Seri Pendidikan Aktuaris Indonesia

Lia Yuliawati
Windiani Erliana

50+ Soal & Jawab
Pengantar Teori Peluang
dan
Matematika Statistik

KATA SAMBUTAN PERSATUAN AKTUARIS INDONESIA

Persatuan Aktuaris Indonesia mengucapkan selamat atas penerbitan "Seri Catatan Kuliah Sains Aktuaria" dalam kerangka penyediaan bahan belajar bagi mereka yang menempuh pendidikan di bidang sains aktuaria. Pengajaran isi kurikulum pendidikan Persatuan Aktuaris Indonesia serta isi kurikulum pendidikan sains aktuaria di berbagai universitas di Indonesia secara umum akan terbantu dengan adanya pengadaan Seri Catatan Kuliah ini.

Sebagai organisasi profesi, Persatuan Aktuaris Indonesia akan senantiasa mendorong upaya berbagai pihak untuk menghasilkan karya bagi pembangunan di bidang sains aktuaria di Indonesia. Seri Catatan Kuliah ini dengan Editor Penerbitan yang juga sebagai Editor Utama Saudara Agah D. Garnadi merupakan salah satu kontribusi berharga dalam upaya meningkatkan kapasitas nasional di bidang sains aktuaria.

Akhir kata, Persatuan Aktuaris Indonesia menyatakan apresiasi kepada Saudara Agah D. Garnadi sebagai Editor Penerbitan atas penerbitan Seri Catatan Kuliah ini. Semoga Seri ini bisa dijadikan panduan belajar di bidang sains aktuaria serta mendapatkan tanggapan yang baik dari semua pihak.

Jakarta, 2 Mei 2016

Rianto Ahmadi Djojosugito

Ketua Persatuan Aktuaris Indonesia

Buku Kerja Soal-soal PAI
Mata Ujian Probabilitas dan Statistika

October 31, 2015

1. Terdapat 7 karyawan di departemen Aktuaria dan 6 karyawan di departemen *Market Management*. Akan dibentuk suatu tim khusus untuk melakukan analisa terhadap suatu produk asuransi yang akan diluncurkan. Hitunglah banyaknya cara untuk membentuk tim khusus dengan memilih 3 karyawan dari departemen Aktuaria dan 2 karyawan dari departemen *Market Management*.

Jawab:

Banyaknya cara untuk membentuk tim khusus dengan memilih 3 karyawan dari departemen Aktuaria dan 2 karyawan dari departemen *Market Management* adalah

$$\binom{7}{3} \times \binom{6}{2} = 35 \times 15 = 525.$$

2. Dari soal nomor 1, hitunglah probabilitas bahwa tim khusus dari 5 karyawan yang dipilih secara acak tersebut, terdiri dari 3 karyawan dari departemen Aktuaria dan 2 karyawan dari departemen *Market Management*.

Jawab:

$$\binom{7}{0} \times \binom{6}{5} = 1 \times 6 = 6.$$

$$\binom{7}{1} \times \binom{6}{4} = 7 \times 15 = 105.$$

$$\binom{7}{2} \times \binom{6}{3} = 21 \times 20 = 420.$$

$$\binom{7}{3} \times \binom{6}{2} = 35 \times 15 = 525.$$

$$\binom{7}{4} \times \binom{6}{1} = 35 \times 6 = 210.$$

$$\binom{7}{5} \times \binom{6}{0} = 21 \times 1 = 21.$$

Jadi probabilitas bahwa tim khusus dari 5 karyawan yang dipilih secara acak tersebut, terdiri dari 3 karyawan dari departemen Aktuaria dan 2 karyawan dari departemen *Market Management* adalah

$$\frac{525}{6 + 105 + 420 + 525 + 210 + 21} = \frac{525}{1287} = 0,41.$$

3. Di sebuah perusahaan asuransi terdapat 3 sub bagian di bagian *product development* yang akan diisi oleh 7 karyawan baru yang telah memenuhi seleksi. Sub bagian pertama tersedia 2 posisi, sub bagian kedua tersedia 2 posisi, dan sub bagian ketiga tersedia 3 posisi. Hitunglah banyaknya cara yang mungkin untuk menempatkan karyawan tersebut ke dalam posisi yang tersedia.

Jawab:

Banyaknya cara yang mungkin untuk menempatkan karyawan tersebut ke dalam posisi yang tersedia adalah

$$\binom{7}{2 \ 2 \ 3} = \frac{7!}{2!2!3!} = 210.$$

4. Misalkan N adalah jumlah klaim per bulan, dengan

$$\Pr(N = n) = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

dimana $0 \leq n$. Tentukanlah probabilitas dari sedikitnya satu klaim selama bulan tertentu, diberikan paling banyak empat klaim selama bulan tersebut.

Jawab:

Probabilitas dari sedikitnya satu klaim selama bulan tertentu adalah

$$\begin{aligned}\Pr(N \geq 1 | N \leq 4) &= \frac{\Pr(1 \leq N \leq 4)}{\Pr(N \leq 4)} \\ &= \frac{\sum_1^4 \frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\sum_0^4 \frac{1}{(n+1)(n+2)}} \\ &= \frac{2}{5} \\ &= 0,4.\end{aligned}$$

5. Misalkan kejadian A dan B saling bebas dengan $\Pr(A \cap B^c) = 0,2$ dan $\Pr(A^c \cap B) = 0,3$.
Hitunglah $\Pr(A \cup B)$.

Jawab:

Karena kejadian A dan B saling bebas maka diperoleh

$$\begin{aligned}\Pr(A \cap B) &= \Pr(A) \cdot \Pr(B) \\ \Pr(A \cap B) &= (\Pr(A \cap B^c) + \Pr(A \cap B))(\Pr(A^c \cap B) + \Pr(A \cap B)) \\ x &= (0,2 + x)(0,3 + x) \\ x &= 0,06 + 0,5x + x^2 \\ 0 &= x^2 - 0,5x + 0,06.\end{aligned}$$

Nilai $\Pr(A \cap B) = x$ yang memenuhi persamaan di atas adalah 0,2 atau 0,3. Karena $\Pr(A \cup B) = \Pr(A \cap B^c) + \Pr(A^c \cap B) + \Pr(A \cap B)$ maka nilai $\Pr(A \cup B)$ yang mungkin adalah 0,7 atau 0,8.

6. Sebuah perusahaan asuransi menentukan bahwa N , jumlah klaim yang diterima dalam satu minggu, memenuhi $\Pr[N = n] = \frac{1}{2^{n+1}}$, dimana $n \geq 0$. Perusahaan juga menentukan bahwa jumlah klaim yang diterima dalam satu minggu adalah saling bebas dari jumlah klaim yang diterima dalam minggu yang lain. Tentukanlah probabilitas bahwa tepatnya tujuh klaim akan diterima selama periode dua minggu.

Jawab:

Probabilitas bahwa tepatnya tujuh klaim akan diterima selama periode dua minggu adalah

$$\begin{aligned} & 2(\Pr(N = 0) \Pr(N = 7) + \Pr(N = 1) \Pr(N = 6) + \Pr(N = 2) \Pr(N = 5) \\ & + \Pr(N = 3) \Pr(N = 4)) \\ & = 2\left(\frac{1}{2^1} \frac{1}{2^8} + \frac{1}{2^2} \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^3} \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^4} \frac{1}{2^5}\right) \\ & = 2 \times 4 \times \frac{1}{2^9} \\ & = \frac{1}{64}. \end{aligned}$$

7. Sebuah polis asuransi memberikan manfaat individu sebesar 100 per hari untuk biaya perawatan sampai 3 hari dan 25 per hari untuk biaya perawatan setelah 3 hari seterusnya. Jumlah hari perawatan, X , adalah variabel acak diskrit dengan fungsi probabilitas

$$P(X = k) = \begin{cases} \frac{6-k}{15} & \text{untuk } k = 1, 2, 3, 4, 5 \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases}$$

Hitunglah nilai variansi pembayaran biaya perawatan dari polis asuransi tersebut.

Jawab:

Misal B merupakan variabel acak yang menyatakan biaya perawatan, maka diperoleh:

$$B(x) = \begin{cases} 100x & ; \quad x = 1, 2, 3 \\ 25x & ; \quad x = 4, 5 \end{cases}$$

Jadi,

$$\begin{aligned} E[B(x)] &= \sum_{k=1}^{k=5} B(k)P(X = k) \\ &= 100 \cdot \left(1 \cdot \frac{6-1}{15} + 2 \cdot \frac{6-2}{15} + 3 \cdot \frac{6-3}{15}\right) + 25 \cdot \left(4 \cdot \frac{6-4}{15} + 5 \cdot \frac{6-5}{15}\right) \\ &= 168,33. \\ E[B^2(x)] &= \sum_{k=1}^{k=5} B^2(k)P(X = k) \\ &= 100^2 \cdot \left(1^2 \cdot \frac{6-1}{15} + 2^2 \cdot \frac{6-2}{15} + 3^2 \cdot \frac{6-3}{15}\right) + 25^2 \cdot \left(4^2 \cdot \frac{6-4}{15} + 5^2 \cdot \frac{6-5}{15}\right) \\ &= 34375. \\ Var[B(x)] &= E[B^2(x)] - (E[B(x)])^2 \\ &= 34375 - (168,33)^2 \\ &= 6038,9. \end{aligned}$$

8. Misalkan X adalah variabel acak diskrit dengan distribusi probabilitas sebagai berikut:

x	2	4	6	7	12
$\Pr(X = x)$	3/7	1/7	1/7	1/7	1/7

Hitunglah nilai persentil ke-60 dari X .

Jawab:

Karena $60 = \frac{100i}{8}$ sehingga $i = 4,8$. Berdasarkan data di atas, dengan mengasumsikan bahwa data di atas sebanyak 7 data, kita ketahui bahwa data ke-empat, $x_4 = 4$, dan data ke-lima, $x_5 = 6$. Oleh karena itu persentil ke-60 dari data di atas adalah 80% dari 4 ke 6 atau

$$4 + (6 - 4) * (0,8) = 5,6.$$

9. Distribusi probabilitas dari ukuran klaim untuk sebuah polis asuransi diberikan dalam tabel berikut.

Ukuran klaim	20	30	40	50	60	70	80
Probabilitas	0,15	0,10	0,05	0,20	0,10	0,10	0,30

Tentukanlah persentase dari klaim yang terletak dalam nilai satu standar deviasi dari rata-rata ukuran klaim.

Jawab:

Rata-rata ukuran klaim

$$\begin{aligned} &= 20 \cdot 0,15 + 30 \cdot 0,10 + 40 \cdot 0,05 + 50 \cdot 0,20 + 60 \cdot 0,10 + 70 \cdot 0,10 + 80 \cdot 0,30 \\ &= 3 + 3 + 2 + 10 + 6 + 7 + 24 \\ &= 55 \end{aligned}$$

Rata-rata ukuran klaim kuadrat

$$\begin{aligned} &= 20^2 \cdot 0,15 + 30^2 \cdot 0,10 + 40^2 \cdot 0,05 + 50^2 \cdot 0,20 + 60^2 \cdot 0,10 + 70^2 \cdot 0,10 + 80^2 \cdot 0,30 \\ &= 60 + 90 + 80 + 500 + 360 + 490 + 1920 \\ &= 3500 \end{aligned}$$

Standar deviasi ukuran klaim $= \sqrt{3500 - 3025} = \sqrt{475} = 21,8$ Jadi persentase dari klaim yang terletak dalam nilai satu standar deviasi dari rata-rata ukuran klaim (ukuran klaim yang terletak pada interval $[55-21,8; 55+21,8] = [33,2; 76,8]$) adalah 45%.

