_n:\equiv f(t_1,t_2,...,t_n).''',
          ['função','notação
↪ polonesa','notação','cadeia','símbolo','equivalente'],
          ['função','notação polonesa','notação','equivalente'],[],[])
abe.save()
abe()
print(abe.tags)
print(abe.tags_name)
abe.dep
```

saved

Em notação polonesa, essas duas cadeias de símbolos são equivalentes,
 $ft_1t_2...t_n \equiv f(t_1,t_2,...,t_n)$.

```
['função', 'notação polonesa', 'notação', 'cadeia', 'símbolo', 'equivalente']
['função', 'notação polonesa', 'notação', 'equivalente']
```

[107]: []

0.31 ABF: Fórmula (definição)

FÓRMULA de uma linguagem $\mathcal{L} \equiv$ cadeia ϕ não vazia e finita de símbolos de $\mathcal{L}$ que satisfazem exatamente uma das seguintes condições:

- (a) $\phi \equiv = t_1t_2$, sendo t_1 e t_2 termos de $\mathcal{L}$, ou
- (b) $\phi \equiv Rt_1t_2...t_n$, sendo R um símbolo de uma relação n -ária de $\mathcal{L}$, e $t_1, t_2, \dots, t_n$ são termos de $\mathcal{L}$, ou
- (c) $\phi \equiv (\neg\alpha)$, sendo α uma fórmula de $\mathcal{L}$, ou
- (d) $\phi \equiv (\alpha \vee \beta)$, sendo α e β fórmulas de $\mathcal{L}$, ou
- (e) $\phi \equiv (\forall v)(\alpha)$, sendo v uma variável e α uma fórmula de $\mathcal{L}$.

```
[102]: abf = aaz('abf',r'''\mbox{FÓRMULA de uma linguagem $\{\cal L\}:\equiv$ cadeia
↪ $\phi$ não vazia e finita de símbolos de $\{\cal L\}$}\n
\mbox{que satisfazem exatamente uma das seguintes condições:}\n
\mbox{(a) $\phi:\equiv=t_1t_2$, sendo $t_1$ e $t_2$ termos de $\{\cal L\}$, ou}\n
\mbox{(b) $\phi:\equiv Rt_1t_2...t_n$, sendo $R$ um símbolo de uma relação
↪ $n$-ária de $\{\cal L\}$, e $t_1$, $t_2$, ..., $t_n$ são termos de $\{\cal L\}$,
↪ ou}\n
\mbox{(c) $\phi:\equiv(\neg\alpha)$, sendo $\alpha$ uma fórmula de $\{\cal L\}$,
↪ ou}\n
\mbox{(d) $\phi:\equiv(\alpha\lor\beta)$, sendo $\alpha$ e $\beta$ fórmulas de
↪ $\{\cal L\}$, ou}\n
\mbox{(e) $\phi:\equiv(\forall v)(\alpha)$, sendo $v$ uma variável e $\alpha$
↪ uma fórmula de $\{\cal L\}$}.\n
\mbox{(dizemos que o alcance do quantificador $\forall$ é $\alpha$)}''',
          ['fórmula','definição','linguagem','cadeia','símbolo','termo','relação',
```

```

        'relação n-ária', 'n-ária', 'aridade', 'variável', 'notação_□
↪polonesa', 'alcance'],
        ['fórmula', 'definição'], [], [abc, aay, aba, aam, abd, abe, aax, abb, aar, aak])
abf.save()
abf()
print(abf.tags)
print(abf.tags_name)
abf.dep

```

saved

FÓRMULA de uma linguagem $\mathcal{L} \equiv$ cadeia ϕ não vazia e finita de símbolos de $\mathcal{L}$ que satisfazem exatamente uma das seguintes condições:

- (a) $\phi \equiv t_1 t_2$, sendo t_1 e t_2 termos de $\mathcal{L}$, ou
 - (b) $\phi \equiv R t_1 t_2 \dots t_n$, sendo R um símbolo de uma relação n -ária de $\mathcal{L}$, e $t_1, t_2, \dots, t_n$ são termos de $\mathcal{L}$, ou
 - (c) $\phi \equiv (\neg \alpha)$, sendo α uma fórmula de $\mathcal{L}$, ou
 - (d) $\phi \equiv (\alpha \vee \beta)$, sendo α e β fórmulas de $\mathcal{L}$, ou
 - (e) $\phi \equiv (\forall v)(\alpha)$, sendo v uma variável e α uma fórmula de $\mathcal{L}$.
- (dizemos que o alcance do quantificador $\forall$ é α)

