A model of mean reversion in stock prices and the Equity Premium Puzzle

株価の平均回帰性についてのモデルとエクイティプレミアムパズル

Yuuki Maruyama

Abstract

In this model, the stock price is determined by two variables: the fundamental value and the current risk preference of people. Suppose that the fundamental value follows Geometric Brownian motion and the function of the risk preference of people follows Ornstein-Uhlenbeck process. There are only two types of asset: money (safe asset) and stocks (risk asset). In this case, the profit rate of equity investment is mean reverting, and long-term investment is more advantageous than short-term investment. The market is arbitrage-free. Also, based on this model, I suggest a solution to the Equity Premium Puzzle.

株式の価格を、ファンダメンタルな価値と社会のリスク選好度の 2 変数として表すモデルを考える。ファンダメンタルな価値が幾何ブラウン運動に従い、社会のリスク選好度の関数が Ornstein-Uhlenbeck 確率過程に従うとする。資産には、貨幣（安全資産）と株式（リスク資産）の二種類のみが存在するとする。この場合、株式投資の利益率には平均回帰効果が生じることを示し、長期投資が短期投資に比べて有利であることを証明する。市場において、無裁定条件は保たれている。また、このモデルに基づき、エクイティプレミアムパズルへの一つの解決策を提示する。

1 序論

株式投資には平均回帰効果があると言われており、平均回帰効果が存在するという実証研究も多く存在する。しかし、証券理論においてはその効果は否定されており、長期投資の方が有利というのは間違いであるとされている。平均回帰効果を説明できる理論として広く認められているものは存在しない。今回この論文において、新たな株式の価格決定法を提唱し、理論の帰結として平均回帰効果が説明できることを示す。また、同理論に基づいて、エクイティプレミアムパズルに対する 1 つの解決策を提案する。

企業の時価総額というのは、理論研究においては、将来にわたる配当の予想額のみに基づき算出されることが多い。しかし、将来にわたる配当の予想額が全く変化しなくても、人々のリスク選好度が変化すれば、企業の時価総額は変化するもののはずである。なぜなら、リスク選好度が低下すれば、人々はリスク資産よりも安全資産を好むようになり、株式というリスク資産への評価額を下げるためである。純粋に将来にわたる配当の予想額によって算出された企業価値を企業のファンダメンタルな価値と呼ぶことにすると、企業の時価総額というのは企業のファンダメンタルな価値と人々のリスク選好度の 2 つによって定まる値であると言えるだろう。今回の理論においては企業の時価総額をこれら 2 つの値に分解して考えるところがポイントである。

まず、企業のファンダメンタルな価値についてである。今回の理論では、企業のファンダメンタルな価値こそが幾何ブラウン運動に従うものとする。事業というのは収益を生み出すものであるが、事業のファンダメンタルな利益率が、平均 $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$ 、分散 σ^2 になるという仮定は不自然なものではないだろう。

次に、人々のリスク選好度である。この値（より正確にはこの値の関数）が平均回帰過程になると仮定する。一時的に社会の風潮としてリスク選好度が高まることはあっても、人間の本質的なリスク選好度は時代を通して大きく変わることはないだろうという仮定に基づく。実際、Shiller の CAPE レシオを人々のリスク選好度としてとらえて良いなら、おおむね平均回帰傾向にあるように見受けられ、平均値から乖離する時代もあるが再度平均値に戻ってくる傾向があると推測できる。リスク選好度が平均回帰過程にあるという仮定もあながち非現実的なものとは言えないだろう。

この 2 つを組み合わせることで企業の時価総額が決まるものとする。この場合、株式投資には平均回帰効果が生まれ、長期投資の方が有利となることを示す。

2 モデル

事業のファンダメンタルな収益率を、平均 $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$ 、分散 σ^2 とする。

また、 t 期における株価を S_t 、ブラウン運動を B_t 、リスク資産と安全資産の相対価格を P_t とする。
このとき

$$S_t = \frac{P_t}{P_0} S_0 \exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma B_t \right)$$

となる。

株式投資の利益率は $\log \frac{S_t}{S_0}$ で表されるが、

$$\log \frac{S_t}{S_0} = \log \frac{P_t}{P_0} + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma B_t$$

ここで、 $p_t = \log \frac{P_t}{P_0}$ とし、 p_t が Ornstein-Uhlenbeck 確率過程（平均回帰過程）に従うものとする。

（Ornstein-Uhlenbeck 確率過程に従うものが、リスク選好度、 P_t 、 p_t のいずれであっても本質に影響はないが、単純化のため p_t とする。）

$$dp_t = a(b - p_t)dt + \theta dB_t$$

とする。 b は p_t の長期的な平均値であり、 a は p_t の平均回帰速度である。定義より $p_0 = 0$ となる。
平均を E 、分散を V とすると

$$E[p_t] = p_0 e^{-at} + b(1 - e^{-at}) = b(1 - e^{-at})$$

$$V[p_t] = \frac{\theta^2}{2a} (1 - e^{-2at})$$

ここで、 $t \rightarrow \infty$ の時、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E[p_t] = b$$
$$\lim_{t \rightarrow \infty} V[p_t] = \frac{\theta^2}{2a}$$

また、 $t \rightarrow 0$ の時、

$$\lim_{t \rightarrow 0} E[p_t] = abt$$
$$\lim_{t \rightarrow 0} V[p_t] = \theta^2 t$$

故に、株式の長期投資の利益率は

$$\text{平均 } \mu - \frac{\sigma^2}{2} \quad \text{分散 } \sigma^2$$

株式の短期投資の利益率は

$$\text{平均 } ab + \mu - \frac{\sigma^2}{2} \quad \text{分散 } \theta^2 + \sigma^2$$

となる。 ab が十分に大きくない限りは、長期投資は短期投資よりも有利であると言える。

3 考察

投資をする際は、長期投資目的ならば株式の比率を高めるべきであるし、短期投資目的ならば株式の比率を抑えるべきである。リスク回避度が等しい人であっても、貯蓄の目的に応じて最適なポートフォリオは変わってくるということになる。

ちなみにこのモデルにおいて、社会のリスク選好度が低い時に株式を買い、社会のリスク選好度が高い時に株式を売る、という取引については、ファンダメンタルな価値が幾何ブラウン運動に従いリスクがある以上、無リスク取引にはならず、裁定取引には当たらない。

最後に、エクイティプレミアムパズルについて述べる。人々が貯蓄をする目的にも種類がある。老後のための資金としての貯蓄であれば長期投資ということになり、株式の比率を高めるべきである。しかし、急に資金が必要になる場合に備えての予備的貯蓄については、いつ株式を売却する必要があるか分からないため短期投資ということになり、株式の比率は抑えるべきである。もし人々の貯蓄動機の内、後者の予備的貯蓄の割合が多いなら、エクイティプレミアムが非常に高くても矛盾しない。以上がエクイティプレミアムパズルに対する解決策の一案である。

参考文献

- Fama, E. F., & French, K. R. (1988). Permanent and temporary components of stock prices. *Journal of political Economy*, 96(2), 246-273.
- Poterba, J. M., & Summers, L. H. (1988). Mean reversion in stock prices: Evidence and implications. *Journal of financial economics*, 22(1), 27-59.