10. Misalkan dipilih sebuah angka W yang merupakan variabel acak dari 50, 55, 60, 65, 70. Hitunglah $\Pr[W \geq 55]$.
Petunjuk: $W = 5X + 45$, dimana X mempunyai distribusi uniform diskrit pada 1, 2, 3, 4, 5.

Jawab:

Karena X mempunyai distribusi uniform diskrit pada 1, 2, 3, 4, 5, maka

$$\begin{aligned}\Pr[X = k] &= \frac{1}{5} \text{ untuk } k = 1, 2, 3, 4, 5 \\ \Pr[W \geq 55] &= 1 - \Pr[W < 55] \\ &= 1 - \Pr[W = 50] \\ &= 1 - \Pr[5X + 45 = 50] \\ &= 1 - \Pr[X = 1] \\ &= 1 - \frac{1}{5} \\ &= \frac{4}{5}.\end{aligned}$$

11. Misalkan X adalah variabel acak yang mempunyai distribusi binomial dengan $n = 10$ dan $Var[X] = 0,25E[X]$.
Hitunglah probabilitas untuk $X = 7$.

Jawab:

Karena X adalah variabel acak yang mempunyai distribusi binomial dengan $n = 10$ maka $E[X] = 10p$ dan $Var[X] = 10p(1 - p)$ dengan p merupakan peluang sukses.

Karena $Var[X] = 0,25E[X]$ maka diperoleh $10p(1 - p) = 0,25 \cdot 10p$.
Nilai p yang memenuhi adalah $p = 0,75$.

Jadi

$$\Pr[X = 7] = \binom{10}{7} (0,75)^7 (0,25)^3 = 0,25.$$

12. Misalkan $Z \sim \text{Poisson}(\lambda)$ dan $E[Z^2] = 12$.
Hitunglah $\Pr(Z = 1)$.

Jawab:

Pertama akan ditentukan parameter λ .

Karena $Z \sim \text{Poisson}(\lambda)$ maka $E[Z] = \text{Var}[Z] = \lambda$.

Karena $\text{Var}[Z] = E[Z^2] - E[Z]^2$ maka diperoleh $\lambda^2 + \lambda - 12 = 0$ atau $\lambda = 3$.

Jadi,

$$\Pr[Z = 1] = \frac{3^1 e^{-3}}{1!} = 0,149.$$

13. Masa beroperasi dari sebuah bagian mesin mempunyai distribusi kontinu pada interval $[0, 40]$ dengan fungsi probabilitas densitas, $f(x)$, yang proporsional dengan $(10 + x)^{-2}$. Hitunglah probabilitas untuk masa beroperasi dari sebuah bagian mesin yang lebih kecil dari 5.

Jawab:

Misal $f(x) = k(10 + x)^{-2}$ untuk x pada interval $[0, 40]$.

Karena $\int_0^{40} k(10 + x)^{-2} dx = 1$ maka diperoleh $k = 12,5$.

Jadi

$$\begin{aligned}\Pr[X < 5] &= \int_0^5 12,5(10 + x)^{-2} dx \\ &= -\frac{12,5}{10 + x} \Big|_0^5 \\ &= -0,83 + 1,25 \\ &= 0,42.\end{aligned}$$

14. Misalkan X adalah variabel acak yang mempunyai fungsi distribusi kumulatif

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < 1 \\ \frac{x^2-2x+2}{2} & , 1 \leq x < 2 \\ 1 & , x \geq 2 \end{cases}$$

Hitunglah variansi dari X .

Jawab:

Berdasarkan fungsi distribusi kumulatif di atas, maka diperoleh fkp sebagai berikut:

$$f(x) = x - 1, \quad 1 \leq x < 2$$

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_1^2 x(x-1)dx \\ &= \int_1^2 (x^2 - x)dx \\ &= \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right) \Big|_1^2 \\ &= \frac{7}{3} - \frac{3}{2} \\ &= \frac{5}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \int_1^2 x^2(x-1)dx \\ &= \int_1^2 (x^3 - x^2)dx \\ &= \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_1^2 \\ &= \frac{15}{4} - \frac{7}{3} \\ &= \frac{17}{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var[X] &= E[X^2] - (E[X])^2 \\ &= \frac{17}{12} - \frac{25}{36} \\ &= \frac{13}{18}. \end{aligned}$$

15. Misalkan X_1, X_2, X_3 adalah sampel acak dari distribusi diskrit dengan fungsi probabilitas

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & , x = 0 \\ \frac{2}{3} & , x = 1 \\ 0 & , \text{lainnya} \end{cases}$$

Tentukanlah fungsi pembangkit momen, $M_Y(t)$, dari perkalian $Y = X_1 \cdot X_2 \cdot X_3$.

Jawab:

X_1	X_2	X_3	e^{tY}	$p(y)$	$e^{tY}p(y)$
0	0	0	1	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{27}$
0	0	1	1	$\frac{2}{27}$	$\frac{2}{27}$
0	1	0	1	$\frac{2}{27}$	$\frac{2}{27}$
0	1	1	1	$\frac{4}{27}$	$\frac{4}{27}$
1	0	0	1	$\frac{2}{27}$	$\frac{2}{27}$
1	0	1	1	$\frac{4}{27}$	$\frac{4}{27}$
1	1	0	1	$\frac{4}{27}$	$\frac{4}{27}$
1	1	1	e^t	$\frac{8}{27}$	$e^t \frac{8}{27}$

Jadi diperoleh

$$E[e^{tY}] = \sum e^{ty}p(y) = \frac{19}{27} + \frac{8}{27}e^t.$$

16. Pemilik kendaraan mengasuransikan kendaraannya dari kerusakan dengan membeli sebuah polis asuransi dengan pemotongan 250 dari total klaim yang dibayar. Dalam kejadian bahwa kendaraan mengalami kerusakan, biaya perbaikan dapat dimodelkan dengan variabel acak uniform pada interval $[0, 1500]$. Hitunglah standar deviasi dari manfaat polis asuransi untuk kejadian bahwa kendaraan tersebut mengalami kerusakan.

Jawab:

Misal X adalah variabel acak yang menyatakan biaya perbaikan, $X \sim \text{uniform}[0, 1500]$ sehingga $f(x) = \frac{1}{1500}$, $x \in [0, 1500]$.

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_0^{1500} \frac{1}{1500} x dx \\ &= \frac{1}{3000} x^2 \Big|_0^{1500} \\ &= \frac{1}{3000} 1500^2 \\ &= 750. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \int_0^{1500} \frac{1}{1500} x^2 dx \\ &= \frac{1}{4500} x^3 \Big|_0^{1500} \\ &= \frac{1}{4500} 1500^3 \\ &= 750000. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma(X) &= \sqrt{E[X^2] - (E[X])^2} \\ &= \sqrt{750000 - 750^2} \\ &= 433. \end{aligned}$$

17. Misalkan X adalah variabel acak yang berdistribusi eksponensial dengan variansi 9. Hitunglah $E(X^4)$.

Jawab:

Karena X merupakan peubah acak yang berdistribusi eksponensial dengan variansi 9 maka diperoleh parameter λ sebagai berikut

$$Var[X] = \frac{1}{\lambda^2} = 9$$

sehingga diperoleh $\lambda = \frac{1}{3}$ dan fkp peubah acak X :

$$f(x) = \frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}x}$$

$$\begin{aligned} E[X^4] &= \int_0^{\infty} x^4 \frac{1}{3} e^{-\frac{1}{3}x} dx \\ &= -\frac{1}{3} (3x^4 + 36x^3 + 324x^2 + 1944x + 5832) e^{-\frac{1}{3}x} \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{3} \times 5832 \\ &= 1944. \end{aligned}$$

18. Misalkan X adalah variabel acak dengan mean μ_x dan variansi σ_x^2 . X disebut sebagai variabel acak populasi. Misalkan $X_1, X_2, \dots, X_n$ adalah pengamatan-pengamatan yang berdistribusi identik dan saling bebas dari X .

$X_1, X_2, \dots, X_n$ adalah sampel acak dari X . Misalkan $S = \sum_{i=1}^n X_i$ dan $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$. $\bar{X}$ adalah mean dari sampel.

Manakah dari pernyataan berikut yang benar.

- (i) $E(S) = \mu_X$
- (ii) $Var(S) = n \cdot \sigma_X^2$
- (iii) $E(X) = n \cdot \mu_X$
- (iv) $Var(\bar{X}) = \frac{\sigma_X^2}{n}$

Jawab:

Pernyataan yang benar adalah (ii) dan (iv).

19. Sebuah koin yang kedua sisinya seimbang dilempar sebanyak dua kali. Misalkan X adalah banyaknya sisi pertama yang terlihat pada lemparan pertama. Misalkan Y adalah banyaknya sisi pertama yang terlihat pada dua lemparan pertama. Hitunglah $Var(X + Y)$.

Jawab:

Luaran	X	Y	$Z = X + Y$	$Pr(Z = z)$
$S_1 S_1$	1	2	3	1/4
$S_1 S_2$	1	1	2	1/4
$S_2 S_1$	0	1	1	1/4
$S_2 S_2$	0	0	0	1/4

$$E(Z) = \frac{1}{4}(0 + 1 + 2 + 3) = 3/2$$

$$E(Z^2) = \frac{1}{4}(0 + 1 + 4 + 9) = 7/2$$

$$Var(X + Y) = Var(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2 = \frac{7}{2} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} = 1,25.$$

20. Dari soal nomor 19, hitunglah $E(Y|X = 1)$.

Jawab:

$x \downarrow, y \longrightarrow$	0	1	2	$p_X(x)$
0	1/4	1/4	0	1/2
1	0	1/4	1/4	1/2
$p_Y(y)$	1/4	1/2	1/4	1

$$\begin{aligned}
 E(Y|X = 1) &= \sum y \cdot p(y|x = 1) \\
 &= 0 \cdot p(0|x = 1) + 1 \cdot p(1|x = 1) + 2 \cdot p(2|x = 1) \\
 &= 0 \cdot \frac{p(1,0)}{p_X(1)} + 1 \cdot \frac{p(1,1)}{p_X(1)} + 2 \cdot \frac{p(1,2)}{p_X(1)} \\
 &= 0 \cdot \frac{0}{1/2} + 1 \cdot \frac{1/4}{1/2} + 2 \cdot \frac{1/4}{1/2} \\
 &= 0 + \frac{1}{2} + 1 \\
 &= \frac{3}{2} = 1,50.
 \end{aligned}$$

21. Misalkan N_1 dan N_2 mewakili banyaknya klaim yang diajukan ke sebuah perusahaan asuransi di bulan April dan Mei. Fungsi probabilitas bersama dari N_1 dan N_2 adalah

$$p(n_1, n_2) = \begin{cases} \frac{1}{3}(\frac{1}{4})^{n_1-1}e^{-n_1}(1 - e^{-n_1})^{n_2-1} & , n_1 = 1, 2, 3, \dots \quad n_2 = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & , \text{lainnya} \end{cases}$$

Hitunglah nilai ekspektasi banyaknya klaim yang akan diajukan ke perusahaan asuransi di bulan Mei jika tepatnya 2 klaim diajukan di bulan April.