```

['fórmula', 'definição', 'linguagem', 'cadeia', 'símbolo', 'termo', 'relação',
'relação n-ária', 'n-ária', 'aridade', 'variável', 'notação polonesa',
'alcance']
['fórmula', 'definição']

```

[102]: `[_:abc, _:aay, _:aba, _:aam, _:abd, _:abe, _:aax, _:abb, _:aar, _:aak]`

0.32 ABG: Recursão

recursão := fórmula que contém outra(s) fórmula(s)

```

[45]: abg = aaz('abg', r'\mbox{recursão $:= $ fórmula que contém outra(s) fórmula(s)}',
        ['recursão', 'fórmula'], ['recursão'], [], [])
abg.save()
abg()
print(abg.tags)
print(abg.tags_name)
abg.dep

```

saved

recursão := fórmula que contém outra(s) fórmula(s)

```

['recursão', 'fórmula']
['recursão']

```

[45]: `[]`

0.33 ABH: Fórmula Atômica

fórmula atômica (mais simples) := primitiva (não recursiva) e tem 0 conectivo/quantificador

```
[108]: abh = aaz('abh',r'\mbox{fórmula atômica (mais simples) $:= $ primitiva (não_
→recursiva) e tem 0 conectivo/quantificador}',
            ['fórmula_
→atômica','fórmula','atômica','primitiva','recursão','simples','conectivo',
            'quantificador'],['fórmula atômica','fórmula','atômica'],[],[abl])
abh.save()
abh()
print(abh.tags)
print(abh.tags_name)
abh.dep
```

saved

fórmula atômica (mais simples) := primitiva (não recursiva) e tem 0 conectivo/quantificador

```
['fórmula atômica', 'fórmula', 'atômica', 'primitiva', 'recursão', 'simples',
'conectivo', 'quantificador']
['fórmula atômica', 'fórmula', 'atômica']
```

```
[108]: [_:abl]
```

0.34 ABI: Caso Base ($n = 1$)

caso base: $n = 1$

```
[47]: abi = aaz('abi',r'\mbox{caso base: $n=1$}',
                ['caso base','prova','indução'],['caso base','indução'],[],[])
abi.save()
abi()
print(abi.tags)
print(abi.tags_name)
abi.dep
```

saved

caso base: $n = 1$

```
['caso base', 'prova', 'indução']
['caso base', 'indução']
```

```
[47]: []
```

0.35 ABJ: Caso Indutivo ($k \geq 1$)

caso indutivo: $k \geq 1$

O raciocínio envolvido no caso indutivo é o da recursão.

```
[48]: abj = aaz('abj',r'\mbox{caso indutivo: $k \geq 1$}',
                ['caso indutivo','prova','indução'],['caso_
→indutivo','indução'],[],[abg])
abj.save()
```

```

abj()
print(abj.tags)
print(abj.tags_name)
abj.dep

```

saved

caso indutivo: $k \geq 1$

```

['caso indutivo', 'prova', 'indução']
['caso indutivo', 'indução']

```

[48]: [_:abg]

0.36 ABK: Indução na Complexidade da Fórmula/Termo

INDUÇÃO na COMPLEXIDADE da FÓRMULA/TERMO

caso base = fórmulas atômicas

caso indutivo = fórmulas recursivas