Jawab:

$$\begin{aligned} E[N_2|N_1 = 2] &= \sum_{n_2=1}^{\infty} n_2 p(n_2|N_1 = 2) \\ &= \sum_{n_2=1}^{\infty} n_2 \frac{p(2, n_2)}{p(N_1 = 2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(N_1 = 2) &= \sum_{n_2=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3} \frac{1}{4} e^{-2} (1 - e^{-2})^{n_2-1} \right) \\ &= \frac{1}{12e^2} \sum_{n_2=0}^{\infty} (1 - e^{-2})^{n_2} \\ &= \frac{1}{12e^2} \frac{1}{1 - (1 - e^{-2})} \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Oleh karena itu diperoleh

$$\begin{aligned} E[N_2|N_1 = 2] &= \sum_{n_2=1}^{\infty} n_2 \frac{\frac{1}{3} \frac{1}{4} e^{-2} (1 - e^{-2})^{n_2-1}}{\frac{1}{12}} \\ &= \sum_{n_2=1}^{\infty} n_2 e^{-2} (1 - e^{-2})^{n_2-1} \\ &= \sum_{n_2=0}^{\infty} n_2 e^{-2} (1 - e^{-2})^{n_2} \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa nilai ekspektasi di atas adalah nilai ekspektasi untuk peubah acak geometri N_2 . Maka diperoleh

$$\begin{aligned} E[N_2|N_1 = 1] &= \frac{1 - e^{-2}}{e^{-2}} \\ &= e^2 - 1. \end{aligned}$$

22. Sebuah model aktuarial untuk lama penggunaan peralatan menggunakan variabel acak $Y = 10 \cdot X^{0,8}$, dimana X adalah variabel acak yang berdistribusi eksponensial dengan mean 1 tahun. Tentukanlah fungsi probabilitas densitas $f(y)$, untuk $y > 0$, dari variabel acak Y .

Jawab:

Karena $X \sim \exp(\lambda = 1)$ maka diperoleh $f_X(x) = e^{-x}$.

Karena $Y = 10 \cdot X^{0,8}$ adalah fungsi naik, maka

$$\begin{aligned} f(y) = f_Y(y) &= f_X(x) \frac{dx}{dy} \\ &= e^{-x} \frac{dx}{dy} \\ &= e^{-(0,1y)^{1,25}} (0,125(0,1y)^{0,25}) \\ &= 0,125(0,1y)^{0,25} \exp(-(0,1y)^{1,25}). \end{aligned}$$

23. Misalkan variabel acak X berdistribusi uniform pada interval $[2,6]$. Misalkan variabel acak $Y = \frac{1}{X}$. Tentukanlah fungsi probabilitas densitas untuk variabel acak Y pada interval $[1/6, 1/2]$.

Jawab:

Karena $X \sim \text{uniform}[2, 6]$ maka diperoleh $f_X(x) = \frac{1}{4}$, $x \in [2, 6]$.

Karena $Y = \frac{1}{X}$ adalah fungsi turun maka

$$\begin{aligned} f(y) = f_Y(y) &= -f_X(x) \frac{dx}{dy} \\ &= -\frac{1}{4} \frac{dx}{dy} \\ &= -\frac{1}{4} \left(-\frac{1}{y^2} \right) \\ &= \frac{1}{4y^2}. \end{aligned}$$

24. Misalkan S adalah variabel acak yang berdistribusi eksponensial dengan mean 1 dan T adalah variabel acak yang berdistribusi eksponensial dengan mean 2. Tentukanlah fungsi probabilitas densitas untuk $f_X(x)$, dimana $X = S + T$.

Jawab:

Perhatikan bahwa

$$S \sim f_S(s) = e^{-s}$$

dan

$$T \sim f_T(t) = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}.$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_0^x f_S(s)f_T(x-s)ds \\ &= \int_0^x e^{-s}\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}(x-s)}ds \\ &= \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} \int_0^x e^{-\frac{1}{2}s}ds \\ &= e^{-\frac{1}{2}x}(1 - e^{-\frac{1}{2}x}) \\ &= e^{-\frac{1}{2}x} - e^{-x}. \end{aligned}$$

25. Suatu populasi mempunyai mean 100 dan standar deviasi 16. Hitunglah probabilitas bahwa mean sampel berada dalam interval ± 3 dari mean populasi jika ukuran sampel $n = 100$.

Jawab:

$$\begin{aligned} & \Pr(|\bar{X} - 100| \leq 3) \\ &= \Pr(-3 \leq \bar{X} - 100 \leq 3) \\ &= \Pr\left(\frac{-3}{16/\sqrt{100}} \leq \frac{\bar{X}-100}{16/\sqrt{100}} \leq \frac{3}{16/\sqrt{100}}\right) \\ &= \Pr\left(\frac{-3}{16/\sqrt{100}} \leq Z \leq \frac{3}{16/\sqrt{100}}\right) \\ &= \Pr(|Z| \leq \frac{3\sqrt{100}}{16}) \\ &= \Pr(|Z| \leq 1,875) \\ &= 2 \Pr(0 \leq Z \leq 1,875) \\ &= 0,9392. \end{aligned}$$

26. Variabel acak Y diketahui mempunyai distribusi normal. Sampel acak berukuran $n = 14$ menghasilkan nilai $\bar{Y} = -43,2$ dan $S_Y = 17,9$. Hitunglah interval kepercayaan 98% untuk mean populasi.

Jawab:

$$\varepsilon = t_{\alpha/2}(n-1) \frac{S_Y}{\sqrt{n}} \longrightarrow \varepsilon = t_{0,01}(13) \frac{17,9}{\sqrt{14}} = 12,7.$$

Jadi interval kepercayaan 98% untuk mean populasi adalah

$$(-43,2 - 12,7; -43,2 + 12,7) = (-55,9; -30,5).$$

27. Sampel acak dari 9 pengamatan diambil dari populasi normal menghasilkan statistik

$$\bar{X} = 5 \text{ dan } \frac{1}{8} \sum_{i=1}^9 (X_i - \bar{X})^2 = 36.$$

Tentukanlah batas kepercayaan 95% simetris untuk mean populasi.

Jawab:

$$\varepsilon = t_{\alpha/2}(n-1) \frac{S_X}{\sqrt{n}} \longrightarrow \varepsilon = t_{0,025}(8) \frac{6}{\sqrt{9}} = 4,6.$$

Jadi batas kepercayaan 95% simetris untuk mean populasi adalah $5 \pm 4,6$.

28. Diberikan informasi sampel acak sebagai berikut:

- $Y = X_1 + \dots + X_n$ dimana ukuran sampel n sama dengan 25 dan variabel acak saling bebas dan berdistribusi identik.
- X_i berdistribusi Poisson dengan parameter λ
- $H_0 : \lambda = 0, 1$
- $H_0 : \lambda < 0, 1$
- Daerah kritis untuk menolak H_0 adalah $Y \leq 2$

Hitunglah tingkat signifikansi dari uji tersebut.

Jawab:

Tingkat signifikansi dari uji di atas adalah peluang menolak H_0 jika H_0 benar, yaitu diberikan sebagai berikut:

$$P(Y \leq 2 | \lambda = 0, 1)$$

Karena Y adalah jumlah dari peubah acak Poisson yang saling bebas dengan rata-rata 0,1 maka rata-rata Y adalah $25 \times (0, 1) = 2, 5$. Oleh karena itu diperoleh:

$$P(Y \leq 2) = P(Y = 0; 1; 2) = e^{-2,5} + e^{-2,5} \frac{2,5}{1!} + e^{-2,5} \frac{2,5^2}{2!} = 0.5438.$$

Jadi tingkat signifikansi uji di atas sedikitnya 0,50 dan lebih kecil dari 0,6.

29. Sampel acak dari 21 pengamatan dari distribusi normal memberikan hasil sebagai berikut:

$$\bar{X} = 3,5 \quad \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{21} (X_i - \bar{X})^2 = 0,445$$

Digunakan uji dua arah

$$H_0 : \mu = 3$$

$$H_1 : \mu \neq 3$$

Hitunglah nilai p (probabilitas uji statistik) dari uji tersebut.

Jawab:

Nilai p (probabilitas uji statistik) dari uji di atas adalah:

$$\begin{aligned} P\left(t(n-1) \geq \frac{|\bar{X}-\mu|}{\frac{s}{\sqrt{n}}}\right) &= P\left(t(n-1) \geq \frac{0,5}{\frac{\sqrt{0,445}}{\sqrt{21}}}\right) \\ &= P(t(n-1) \geq 3,43) \\ &= 1 - P(t(n-1) \leq 3,43) \\ &= 1 - 0,997423 \\ &= 0,002577. \end{aligned}$$

30. Misalkan $X_1, \dots, X_{12}$ adalah variabel-variabel acak yang masing-masing berdistribusi normal dengan mean 0 dan variansi $\sigma^2 > 0$. Dengan nilai $p = 0,025$ untuk uji hipotesis:

$$H_0 : \sigma^2 = 10$$

$$H_1 : \sigma^2 < 10$$

Tentukanlah daerah penolakan untuk uji hipotesis tersebut.

Jawab:

Perhatikan bahwa

$$\chi^2(n-1) = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}.$$

Diperoleh

$$\chi^2(11) = \frac{\sum_{i=1}^{12} (X_i - 0)^2}{10} = \frac{\sum_{i=1}^{12} X_i^2}{10}.$$

Daerah penolakan untuk uji hipotesis di atas adalah

$$\chi^2(11) < \chi_{0,975}^2(11) = 3,816$$

atau

$$\sum_{i=1}^{12} X_i^2 < 38,16.$$

31. Kode peserta ujian dari suatu ujian profesi aktuaris terdiri dari satu *digit* angka, tiga huruf, dan 3 *digit* angka (contohnya 1SAM123), kecuali huruf I, O, dan Q tidak dimasukkan pada posisi *alphabet* pertama dan ketiga. Hitunglah banyaknya kode peserta ujian yang mungkin dari ujian profesi aktuaris tersebut.

Jawab:

Misalkan $K_1K_2K_3K_4K_5K_6K_7$ menyatakan kode yang mungkin dari ujian profesi aktuaris tersebut.

Karena K_1, K_5, K_6 dan K_7 merupakan digit-digit angka maka 10 kemungkinan untuk masing-masing digit K_1, K_5, K_6 dan K_7 .

Sedangkan K_2 dan K_4 merupakan digit-digit huruf A,B,...,Z kecuali I,O dan Q, sehingga ada 23 kemungkinan untuk masing-masing digit K_2 dan K_4 .

Untuk K_3 mempunyai 26 kemungkinan.

Dengan menggunakan prinsip perkalian maka diperoleh banyaknya kode yang mungkin dari ujian profesi aktuaris tersebut adalah:

$$10 \times 23 \times 26 \times 23 \times 10 \times 10 \times 10 = 137.540.000$$

32. Banyaknya kombinasi dari r obyek yang dipilih dari kumpulan n obyek yang berbeda diberikan oleh $\binom{n}{r}$. Tentukanlah persamaan yang tepat dari $\binom{n}{r}$.

Jawab:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{r} &= \frac{n!}{r!(n-r)!} \\
\binom{n}{r} &= \frac{(n-1)!n}{r!(n-r-1)!(n-r)} \\
\binom{n}{r} &= \frac{(n-1)!}{r!((n-1)-r)!} \frac{n}{n-r} \\
\binom{n}{r} &= \frac{(n-1)!}{r!((n-1)-r)!} \frac{(n-r)+r}{n-r} \\
\binom{n}{r} &= \frac{(n-1)!}{r!((n-1)-r)!} \left(1 + \frac{r}{n-r}\right) \\
\binom{n}{r} &= \frac{(n-1)!}{r!((n-1)-r)!} + \frac{(n-1)!r}{r!((n-1)-r)!(n-r)} \\
\binom{n}{r} &= \frac{(n-1)!}{r!((n-1)-r)!} + \frac{(n-1)!r}{(r-1)!((n-r)-1)!r(n-r)} \\
\binom{n}{r} &= \frac{(n-1)!}{r!((n-1)-r)!} + \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} \\
\binom{n}{r} &= \frac{(n-1)!}{r!((n-1)-r)!} + \frac{(n-1)!}{(r-1)!((n-1)-(r-1))!} \\
\binom{n}{r} &= \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}
\end{aligned}$$

33. Tentukanlah ekspansi dari $(x - 2y)^3$.

Jawab:

Berdasarkan Teorema Multinomial, diperoleh:

$$(ax+by)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 x^n y^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 x^{n-1} y^1 + \dots + \binom{n}{n} a^0 b^n x^0 y^n.$$

Jadi ekspansi dari $(x - 2y)^3$ adalah

$$\begin{aligned}(x - 2y)^3 &= \binom{3}{0} 1^3 (-2)^0 x^3 y^0 + \binom{3}{1} 1^2 (-2)^1 x^2 y^1 + \binom{3}{2} 1^1 (-2)^2 x^1 y^2 \\ &\quad + \binom{3}{3} 1^0 (-2)^3 x^0 y^3 \\ &= x^3 - 6x^2 y + 12xy^2 - 8y^3.\end{aligned}$$

34. Misalkan himpunan *universal* adalah $U = \{1, 2, \pi, \text{Jamaal}, \text{water}, \text{gum}\}$. Misalkan $A = \{1, 2, \pi\}$ dan $B = \{1, 2, \text{Jamaal}, \text{gum}\}$. Tentukanlah $(A \cup B)^c$.

Jawab:

Karena $A = \{1, 2, \pi\}$ dan $B = \{1, 2, \text{Jamaal}, \text{gum}\}$ maka

$$A \cup B = \{1, 2, \pi, \text{Jamaal}, \text{gum}\}$$

Oleh karena itu diperoleh

$$\begin{aligned}(A \cup B)^c &= U - (A \cup B) \\ &= \{1, 2, \pi, \text{Jamaal}, \text{water}, \text{gum}\} - \{1, 2, \pi, \text{Jamaal}, \text{gum}\} \\ &= \{\text{water}\}\end{aligned}$$

35. Misalkan $\Pr(A \cup B) = 0,7$, $\Pr(A^c) = 0,6$, dan $\Pr(A \cap B^c) = 0,3$.
Hitunglah $\Pr(B)$.

Jawab:

Kita ketahui bahwa

$$\Pr(A) = 1 - \Pr(A^c) = 1 - 0,6 = 0,4.$$

Karena $\Pr(A) = \Pr(A \cap B) + \Pr(A \cap B^c)$ maka diperoleh

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A) - \Pr(A \cap B^c) = 0,4 - 0,3 = 0,1.$$

Berdasarkan aturan peluang, diketahui:

$$\begin{aligned}\Pr(A \cup B) &= \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B) \\ 0,7 &= 0,4 + \Pr(B) - 0,1\end{aligned}$$

sehingga diperoleh $\Pr(B) = 0,4$.

36. Dari soal nomor 35, hitunglah $\Pr(A \cap B)$.

Jawab:

Kita ketahui bahwa

$$\Pr(A) = 1 - \Pr(A^c) = 1 - 0,6 = 0,4.$$

Karena $\Pr(A) = \Pr(A \cap B) + \Pr(A \cap B^c)$ maka diperoleh

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A) - \Pr(A \cap B^c) = 0,4 - 0,3 = 0,1.$$

37. Sebuah polis asuransi memberikan manfaat individu sebesar 100 per hari untuk biaya perawatan sampai 3 hari dan 50 per hari untuk biaya perawatan setelah 3 hari seterusnya. Jumlah hari perawatan, X , adalah variabel acak diskrit dengan fungsi probabilitas

$$P(X = k) = \begin{cases} \frac{6-k}{15} & \text{untuk } k = 1, 2, 3, 4, 5 \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases}$$

Hitunglah nilai variansi pembayaran biaya perawatan dari polis asuransi tersebut.

Jawab:

Misal $B(x)$ menyatakan biaya perawatan ,

$$B(X = k) = \begin{cases} 100k & , k = 1, 2, 3 \\ 300 + 50(k - 3) & , k = 4, 5 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E[B(x)] &= \sum_{k=1}^{k=5} B(k)P(X = k) \\ &= 100 \cdot \frac{6-1}{15} + 200 \cdot \frac{6-2}{15} + 300 \cdot \frac{6-3}{15} + 350 \cdot \frac{6-4}{15} + 400 \cdot \frac{6-5}{15} \\ &= 220. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[(B(x))^2] &= \sum_{k=1}^{k=5} (B(k))^2 P(X = k) \\ &= 100^2 \cdot \frac{6-1}{15} + 200^2 \cdot \frac{6-2}{15} + 300^2 \cdot \frac{6-3}{15} + 350^2 \cdot \frac{6-4}{15} + 400^2 \cdot \frac{6-5}{15} \\ &= 59000. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var[B(x)] &= E[(B(x))^2] - (E[B(x)])^2 \\ &= 59000 - 220^2 \\ &= 10600. \end{aligned}$$

38. Misalkan X adalah variabel acak diskrit dengan distribusi probabilitas sebagai berikut:

x	2	4	6	7	12
$\Pr(X = x)$	6/11	2/11	1/11	1/11	1/11

Hitunglah nilai kuartil ketiga dari X .

Jawab:

Misalkan Q_3 menyatakan kuartil ketiga dari data di atas. Dengan mengasumsikan bahwa data di atas sebanyak 11 data, maka diperoleh:

$$Q_3 = x_{\frac{3}{4}, 12} = x_9 = 6.$$

39. Distribusi probabilitas dari ukuran klaim untuk sebuah polis asuransi diberikan dalam tabel berikut.

Ukuran klaim	30	40	50	60	70	80	90
Probabilitas	0,15	0,10	0,05	0,20	0,10	0,1	0,30

Tentukanlah persentase dari klaim yang terletak dalam nilai satu standar deviasi dari *median* ukuran klaim.

Jawab:

Median ukuran klaim = $\frac{60+70}{2} = 65$. Rata-rata ukuran klaim

$$\begin{aligned}
 &= 30 \cdot 0,15 + 40 \cdot 0,10 + 50 \cdot 0,05 + 60 \cdot 0,20 + 70 \cdot 0,10 + 80 \cdot 0,10 + 90 \cdot 0,30 \\
 &= 4,5 + 4 + 2,5 + 12 + 7 + 8 + 27 \\
 &= 65
 \end{aligned}$$

Rata-rata ukuran klaim kuadrat

$$\begin{aligned}
 &= 30^2 \cdot 0,15 + 40^2 \cdot 0,10 + 50^2 \cdot 0,05 + 60^2 \cdot 0,20 + 70^2 \cdot 0,10 + 80^2 \cdot 0,10 + 90^2 \cdot 0,30 \\
 &= 135 + 160 + 125 + 720 + 490 + 640 + 2430 \\
 &= 4700
 \end{aligned}$$

Standar deviasi ukuran klaim = $\sqrt{4700 - 4225} = \sqrt{475} = 21,8$ Jadi persentase dari klaim yang terletak dalam nilai satu standar deviasi dari median ukuran klaim (ukuran klaim yang terletak pada interval $[65-21,8; 65+21,8] = [43,2; 86,8]$) adalah 45%.

40. Misalkan X adalah variabel acak yang berdistribusi *uniform* dari bilangan asli yang dipilih acak dari 1 sampai 100. Tentukanlah nilai modus dari X .

Jawab:

Karena $\Pr(X = x) = \frac{1}{100}$ maka peluang untuk setiap variabel acak adalah sama. Hal ini berarti modus dari X tidak ada.

41. Misalkan seorang peserta pertandingan memanah mempunyai kemampuan tepat mengenai sasaran adalah 65% dan mengambil $n = 5$ percobaan memanah sasaran. Misalkan X menunjukkan banyaknya percobaan memanah sasaran dimana X mempunyai distribusi *binomial*. Hitunglah $\Pr(X > E[X])$.

Jawab:

Misalkan p menyatakan peluang peserta tersebut sukses memanah sasaran, maka diperoleh $p = 65\% = 0,65$. Karena $E[X] = n \cdot p$ maka untuk $n = 5$ diperoleh $E[X] = 5 \cdot (0,65) = 3,25$.

Jadi

$$\begin{aligned}\Pr(X > E[X]) &= \Pr(X > 3,25) \\ &= \Pr(X = 4) + \Pr(X = 5) \\ &= \binom{5}{4} (0,65)^4 (1 - 0,65)^1 + \binom{5}{5} (0,65)^5 (1 - 0,65)^0 \\ &= 0,4284.\end{aligned}$$

42. Misalkan X adalah variabel acak yang mempunyai distribusi geometrik dan standar deviasi $\sigma_X = \frac{\sqrt{15}}{2}$. Hitunglah $\Pr(X < E[X])$.

Jawab:

Misalkan p menyatakan peluang sukses. Karena $\sigma_X = \sqrt{\frac{1-p}{p^2}}$ dan $\sigma_X = \frac{\sqrt{15}}{2}$ maka diperoleh $15p^2 + 4p - 4 = 0$. Sedangkan $0 \leq p \leq 1$ maka nilai p yang memenuhi adalah $p = \frac{2}{5} = 0,4$.