```

[103]: abk = aaz('abk',r'''\mbox{INDUÇÃO na COMPLEXIDADE da FÓRMULA/TERMO}\\
\mbox{caso base $=$ fórmulas atômicas}\\mbox{caso indutivo $=$ fórmulas_
→recursivas}''',
          ['indução','complexidade','fórmula','termo','caso base','caso_
→indutivo'],
          ['indução','complexidade','fórmula','termo'],
          [aab,abi,abj,abc,abf,abh],[aab,abi,abj,abc,abf,abh])
abk.save()
abk()
print(abk.tags)
print(abk.tags_name)
abk.dep

```

saved

INDUÇÃO na COMPLEXIDADE da FÓRMULA/TERMO

caso base = fórmulas atômicas

caso indutivo = fórmulas recursivas

```

['indução', 'complexidade', 'fórmula', 'termo', 'caso base', 'caso indutivo']
['indução', 'complexidade', 'fórmula', 'termo']

```

[103]: [_:aab, _:abi, _:abj, _:abc, _:abf, _:abh]

0.37 ABL: Fórmula mais simples

fórmula mais simples := número menor de conectivos/quantificadores

Se α é uma subfórmula da fórmula ϕ , então α é mais simples do que ϕ .

[104]:

```
abl = aaz('abl',r'\mbox{Se $\alpha$ é uma subfórmula da fórmula $\phi$, então
  $\alpha$ é mais simples do que $\phi$}.}',
          ['fórmula','simples','conectivo','quantificador','subfórmula'],
          ['fórmula','simples'],[],
          [abc,abf])
abl.save()
abl()
print(abl.tags)
print(abl.tags_name)
abl.dep
```

saved

Se α é uma subfórmula da fórmula ϕ , então α é mais simples do que ϕ .

```
['fórmula', 'simples', 'conectivo', 'quantificador', 'subfórmula']
['fórmula', 'simples']
```

[104]: [_:abc, _:abf]

0.38 ABM: Indução na Estrutura da Fórmula

INDUÇÃO na ESTRUTURA da FÓRMULA/TERMO

caso base = fórmula mais simples (número menor de conectivos/quantificadores)

caso indutivo = indução nos números naturais

```
[105]: abk = aaz('abk',r'''\mbox{INDUÇÃO na ESTRUTURA da FÓRMULA/TERMO}\\
  \mbox{caso base $=$ fórmulas atômicas}\\mbox{caso indutivo $=$ fórmulas
  $\rightarrow$ recursivas}''',
              ['indução','estrutura','fórmula','caso base','caso
  $\rightarrow$ indutivo','conectivo','quantificador'],
              ['indução','estrutura','fórmula'],
              [aab,abi,abj,abc,abf,abh],[aab,abi,abj,abc,abf,abh])
abk.save()
abk()
print(abk.tags)
print(abk.tags_name)
abk.dep
```

saved

INDUÇÃO na ESTRUTURA da FÓRMULA/TERMO

caso base = fórmulas atômicas

caso indutivo = fórmulas recursivas

```
['indução', 'estrutura', 'fórmula', 'caso base', 'caso indutivo', 'conectivo',
'quantificador']
['indução', 'estrutura', 'fórmula']
```

[105]: [_:aab, _:abi, _:abj, _:abc, _:abf, _:abh]

0.39 ABN: Complexidade de uma Fórmula

complexidade de uma fórmula := número de subfórmulas

```
[65]: abn = aaz('abn',r'\mbox{complexidade de uma fórmula $:= $ número de  $\sqcup$ 
      ↪subfórmulas}',
              ['complexidade','fórmula','subfórmula'],['complexidade','fórmula'],[],
              [abc,abf])
      abn.save()
      abn()
      print(abn.tags)
      print(abn.tags_name)
      abn.dep
```

saved

complexidade de uma fórmula := número de subfórmulas

```
['complexidade', 'fórmula', 'subfórmula']
['complexidade', 'fórmula']
```

```
[65]: [_:abc, _:abf]
```

0.40 ABO: Estrutura de uma Fórmula

estrutura de uma fórmula := número de conectivos/quantificadores

```
[66]: abo = aaz('abo',r'\mbox{estrutura de uma fórmula $:= $ número de conectivos/
      ↪quantificadores}',
               $\sqcup$ 
      ↪['estrutura','fórmula','conectivo','quantificador'],['estrutura','fórmula'],
              [],[abc,abf])
      abo.save()
      abo()
      print(abo.tags)
      print(abo.tags_name)
      abo.dep
```

saved

estrutura de uma fórmula := número de conectivos/quantificadores

```
['estrutura', 'fórmula', 'conectivo', 'quantificador']
['estrutura', 'fórmula']
```

```
[66]: [_:abc, _:abf]
```

```
[ ]:
```

omkb

January 17, 2021

```
[ ]: # !DOCTYPE PYTHON 3.8 ... 2021/1/9
# FROM JUPYTER NOTEBOOK
# CLASS FOR OPEN MATHEMATICS KNOWLEDGE BASE (OMKB)

#####      M 0.1      #####
##      OMKB : ./m.txt      ##

# imports library to compile latex on jupyter notebook
from IPython.display import display, Math

# defines the object 'aaz'
# example: aaa = aaz('name', '\latex', ['tags'], ['tags_name'], [aab, aac], [])

class aaz():
    aazl = []

    # function that is executed, without having to be called (initiator)
    def __init__(self, id_aaz, fm, tags=[], tags_name=[], d=[], dep=[], ref=''):
        self.id_aaz = id_aaz          # axiom id
        self.f = fm                   # mathematical formula in latex
        self.tags = tags               # tags
        self.tags_name = tags_name     # tags for the main axiom/theorem
        self.d = d                     # axioms that lead to the main theorem
        self.dep = dep                 # dependent axioms
        self.ref = ref                 # references
        self.my_name()                 # for cases where the name is not
    ↪ instantiated

    # checks if the object already exists in the 'aazl' list
    if not(self.id_aaz in [i.id_aaz for i in aaz.aazl]):
        aaz.aazl.append(self)         # add 'self' in aaz.aazl

    def __call__(self, n=0):           # makes the object invocable
        # if n = 0, it shows the compilation of the latex, otherwise it shows
    ↪ the latex code
        if n == 0:
            display(Math(str(self.f))) # shows the latex formula compiled
```

```

        else:
            return(f'{self.f}')

    def __repr__(self):
        ↪ object # shows the representation of the
        return(f'_{self.id_aaz}')

    def __str__(self):
        ↪ include the latex formula in a print # converts to string if you need to
        return(self.f)

    def my_name(self):
        ↪ the instance's name # saves the name of the object as
        di = dict(globals())
        for i in di.keys():
            if di[i] == self:
                self.id_aaz = i

    # shows the axioms that prove the theorem (results)
    def results(self):
        ll = ', '.join([eval(i).id_aaz if type(i)==str else i.id_aaz for i in
        ↪ self.d])
        ll += f' ~> {self.id_aaz}'
        print(ll + '\n')
        display(Math(self.id_aaz + r'\mbox{' + f': [{"', ".join(self.
        ↪ tags)]] ' + r'}\\' + self.f + r'\\')
        for i in self.d:
            if type(i)==str: i=eval(i)
            lt = rf'\\' + i.id_aaz + r'\mbox{' + f': [{"', ".join(i.
            ↪ tags)]] ' + r'}\\' + i.f + r'\\'
            display(Math(lt))

    # saves the object into the database ./m.txt
    def save(self):
        ll = aaz.load(1)
        data = f'{self.id_aaz},{self.f},{self.tags},{self.tags_name},{self.
        ↪ d},{self.dep},{self.ref}\n'
        if len(ll) != 0:
            lid = [i[:3] for i in ll]
            if self.id_aaz in lid:
                ll[lid.index(self.id_aaz)] = data
            else:
                ll.append(data)
            if ll[-1][-1] != '\n': ll[-1] += '\n'
        else:
            ll.append(data)

```