Karena $E[X] = \frac{1-p}{p}$ maka diperoleh $E[X] = 1,5$. Jadi

$$\begin{aligned}\Pr(X < E[X]) &= \Pr(X < 1,5) \\ &= \Pr(X = 0) + \Pr(X = 1) \\ &= p(1-p)^0 + p(1-p)^1 \\ &= 0,4(1-0,4)^0 + 0,4(1-0,4)^1 \\ &= 0,4 + 0,24 \\ &= 0,64.\end{aligned}$$

43. Fungsi probabilitas densitas untuk variabel acak X diberikan oleh

$$f(x) = k(10 + x)^{-2}; \quad 0 \leq x < \infty.$$

Hitunglah $\Pr(X \leq 15)$.

Jawab:

Karena $\int_0^\infty f(x)dx = 1$ maka diperoleh

$$\begin{aligned} \int_0^\infty k(10 + x)^{-2}dx &= 1 \\ \frac{k}{10} &= 1 \\ k &= 10 \end{aligned}$$

Jadi

$$\begin{aligned} \Pr(X \leq 15) &= \int_0^{15} 10k(10 + x)^{-2}dx \\ &= -10(10 + x)^{-1} \Big|_{x=0}^{x=15} \\ &= -\frac{10}{25} + 1 \\ &= \frac{15}{25} \\ &= 0,6. \end{aligned}$$

44. Kerugian yang disebabkan oleh kebakaran pada sebuah bangunan dimodelkan dengan variabel acak X yang mempunyai fungsi probabilitas densitas

$$f(x) = \begin{cases} 0,005(20 - x) & , 0 < x < 20 \\ 0 & , \text{lainnya} \end{cases}$$

Diberikan bahwa kerugian kebakaran melebihi 8, hitunglah probabilitas bahwa kerugian kebakaran melebihi 16.

Jawab:

$$\begin{aligned} P(X > 8) &= P(8 < X < 20) \\ &= \int_8^{20} 0,005(20 - x)dx \\ &= 0,005(20x - \frac{1}{2}x^2)|_{x=8}^{x=20} \\ &= 0,36. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X > 16) &= P(16 < X < 20) \\ &= \int_{16}^{20} 0,005(20 - x)dx \\ &= 0,005(20x - \frac{1}{2}x^2)|_{x=16}^{x=20} \\ &= 0,04 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X > 16|X > 8) &= \frac{P(X > 16 \cap X > 8)}{P(X > 8)} \\ &= \frac{P(X > 16)}{P(X > 8)} \\ &= \frac{0,04}{0,36} \\ &= \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

45. Misalkan X berdistribusi *uniform* pada interval $[-2,6]$ dengan fungsi probabilitas densitas

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} & , -2 \leq x \leq 6 \\ 0 & , \text{lainnya} \end{cases}$$

Hitunglah nilai ekspektasi $g(X) = X^3 + \sqrt{X+2}$.

Jawab:

$$\begin{aligned} E[g(X)] &= \int_{-2}^6 g(x) \cdot f(x) dx \\ &= \int_{-2}^6 (x^3 + \sqrt{x+2}) \cdot \frac{1}{8} \\ &= \frac{1}{8} \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}(x+2)^{3/2} \right]_{-2}^6 \\ &= 41,89. \end{aligned}$$

46. Misalkan variabel acak Y berdistribusi *uniform* kontinu pada interval $[-2,5]$. Hitunglah $\Pr(Y = 1)$.

Jawab:

Karena Y berdistribusi *uniform* kontinu pada interval $[-2,5]$ maka

$$\Pr(Y = 1) = \int_1^1 \frac{1}{5 - (-2)} dy = 0.$$

47. Usia dari sebuah mesin cetak dengan harga 200 mempunyai distribusi eksponensial dengan mean 2 tahun. Pabrik yang memproduksi mesin cetak akan membayar *full refund* kepada pembeli jika mesin cetak rusak selama tahun pertama dan *one-half refund* jika mesin cetak rusak selama tahun kedua. Jika pabrik tersebut menjual 100 mesin cetak, hitunglah nilai harapan dari *refund* yang akan dibayar.

Jawab:

Misal X adalah variabel acak yang menyatakan usia sebuah mesin cetak. Karena $X \sim \text{eksponensial}(1/2)$ maka diperoleh $f(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$. Misal $R(x)$ menyatakan *refund* yang akan dibayar untuk satu mesin cetak, maka diperoleh

$$R(X = x) = \begin{cases} 200 & , 0 \leq x \leq 1 \\ 100 & , 1 < x \leq 2 \\ 0 & , \text{selainnya} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E[R(X)] &= \int_0^1 200 \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x} + \int_1^2 100 \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x} \\ &= 200[-e^{-\frac{1}{2}x}]_0^1 + 100[-e^{-\frac{1}{2}x}]_1^2 \\ &= 200(1 - e^{-\frac{1}{2}}) + 100(e^{-\frac{1}{2}} - e^{-1}) \\ &= 102,56. \end{aligned}$$

Jadi jika pabrik tersebut menjual 100 mesin cetak, maka nilai harapan dari *refund* yang akan dibayar adalah

$$E[100R(X)] = 100 \cdot E[R(X)] = 10256.$$

48. Misalkan Z adalah variabel acak yang berdistribusi normal standar. Hitunglah $\Pr(|Z| > 2,05)$.

Jawab:

$$\begin{aligned}\Pr(|Z| > 2,05) &= 1 - \Pr(|Z| \leq 2,05) \\ &= 1 - 2\Pr(0 \leq Z \leq 2,05) \\ &= 1 - 2(0,4798) \\ &= 0,0404.\end{aligned}$$

49. Sebuah uji diagnostik mengenai ada atau tidaknya suatu penyakit mempunyai dua hasil yang mungkin: 1 untuk ada penyakit dan 0 untuk tidak ada penyakit. Misalkan X menunjukkan adanya atau tidaknya penyakit berdasarkan pernyataan pasien, dan Y menunjukkan hasil dari uji diagnostik. Fungsi probabilitas bersama dari X dan Y diberikan oleh

$$\begin{aligned}\Pr(X = 0, Y = 0) &= 0,800 & \Pr(X = 1, Y = 0) &= 0,050 \\ \Pr(X = 0, Y = 1) &= 0,025 & \Pr(X = 1, Y = 1) &= 0,125\end{aligned}$$

Hitunglah $\text{Var}(X + Y)$.

Jawab:

		Y		
		0	1	$\Pr(X = x)$
X	0	0,800	0,025	0,825
	1	0,050	0,125	0,175
$\Pr(Y = y)$		0,850	0,150	1

X	Y	$Z = X + Y$	$\Pr(Z = z)$
0	0	0	0,800
0	1	1	0,025
1	0	1	0,050
1	1	2	0,125

$$E(Z) = 0 \cdot 0,800 + 1 \cdot (0,025 + 0,050) + 2 \cdot 0,125 = 0,325$$

$$E(Z^2) = 0^2 \cdot 0,800 + 1^2 \cdot (0,025 + 0,050) + 2^2 \cdot 0,125 = 0,575$$

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2 = 0,575 - (0,325)^2 = 0,4694.$$

50. Dari soal nomor 49, hitunglah $Var(Y|X = 1)$.

Jawab:

$$\Pr(Y = 0|X = 1) = \frac{\Pr(X=1,Y=0)}{\Pr(X=1)} = \frac{0,050}{0,175} = 0,286$$

$$\Pr(Y = 1|X = 1) = \frac{\Pr(X=1,Y=1)}{\Pr(X=1)} = \frac{0,125}{0,175} = 0,714$$

$$E(Y|X = 1) = \Pr(Y = 1|X = 1) = 0,714$$

$$E(Y^2|X = 1) = \Pr(Y = 1|X = 1) = 0,714$$

$$Var(Y|X = 1) = E(Y^2|X = 1) - (E(Y|X = 1))^2 = 0,714 - (0,714)^2 = 0,20.$$

51. Misalkan X dan Y adalah variabel-variabel acak. Diberikan persamaan sebagai berikut:

(i) $Cov[X, Y] = E[X \cdot Y] - E[X]E[Y]$

(ii) $Cov[X, Y] = a \cdot Var[X]$ jika $Y = a \cdot X + b$

(iii) $Cov[X, Y] = Var[Y]$

Manakah yang benar dari tiga persamaan diatas?

Jawab:

Yang benar adalah persamaan (i) dan (ii).

52. Sebuah investasi memberikan tingkat bunga tahunan R yang mengikuti distribusi uniform pada interval $(0,04 ; 0,08)$. Untuk investasi awal sebesar 10.000 akan memberikan hasil setelah satu tahun mengikuti variabel acak $V = 10.000e^R$. Tentukanlah fungsi distribusi kumulatif, $F(v)$, untuk nilai v yang memenuhi $0 < F(v) < 1$.

Jawab:

Karena R mengikuti distribusi uniform pada interval $(0,04 ; 0,08)$ maka diperoleh $f(r) = \frac{1}{0,04}$.

$$\begin{aligned}\Pr(R \leq r) &= \int_{0,04}^r f(s)ds \\ &= \int_{0,04}^r \frac{1}{0,04}ds \\ &= \frac{1}{0,04}r - 1.\end{aligned}$$

Dengan demikian, diperoleh

$$\begin{aligned}F(v) &= \Pr(V \leq v) \\ &= \Pr(10.000e^R \leq v) \\ &= \Pr(\ln 10.000 + R \leq \ln v) \\ &= \Pr(R \leq \ln v - \ln 10.000) \\ &= \Pr\left(R \leq \ln\left(\frac{v}{10000}\right)\right) \\ &= \frac{1}{0,04} \ln\left(\frac{v}{10000}\right) - 1 \\ &= 25 \left[\ln\left(\frac{v}{10000}\right) - 0,04 \right].\end{aligned}$$

53. Misalkan X_1 dan X_2 adalah variabel-variabel acak dari distribusi normal standar. Tentukanlah fungsi densitas probabilitas dari $Y_1 = \frac{X_1}{X_2}$.

Jawab:

$$X_1 \sim f_{X_1}(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x_1^2/2}, \quad -\infty < x_1 < \infty$$

$$X_2 \sim f_{X_2}(x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x_2^2/2}, \quad -\infty < x_2 < \infty$$

$$\begin{aligned} g_1(y_1) &= 2 \int_0^\infty f_{X_2}(x_2) f_{X_1}(x_2 y_1) x_2 dx_2 \\ &= 2 \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_2^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_2^2 y_1^2}{2}} x_2 dx_2 \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-\frac{x_2^2(1+y_1^2)}{2}} x_2 dx_2 \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{1}{(1+y_1^2)} e^{-\frac{x_2^2(1+y_1^2)}{2}} \Big|_{-\infty}^0 \\ &= \frac{1}{\pi(1+y_1^2)}. \end{aligned}$$

54. Dari soal nomor 53, tentukanlah mean dari variabel acak Y_1 .

Jawab:

$$E[Y_1] = \int_{-\infty}^{\infty} y_1 \frac{1}{\pi(1+y_1^2)} dy_1$$

Karena $f(y_1) = \frac{y_1}{\pi(1+y_1^2)}$ adalah fungsi ganjil, maka

$$E[Y_1] = 0.$$

55. Suatu populasi mempunyai mean 100 dan standar deviasi 16. Hitunglah probabilitas bahwa mean sampel berada dalam interval ± 3 dari mean populasi jika ukuran sampel $n = 200$.