```

    ll = sorted(ll,key = lambda i: i[:3])
    texto = '''##OMKB##
NONE:STR ,, LATEX FORMULA:STR ,, TAGS:LIST ,, TAGS_NAME:LIST ,, DERIVATION:
↳LIST ,, DEPENDENT:LIST ,, REFERENCES:LIST\n\n'''
    ll.insert(0,texto)
    with open('m.txt','w') as arq:
        for i in ll:
            arq.write(i)
    arq.close()
    print('saved')

# handles obj_self and database references
def refer(self,op='A'):
    def lerarq():
        with open('ref.txt') as arq:
            l = list(arq)
            if len(l) > 0:
                if l[-1][-1] != '\n': l[-1] += '\n'
            return(l)

    def escriv(tx):
        if self.ref==[]: self.ref=''
        l=lerarq()
        if len(l)>0:
            n_end=int(l[-1].split('.')[0][1:])
        else:
            n_end=0
        with open('ref.txt','w') as arq:
            arq.write(''.join(l))
            arq.write(f'[{n_end+1}]. {tx}\n')
            self.refer(f'R{n_end+1}')

    if op=='A':
        if not len(lerarq()):
            print('nothing in the knowledge base: ./ref.txt')
            return(None)
        else:
            if not self.ref:
                print(f'_{self.id_aaz} no references')
                return(None)
            else:
                l=lerarq()
                for i in self.ref.split(','):
                    try:
                        print(l[int(i[1:])-1][:-1])
                    except IndexError:
                        print(f'[{i[1:]}] <---')

```

```

elif op[0]=='R':
    if op[1:].isnumeric():
        self.ref+=f',{op}'
        if self.ref[0]==',':self.ref=self.ref[1:]
        print(f'{op} ',end='')
        self.ref=', '.join(sorted(list(set(self.ref.split(',') )))).
→strip()

        self.save()
    else:
        print(f'format incorrect in {op}')

elif type(op)==str:
    l=lerarq()
    for i in l:
        op=op.strip()
        ii=i.split(']. ')[1].strip()
        if op==ii:
            print(i.strip())
            print('it already exists in ./ref.txt')
            return(None)
    if op in ''.join(l):
        ll=filter(lambda i: op in i , l)
        print('it already exists in the knowledge base:')
        print(list(ll)[0][: -1])
    else:
        escrv(op)

# loads the object into the database ./m.txt
@classmethod
def load(self,op=0):
    with open('m.txt','r') as arq:
        nz=0
        dd=[]
        ld=[]
        di = {}
        for i in arq.readlines()[3:]:
            nz+=1
            if i =='\n': continue
            if op!=0:
                dd.append(i)
                continue
            i = i.split(', ,')

            if len(i) > 7:
                while len(i) > 7:

```

```

        i.pop()
    elif len(i) < 7:
        i.pop()
        while len(i) < 7:
            i.append([])
            i[-1]=' '
        i,j,k,l,m,n,o=i
        if o=='[]\n': o=''
        m=m.replace('_:', '')
        n = n.replace('_:', '')
        globals().update({i:i})
        ld.append([i,j,k,l,n,m,o])
        continue
    if op!=0:
        return(dd)
    if nz==0:
        return(dict())
    for i,j,k,l,n,m,o in ld:
        globals().update({i:aaz(i,j,eval(k),eval(l),eval(m),eval(n),o.
→strip())})
        di.update({i:eval(i)})

    return(di)

# it shows the last input added to the knowledge base
@classmethod
def end(self):
    l=[i.id_aaz for i in aaz.aazl]
    l=sorted(l)
    print(f'last item is _:{l[-1]}')

#-----#
# FUNCTIONS FOR THE MATHEMATICAL SEARCH ENGINE
# when doing the search, separate the tags using '/'

# search engine to show the axioms that prove the theorem
def proof(t,nn=10,b=0):
    tags = list(set(t.split('/')))

    # fetch objects that contain the tags
    lobj = [list(filter(lambda l: i in l.tags,aaz.aazl)) for i in tags]

    if not bool(lobj[0]):
        print('nothing found!')
        return(None)
    ll = lobj[-1][:]

```

```

for i in lobj[:-1]:
    for j in i:
        if j not in ll:
            ll.append(j)

# organizes by the quantities of tags
lll = []
for i in ll:
    n = 0
    for j in lobj:
        if(i in j):
            n += 1
    lll.append([n,i])
lobj = [i[1] for i in sorted(lll,key=lambda l:l[0])][::-1]
if b != 0:
    return(lobj)

# removes objects that are derived from others
ld = ([i.d[:] for i in lobj])
for lo in ld[:-1]:
    ld[-1].extend(lo)
ld = ld[-1][:]
lobj = list(filter(lambda i:i not in ld,lobj))

# displays the searches
q = len(lobj)
if len(lobj) > nn - 1:
    lobj = lobj[:nn]
print(f'for the tags: {"", ".join(tags)}\n')
print(f'results: {len(lobj):>2} de {q:>2}')
for i in lobj:
    print('-'*60)
    i.results()

# search engine: it returns a latex compiled with the objects containing the
→ tags typed by the user
def s(tags,nn=10):          # 'nn' is the number of results that will appear
    → (default = 10)
    if not bool(aaz.aazl) or not bool(tags):
        return(None)

    ll = proof(tags,nn,1)
    if type(ll)!=list:
        return(None)

    tags = list(set(tags.split('/')))
    lv = [[i,[]] for i in ll]

```

```

for i in tags:
    for j in lv:
        if i in j[0].tags:
            j[1].append(i)
res = len(lv)
if len(lv) > nn - 1:
    l = lv[:nn]
else:
    l = lv
total = len(l)
print('_'*30)
print(f'tags: {"", ".join(list(set([i for i in tags])))}\nresults: {total:
→>2} from {res:>2}') )
for k,j in l:
    print('_'*30)
    print(f'{"", ".join(j)}:')
    print(f'{k.id_aaz} [{"", ".join(k.tags)}]')
    k()

# search engine: it shows the theorem and all the axioms it depends on
# when doing the search, separate the tags using '/'
def m(tags):
    tags = set(tags.split('/'))
    print(f'for the tags: {"", ".join(tags)}')
    n=0
    for i in aaz.aazl:
        lt = set(i.tags_name)
        if tags&lt == tags:
            print(f' '*50)
            print(f'{i.id_aaz}: [{"", ".join(i.tags_name)}]'.center(50, '_'), '\n')
            i()
            print('\n')
            n+=1
        for d in i.dep:
            if type(d)==str:d=eval(d)
            print(f'{d.id_aaz}: ')
            d()
            print('\n')

    if n==0:
        print('nothing found!')

# shows all the tags
def tags(op=0):
    t=[]
    for i in aaz.aazl:
        t+=i.tags

```



```

t=sorted(list(set(t)))
l=[]
for i in t:
    ll=[]
    for j in aaz.aazl:
        if i in j.tags:
            ll.append(j)
    l.append(ll)
while len(l) %3!=0:
    l.append('')
while len(t) %3!=0:
    t.append('')
n=len(t)//3
nn=1

if type(op)==str:
    for i,j in zip(t,l):
        if i==op:
            print(f'{nn: >3}. {i:<15}{str(j).replace("_:", "")}')
            return(None)
        nn+=1
    print('nothing found!')
    return(None)
if op !=0:
    for i,j in zip(t,l):
        if i=='':break
        print(f'{nn: >3}. {i:<25}{str(j).replace("_:", "")}')
        nn+=1
    return(None)
for i,j,k in zip(t[:n],t[n:n*2],t[n*2:]):
    print(f'{str(nn)}+. " : >4}{i: <25}',end='')
    print(f'{str(nn+n)}+. " : >4}{j: <25}',end='')
    print(f'{str(nn+(n*2))}+. " if k!="" else "" : >4}{k: <25}')
    nn+=1

def add_aazl():
    return(aaz.aazl)

```