Jawab:

$$\begin{aligned} & Pr(|\bar{X} - 100| \leq 3) \\ &= Pr(|Z| \leq \frac{3\sqrt{200}}{16}) \\ &= Pr(|Z| \leq 2,652) \\ &= 2 Pr(0 \leq Z \leq 2,652) \\ &= 0,992. \end{aligned}$$

56. Misalkan X adalah variabel acak populasi dengan mean μ_X dan variansi σ_X^2 , dan misalkan $(X_i)_{i=1}^n$ adalah sampel acak dari X . Tentukanlah bentuk lain dari $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$.

Jawab:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 &= \sum_{i=1}^n ((X_i - \mu_X) - (\bar{X} - \mu_X))^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n ((X_i - \mu_X)^2 - 2(X_i - \mu_X)(\bar{X} - \mu_X) + (\bar{X} - \mu_X)^2) \\
 &= \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_X)^2 - 2(\bar{X} - \mu_X) \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_X) + \sum_{i=1}^n (\bar{X} - \mu_X)^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_X)^2 - 2(\bar{X} - \mu_X)(n\bar{X} - n\mu_X) + n(\bar{X} - \mu_X)^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_X)^2 - 2n(\bar{X} - \mu_X)^2 + n(\bar{X} - \mu_X)^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_X)^2 - n(\bar{X} - \mu_X)^2.
 \end{aligned}$$

57. Variabel acak Y diketahui mempunyai distribusi normal. Sampel acak berukuran $n = 14$ menghasilkan $\sum_{i=1}^n Y_i = -602$ dan $S_Y = 18$. Tentukanlah interval kepercayaan 95% untuk *mean* populasi.

Jawab:

$$\varepsilon = t_{\alpha/2}(n-1) \frac{S_Y}{\sqrt{n}} \longrightarrow \varepsilon = t_{0,025}(13) \frac{18}{\sqrt{14}} = 10,4.$$

Jadi Hitunglah interval kepercayaan 95% untuk mean populasi adalah

$$(-43 - 10,4; -43 + 10,4) = (-53,4; -32,6).$$

58. Diberikan sampel acak dari distribusi *loss* normal:

- Mean sampel adalah 42.000
- Standar deviasi sampel adalah 8.000
- Terdapat 25 *loss* pengamatan dalam sampel

Dengan menggunakan uji dua arah dengan

$$H_0 : \mu = 45.000 \quad H_1 : \mu \neq 45.000.$$

Tentukanlah nilai α yang akan menolak H_0 .

Jawab:

$$t(n-1) = \frac{\bar{X} - \mu_X}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \longrightarrow t(24) = \frac{42 - 45}{\frac{8}{\sqrt{25}}} = -1,875.$$

$$\alpha = 0,01 : t_{0,005}(24) = 2,797.$$

$$\alpha = 0,02 : t_{0,01}(24) = 2,492.$$

$$\alpha = 0,05 : t_{0,025}(24) = 2,064.$$

$$\alpha = 0,1 : t_{0,05}(24) = 1,711.$$

Karena daerah penolakan untuk α adalah $|t(24)| > t_{\alpha/2}(24)$ maka kesimpulannya, menolak H_0 pada $\alpha = 0,1$ dan tidak menolak H_0 pada $\alpha = 0,01$; $\alpha = 0,02$; dan $\alpha = 0,05$.

59. Laporan survei menyebutkan biaya rata-rata dari kamar hotel di suatu kota lebih kecil dari 49,21. Untuk menguji ini, peneliti memilih sampel dari 24 kamar hotel dan memperoleh biaya rata-rata sampel adalah 47,37 dengan standar deviasi adalah 3,42. Pada $\alpha = 0,01$, berilah kesimpulan dari uji tersebut.

Jawab:

Dengan menggunakan uji satu arah:

$$\begin{aligned}H_0 &: \mu = 49,21 \\H_1 &: \mu < 49,21.\end{aligned}$$

Perhatikan bahwa

$$t(23) = \frac{47,37 - 49,21}{\frac{3,42}{\sqrt{24}}} = -2,636$$

dan daerah penolakan untuk $\alpha = 0,01$ adalah $t(24) < t_{0,005}(24) = 2,807$ maka kesimpulannya menolak H_0 pada $\alpha = 0,01$. Jadi, biaya kamar di kota tersebut lebih kecil dari 49,21 pada $\alpha = 0,01$.

60. Misalkan X_1, X_2, X_3, X_4 adalah sampel acak dari distribusi normal dengan mean μ yang tidak diketahui dan variansi σ^2 yang tidak diketahui. *Significance level* $\alpha = 0,05$ menggunakan statistik *Student-t* untuk uji hipotesis:

$$H_0 : \mu = 10$$

$$H_1 : \mu \neq 10$$

Diketahui $\bar{X} = 15,84$ dan $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^4 (X_i - \bar{X})^2}{3} = 16$. Tentukanlah *critical t-value* dan keputusan yang diperoleh.

Jawab:

Perhatikan bahwa

$$t(3) = \frac{15,84 - 10}{\frac{4}{\sqrt{4}}} = 2,92$$

dan daerah penolakan untuk $\alpha = 0,05$ adalah $|t(4)| > t_{0,025}(4) = 2,78$. Dengan *critical t-value* $t = 2,78$ maka kesimpulannya menolak H_0 pada $\alpha = 0,05$.

A20-November 2010

Soal No.1

Jawaban B

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

Karena $P(A \cup B) = P(S) = 1$ maka diperoleh

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - 1 = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} - 1 = \frac{1}{4}$$

Soal No.2

B. 151.200

Penyelesaian:

M A T E M A T I K A

Total huruf: 10

Ada 2 huruf M, 3 huruf A, 2 huruf T

Sehingga banyak susunan huruf yang berbeda adalah

$$\frac{10!}{3!2!2!} = 151.200$$

Soal No.4

$$F_X(x) = \int_{-1}^x \frac{1+t}{2} dt = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}, -1 \leq x < 1$$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^3 \leq y) = P(X \leq y^{1/3}) = \frac{y^{2/3}}{4} + \frac{y^{1/3}}{2} + \frac{1}{4}, -1 \leq y < 1$$

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{y^{2/3}} + \frac{1}{y^{1/3}} \right), -1 < y < 1$$

$$E(Y) = \int_{-1}^1 y f_Y(y) dy = \frac{1}{5}$$

Soal No.6

$$E(X) = \int_0^{\infty} x f(x) dx = \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx = 2$$

Soal No.10

$$y = x^2$$

$$x = 0, 1, 2, 3 \Rightarrow y = 0, 1, 4, 9$$

$$x = \sqrt{y}$$

$$f_Y(y) = f_X(\sqrt{y}) = \left(\frac{3}{\sqrt{y}} \right) \left(\frac{2}{5} \right)^{\sqrt{y}} \left(\frac{3}{5} \right)^{3-\sqrt{y}}$$

Soal No.11

Jawaban B

Probabilitas bola lampu yang terambil keduanya rusak adalah

$$\frac{4}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{2}{15}$$

Soal No.12

Jawaban B

Probabilitas diperoleh nilai kedua lembar uang tersebut sama dengan Rp 30.000,- adalah probabilitas terambilnya satu lembar uang Rp 10.000,- dan satu lembar uang Rp. 20.000,-, jadi diperoleh $2 \times \frac{5}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

Soal No.13

$$Var(Y) = 3.5$$

Soal No.23

B. 110

Penyelesaian:

Jika menjawab 3 soal pertama:

$$\binom{5}{3} \times \binom{5}{4} = 10 \times 5 = 50$$

Jika menjawab 4 soal pertama:

$$\binom{5}{4} \times \binom{5}{3} = 5 \times 10 = 50$$

Jika menjawab 5 soal pertama:

$$\binom{5}{5} \times \binom{5}{2} = 1 \times 10 = 10$$

Sehingga total kemungkinan adalah $50 + 50 + 10 = 110$ **Soal No.24**

Jawaban D

$$P(P_2|P_1) = \frac{P(P_1P_2)}{P(P_1)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

Soal No.26

Jawaban D

$$A = \{x \in S | x^2 + 1 \leq 630\}$$

$$A = \{x \in S | |x| \leq \sqrt{629}\}$$

$$A = \{x \in S | |x| \leq 25,08\}$$

$$\text{Jadi } P(A) = P(1 \leq x \leq 25) = 25 \times \frac{1}{200} = \frac{1}{8}$$

A20-Mei 2011

Soal No.3

D. 91

- Muncul sisi 6 satu kali

$$(1 \times 5 \times 5) + (5 \times 1 \times 5) + (5 \times 5 \times 1) = 3 \times (25) = 75$$

- Muncul sisi 6 dua kali

$$(1 \times 1 \times 5) + (1 \times 5 \times 1) + (5 \times 1 \times 1) = 3 \times 5 = 15$$

- Muncul sisi 6 tiga kali

$$(1 \times 1 \times 1) = 1$$

Banyak kemungkinan yang terjadi untuk kasus bahwa sisi 6 muncul paling sedikit sekali
 $75 + 15 + 1 = 91$

Soal No.7

$$\begin{aligned} P(X > 1) &= 1 - P(X \leq 1) \\ &= 1 - \{P(X = 0) + P(X = 1)\} \\ &= 1 - \left\{ \frac{e^{-4} (4^0)}{0!} + \frac{e^{-4} (4^1)}{1!} \right\} \\ &= 1 - 5e^{-4} \end{aligned}$$

Soal No.8

$$f(x_1) = \int_0^{x_1} 6x_2 dx_2 = 3(x_1)^2$$

$$f(x_2 | x_1 = 0.5) = \frac{f(x_1, x_2)}{f(0.5)} = 8x_2$$

$$E(X_2 | X_1 = 0.5) = \int_0^{0.5} x_2 f(x_2 | x_1 = 0.5) dx_2 = \frac{1}{3}$$

Soal No.12

$$\text{Var}(X) = (-c)^2 \cdot \frac{1}{2} + c^2 \cdot \frac{1}{2} = c^2$$

Soal No.17

$$\begin{aligned} M_{aX+b}(t) &= E(\exp[t(aX + b)]) = E(e^{atX} \cdot e^{bt}) \\ &= e^{bt} E(e^{atX}) = e^{bt} M_X(at) \end{aligned}$$

Soal No.18

$$X \sim \text{Beta}(a, b)$$

$$E(X) = \frac{a}{a+b}$$

Soal No.19

$$\begin{aligned} P(X < 1.19) + P(X > 1.21) &= P\left(Z < \frac{1.19 - 1.2}{0.005}\right) + 1 - P\left(Z < \frac{1.21 - 1.2}{0.005}\right) \\ &= P(Z < -2) + 1 - P(Z < 2) \\ &= P(Z < -2) + 1 - (1 - P(Z < -2)) \\ &= 2P(Z < -2) = 0.0456 \end{aligned}$$

Soal No.22

$$F_X(x) = \int_{-1}^x \frac{1+t}{2} dt = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}, -1 \leq x < 1$$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) = \sqrt{y}, 0 \leq y < 1$$

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}, 0 < y < 1.$$

Soal No.23

$$y = |x| = \begin{cases} x; & x \geq 0 \\ -x; & x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \{f_X(y) + f_X(-y)\} \left| \frac{dy}{dx} \right|, y > 0 \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}, y > 0 \end{aligned}$$

Soal No.24

$$P(90 \leq Y \leq 95) = 0.95$$

$$\Leftrightarrow P\left(90 \leq \frac{9}{5}X + 32 \leq 95\right) = 0.95$$

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{290}{9} \leq X \leq \frac{315}{9}\right) = 0.95$$

$$\therefore a = \frac{290}{9}, b = \frac{315}{9}$$

Soal No.27

$$\begin{aligned}P(X + Y \leq a) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{a-y} f_{X,Y}(x, y) \, dx \, dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{a-y} f_X(x) f_Y(y) \, dx \, dy \\&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{a-y} f_X(x) \, dx \right) f_Y(y) \, dy = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(a - y) f_Y(y) \, dy\end{aligned}$$

Soal No.28

$$\begin{aligned}P(X \leq Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^y f_{X,Y}(x, y) \, dx \, dy \\&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^y f_X(x) f_Y(y) \, dx \, dy \\&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^y f_X(x) \, dx \right) f_Y(y) \, dy \\&= \int_{-\infty}^{\infty} F_X(y) f_Y(y) \, dy\end{aligned}$$

A20-November 2011

Soal No.1

$$C. A - [A \cap (B \cup C)]$$

Soal No.2

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = r, x_i \geq 0$$

$$\binom{n+r-1}{r} = \binom{3+11-1}{11} = \binom{13}{11} = 78$$

Soal No.3

$$\text{misalkan } a_1 = n_1 - 2, a_2 = n_2 - 3, a_3 = n_3 - 4, a_4 = n_4 - 5$$

$$\text{maka } a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 7, a_i \geq 0$$

$$\binom{4+7-1}{7} = \binom{10}{7} = 120$$

Soal No.4

$$E(5X + 1) = 3 \Leftrightarrow E(X) = \frac{2}{5}$$

$$E(X^2 + 2X + 3) = 10 \Leftrightarrow E(X^2) = \frac{31}{5}$$

$$E(2X^2 - X + 9) = 21$$

Soal No.5

$$E[(X-2)^3] = 0 \Leftrightarrow E(X^3 - 6X^2 + 12X - 8) = 0$$

$$\text{Karena } E(X^3) = 9, E(X) = 2, \text{ maka } E(X^2) = \frac{25}{6}$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{1}{6}$$

Soal No.6

B. 24

Penyelesaian:

Sehingga total kejadian yang mungkin terjadi atau jumlah anggota himpunan S adalah 24.

Soal No.7

$$E(X^3) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n(n+1)^2}{4}$$

$$E(X^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$E(X) = \mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n i = \frac{(n+1)}{2}$$

$$\begin{aligned} E([X - \mu]^3) &= E(X^3 - 3\mu X^2 + 3\mu^2 X - \mu^3) - 3\mu E(X^2) + 3\mu^2 E(X) - (E(X))^3 \\ &= \frac{n(n+1)^2}{4} - 3 \frac{(n+1)}{2} \frac{(n+1)(2n+1)}{6} + 3 \left[\frac{(n+1)}{2} \right]^2 \frac{(n+1)}{2} - \left[\frac{(n+1)}{2} \right]^3 \\ &= \frac{(n+1)^2}{4} \{n - (2n+1) + (n+1)\} = 0 \end{aligned}$$

Soal No.10

X\Y	1	2	3	Total
1	2k	3k	4k	9k
2	6k	8k	10k	24k
Total	8k	11k	14k	33k

$$33k = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{33}$$

$$E(X) = \sum_{x=1}^2 \sum_{y=1}^3 \frac{1}{33} x(x^2 + xy) = \frac{57}{33}$$

$$E(Y) = \sum_{y=1}^3 \sum_{x=1}^2 \frac{1}{33} y(x^2 + xy) = \frac{72}{33}$$

$$E(X | Y = 2) = \sum_{x=1}^2 \frac{1}{33} x(x^2 + 2x) = \frac{19}{11}$$

$$E(XY) = \sum_{x=1}^2 \sum_{y=1}^3 \frac{1}{33} xy(x^2 + xy) = \frac{124}{33}$$

Jadi, pernyataan yang benar adalah pernyataan (i), (iii), dan (iv)

Soal No.11

Misalkan koin dilemparkan 3 kali, maka kemungkinan sisi gambar muncul untuk kedua kalinya adalah AGG dan AGG, dengan A menyatakan sisi angka & G menyatakan sisi gambar. Peluangnya adalah

$$P(X = 3) = P(AGG) + P(GAG) = (1-p) \cdot p \cdot p + p \cdot (1-p) \cdot p = 2p^2(1-p)$$

$$P(X = n) = (n-1)p^2(1-p)^{n-2}$$

Soal No.12

A. 7.200

karena yg diinginkan adalah membentuk himpunan yang terdiri dari 3 benda, maka kita misalkan memiliki 3 tempat kosong.

- Untuk tempat yang pertama banyak kemungkinan kita memilih benda tersebut adalah sebanyak 30.
- Kemudian, karena disyaratkan tidak ada dua benda dalam himpunan tersebut yang berada pada kolom atau baris yang sama, maka untuk tempat kedua kemungkinannya berkurang menjadi 20. Sebagai ilustrasi, misal di tempat pertama kita memilih A1, maka A2, A3, A4, A5, A6, A11, A16, A21, dan A26 tidak boleh dipilih.
- Untuk tempat ketiga juga serupa dengan tempat kedua. Sebagai ilustrasi, misal di tempat pertama kita memilih A1 dan di tempat kedua kita memilih A7, maka A8, A9, A10, A12, A17, A22, dan A27 tidak boleh dipilih. Jadi kemungkinannya berkurang lagi menjadi 12.

Jadi, banyaknya cara untuk membentuk suatu himpunan yang terdiri dari 3 benda (dipilih dari 30 benda di atas) yang berbeda, sedemikian sehingga tidak ada dua benda dalam himpunan tersebut yang berada pada kolom atau baris yang sama adalah $30 \times 20 \times 12 = 7200$

Soal No.18

D. 880 Orang

Penyelesaian:

Pria muda = 1320

Pria muda menikah = 600

Muda = 3000

$$P_{\text{muda menikah}} + P_{\text{muda blm menikah}} + W_{\text{muda menikah}} + W_{\text{Muda blm menikah}} = 3000$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}$$

$$1320 + W_{\text{muda menikah}} + W_{\text{Muda blm menikah}} = 3000$$

$$W_{\text{muda menikah}} + W_{\text{Muda blm menikah}} = 3000 - 1320$$

$$W_{\text{muda menikah}} + W_{\text{Muda blm menikah}} = 1680 \dots\dots\dots (1)$$

Muda dan menikah = 1400

$$P_{\text{muda menikah}} + W_{\text{muda menikah}} = 1400$$

$$600 + W_{\text{muda menikah}} = 1400$$

$$W_{\text{muda menikah}} = 1400 - 600$$

$$W_{\text{muda menikah}} = 800 \dots\dots\dots(2)$$

Subtitusika persamaan (2) ke (1):

$$W_{\text{muda menikah}} + W_{\text{Muda blm menikah}} = 1680$$

$$800 + W_{\text{Muda blm menikah}} = 1680$$

$$W_{\text{Muda blm menikah}} = 1680 - 800$$

$$W_{\text{Muda blm menikah}} = 880$$

Soal No.20

C. 3

Soal No.21

D. 60 %

Diketahui:

80% responden menjawab "YA" pada paling sedikit satu dari kedua pertanyaan di atas. 80% menjawab "TIDAK" pada paling sedikit satu dari kedua pertanyaan di atas.

Misalkan A adalah himpunan orang-orang yang menjawab YA dari pertanyaan no.1

Misalkan B adalah himpunan orang-orang yang menjawab YA dari pertanyaan no.2

80% responden menjawab "YA" pada paling sedikit satu dari kedua pertanyaan di atas artinya $n(A \cup B) = 80\%$

80% menjawab "TIDAK" pada paling sedikit satu dari kedua pertanyaan di atas artinya $n(A' \cup B') = 80\%$

Karena $n(A' \cup B') = 80\%$, maka $n(A \cap B) = 100\% - 80\% = 20\%$

Sehingga persentase responden yang menjawab "YA" pada tepat satu pertanyaan dari kedua pertanyaan di atas:

$$n\{(A \cup B) \cap (A' \cup B')\} = 80\% - 20\% = 60\%$$

Soal No.23

Jawaban C

$$P(1_s|1_d) = \frac{P(1_s \cap 1_d)}{P(1_d)} = \frac{0,95}{0,95+0,01} = \frac{0,95}{0,96} = 0,9896$$

Soal No.27

$$f(x, y) = e^{-(x+y)}$$

$$\text{Misal } u = x + y$$

$$f(u) = e^{-u}$$

$$z = e^{-(x+y)} = e^{-u} \Leftrightarrow u = -\ln z$$

$$\frac{du}{dz} = -\frac{1}{z}$$

$$f_Z(u) = f(u) \left| \frac{du}{dz} \right| = \frac{1}{z} f(-\ln z) = 1; 0 < u < 1$$

Soal No.30

Karena $n \rightarrow \infty$ dan $E(N) = np = 2$ merupakan konstanta, maka

$$N \sim \text{Poisson}(\mu = np)$$

$$N \sim \text{Poisson}(2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(N=0) = \frac{e^{-2} 2^0}{0!} = e^{-2}$$

A20-Mei 2012

Soal No.1

$$C. A' \cup B' = (A \cup B)'$$

Soal No.2

$$D. 54 \%$$

Soal No.8

$$\begin{aligned} E(X) &= 3\text{Var}(X) \\ \Leftrightarrow \frac{1+a}{2} &= 3 \frac{(a-1)^2}{12} \\ \Leftrightarrow a^2 - 4a - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= 2 + \sqrt{5} \end{aligned}$$

Soal No.11

-Tidak ada pilihan jawaban-

$$E(X) = \int_{-2}^4 x|x|dx = 24$$

Soal No.12

$$\text{Ketidaksamaan Chebyshev: } P(|X - \mu| \geq k) \leq \frac{\sigma^2}{k^2}$$

Karena $|X - \mu| \geq X - \mu$, artinya jika $|X - \mu| \geq k$ maka $X - \mu \geq k$

$$P(|X - 500| \geq 300\sqrt{2}) \leq \frac{22500}{180000}$$

$$\Leftrightarrow P(X - 500 \geq 300\sqrt{2}) \leq \frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow P(X \geq 500 + 300\sqrt{2}) \leq \frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow P(X > 800) \approx \frac{1}{8}$$

Soal No.15

$$M_X(t) = \exp(3t + t^2 + t^3)$$

$$M'_X(t) = (3t + t^2 + t^3) \exp(3t + t^2 + t^3)$$

$$M''_X(t) = (2 + 6t) \exp(3t + t^2 + t^3) + (3t + t^2 + t^3)^2 \exp(3t + t^2 + t^3)$$

$$E(X^2) = M''_X(0) = 11$$

Soal No.16

$$f(x, y) = f(x)f(y) = e^{-x}, x \geq 0, 0 \leq y \leq 1$$

$$u = xy, v = \frac{x}{y} \Leftrightarrow x = \sqrt{uv}, y = \sqrt{\frac{u}{v}}$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{dx}{du} & \frac{dx}{dv} \\ \frac{dy}{du} & \frac{dy}{dv} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2v}$$

$$g(u, v) = f\left(\sqrt{uv}, \sqrt{\frac{u}{v}}\right) = \frac{e^{-\sqrt{uv}}}{2v}, u > 0, v > 0, u < v.$$

Soal No.17

$$E(X) = \int_0^2 xf(x)dx = \frac{4}{3}$$

$$E(|X - E(X)|) = \int_0^{4/3} \left(-x + \frac{4}{3}\right) f(x) dx + \int_{4/3}^2 \left(x - \frac{4}{3}\right) f(x) dx = \frac{32}{81}$$

Soal No.18

$$E(X) = 0; Var(X) = \frac{(10\sqrt{3} - (-10\sqrt{3}))^2}{12} = 100$$

$$E(Y) = 0; Var(Y) = \frac{(30 - (-30))^2}{12} = 300$$

$$E(Y - X) = E(Y) - E(X) = 0$$

$$Var(Y - X) = Var(Y) + Var(X) = 400$$

Berdasarkan teori limit pusat,

$$\begin{aligned} P(\bar{Y} - \bar{X} < 1) &= P\left(\frac{\bar{Y} - \bar{X} - 0}{20/\sqrt{100}} < \frac{1 - 0}{20/\sqrt{100}}\right) \\ &= P\left(Z < \frac{1}{2}\right) \\ &= 0.6915 \end{aligned}$$

Soal No.30

$$X_1, \dots, X_n \sim \text{uniform}(-A, A)$$

$$F_X(x) = \frac{x}{2A}, x \in (-A, A)$$

$$\begin{aligned} &P(\min(X_1, \dots, X_n) \leq -b \text{ atau } \max(X_1, \dots, X_n) \geq a) \\ &= 1 - P(-b \leq X_1 \leq a, \dots, -b \leq X_n \leq a) \\ &= 1 - (P(-b \leq X_1 \leq a))^n \\ &= 1 - (P(X_1 \leq a) - P(X_1 < -b))^n \\ &= 1 - \left(\frac{a}{2A} - \left(\frac{-b}{2A}\right)\right)^n \\ &= 1 - \left(\frac{a+b}{2A}\right)^n \end{aligned}$$

A20-Maret 2013

Soal No.7

$X \sim \text{eksponensial}(1)$

$$f_X(x) = e^{-x}, x > 0$$

$$y = 10x^{0.8} \Leftrightarrow x = \left(\frac{y}{10}\right)^{10/8} \Leftrightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{8} \left(\frac{y}{10}\right)^{2/8}$$

$$f_Y(y) = f_X\left(\left(\frac{y}{10}\right)^{10/8}\right) \cdot \left|\frac{dx}{dy}\right| = (0.125)(0.1y)^{0.25} \exp\left(-(0.1y)^{0.25}\right), y > 0$$

Soal No.9

$X \sim \text{uniform}(2, 6)$

$$f_X(x) = \frac{1}{4}, 2 \leq x \leq 6$$

$$y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{y} \Leftrightarrow \frac{dx}{dy} = -\frac{1}{y^2}$$

$$f_Y(y) = f_X\left(\frac{1}{y}\right) \cdot \left|\frac{dx}{dy}\right| = \frac{1}{4y^2}, \frac{1}{6} \leq x \leq \frac{1}{2}$$

A20-Juni 2013

Soal No.15

$$P(X > 8) = \int_8^{20} 0.005(20 - x) dx = \frac{36}{100}$$

$$P(X > 16) = \int_{16}^{20} 0.005(20 - x) dx = \frac{4}{100}$$

$$P(X > 16 | X > 8) = \frac{P(X > 16)}{P(X > 8)} = \frac{1}{9}$$

A20-Juni 2014

Soal No.1

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B) - 1$$

$$P(A' \cup B') = 1 - P(A \cap B)$$

$$\Leftrightarrow P(A' \cup B') = 1 - P(A) + P(B) - 1$$

$$\Leftrightarrow P(A' \cup B') = (1 - P(A)) - (1 - P(B))$$

$$\Leftrightarrow P(A' \cup B') = P(A') + P(B')$$

Soal No.2

Karena $A \subseteq B$, maka peluang yang tidak mungkin adalah $\Pr(A) = \frac{1}{2}$ dan $\Pr(B) = \frac{1}{2}$.

Soal No.3

$$\text{Peluang benar} = 75\% + (20\% \times 25\%) = 80\%$$

Soal No.4

$$f(x) = ae^{-x} + be^{-2x}, x > 0$$

$$E(X) = 1 \Leftrightarrow \int_0^{\infty} xf(x)dx = 1 \Leftrightarrow a + \frac{b}{4} = 1 \dots (1)$$

$$\int_0^{\infty} f(x)dx = 1 \Leftrightarrow a + \frac{b}{2} = 1 \dots (2)$$

Dari (1) dan (2), $a = 1$ dan $b = 0$.

$$P(X < 1) = \int_0^1 e^{-x} dx = 0,63$$

Soal No.6

$$E(X) = \mu = \int_0^1 xf(x)dx = \frac{2}{3}$$

$$Var(X) = \int_0^1 \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 f(x)dx = \frac{1}{18}$$

$$E\left(\left|X - \frac{2}{3}\right|\right) = \int_0^{2/3} \left(-x + \frac{2}{3}\right) f(x)dx + \int_{2/3}^1 \left(x - \frac{2}{3}\right) f(x)dx = \frac{16}{81}$$

$$\frac{E\left(\left|X - \frac{2}{3}\right|\right)}{Var(X)} = \frac{32}{9}$$

Soal No.7

$$E(X_1) = \frac{2.9 + 3.1}{2} = 3$$

$$E(X_2) = \frac{2.7 + 3.1}{2} = 2.9$$

$$E(X_3) = \frac{2.9 + 3.3}{2} = 3.1 \rightarrow \text{yang terlama}$$

Soal No.8

$$E(XY^{-1}) = \sum_{x=1}^2 \sum_{y=1}^2 \frac{x}{y} \left(\frac{2^{x+1-y}}{9} \right) = \frac{25}{18}$$

Soal No.9

Misalkan X menyatakan banyaknya orang yang datang nonton pertandingan.

$$\Pr[X \geq 1] = 95\%$$

$$\Pr[X \geq 2] = 80\%$$

$$\Pr[X = 3] = 50\% = \Pr(A \cap M \cap T)$$

$$\Pr[X \geq 2] = 80\% \Leftrightarrow \Pr[X = 2] + \Pr[X = 3] = 50\% \Leftrightarrow \Pr[X = 2] = 30\%$$

$$\Pr(A \cap M) = \frac{1}{3} \Pr[X = 2] + \Pr(A \cap M \cap T) \Leftrightarrow \Pr(A \cap M) = 60\%$$

Soal No.10

$$\begin{aligned}
M_X(t) &= E(e^{tX}) \\
&\Leftrightarrow \sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^{tj-1}}{j!} = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} P(X=x) \\
&\Leftrightarrow \frac{e^{-1}}{0!} + \frac{e^{t-1}}{1!} + \frac{e^{2t-1}}{2!} + \dots = P(X=0) + e^t P(X=1) + e^{2t} P(X=2) + \dots \\
&\Leftrightarrow \frac{e^{2t-1}}{2!} = e^{2t} P(X=2) \\
&\Leftrightarrow P(X=2) = \frac{1}{2e}
\end{aligned}$$

Soal No.11

$$f_X(x) = \int_0^1 (x+y) dy = x + \frac{1}{2}$$

Soal No.12

$$\begin{aligned}
X &\sim \text{Poisson}(\lambda) \\
P(X=1 | X \leq 1) &= 80\% \\
&\Leftrightarrow \frac{P(X=1, X \leq 1)}{P(X \leq 1)} = 80\% \\
&\Leftrightarrow \frac{\lambda e^{-\lambda}}{e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda}} = 80\% \\
&\Leftrightarrow \frac{\lambda}{1+\lambda} = 80\% \\
&\Leftrightarrow \lambda = 4
\end{aligned}$$

Soal No.13

$$\begin{aligned}
\text{Var}(X) &= \frac{b-a}{12}, \text{Var}(X_1) = \text{Var}(X_2) = \text{Var}(X_3) = \frac{1}{12} \\
\text{Var}(X_1 + 2X_2 - X_3) &= \text{Var}(X_1) + 4\text{Var}(X_2) + \text{Var}(X_3) + \\
&2[2\text{Cov}(X_1, X_2) - \text{Cov}(X_1, X_3) - 2\text{Cov}(X_2, X_3)] = \frac{5}{12}
\end{aligned}$$

Soal No.14

$$E(X) = \int_0^2 xf(x)dx = \frac{4}{3}$$

$$E\left(\left|X - \frac{4}{3}\right|\right) = \int_0^{4/3} \left(-x + \frac{4}{3}\right)f(x)dx + \int_{4/3}^2 \left(x - \frac{4}{3}\right)f(x)dx = \frac{32}{81}$$

Soal No.15

$$X \sim \exp(b), E(X) = \frac{1}{b}$$

$$M_X(t) = \frac{b}{b-t}$$

$$M_X(-b^2) = \frac{b}{b+b^2} \Leftrightarrow 0.2 = \frac{b}{b+b^2} \Leftrightarrow b = 4.$$

Soal No.16

$$M_X(t) + M_Y(t) = \frac{3 + 3e^t + 2e^{2t}}{4} \dots (1)$$

$$M_X(t) - M_Y(t) = \frac{1 - e^t}{4} \dots (2)$$

Berdasarkan (1) & (2), diperoleh $M_X(t) = \frac{2 + e^t + e^{2t}}{4}$.

$$M_X(t) = E(e^{tX})$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 + e^t + e^{2t}}{4} = e^0 P(X=0) + e^t P(X=1) + e^{2t} P(X=2)$$

$$\Leftrightarrow P(X=1) = \frac{1}{4}$$

Soal No.17

$$P(C) = P(A) + P(B' \cap C) + P(A' \cap B)$$

$$\Leftrightarrow P(A) = z - x - y$$

Soal No.18

Kemungkinan munculnya sisi angka yang ke-3 kalinya terjadi pada lemparan ke-5:

AAGGA, AGAGA, AGGAA, GAAGA, GAGAA, GGAAA.

Probabilitas bahwa munculnya sisi angka yang ke-3 kalinya terjadi pada lemparan ke-5 sama dengan :

$$6 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{8}{81}$$

Soal No.20

Kejadian C adalah sub kejadian dari $A \cup B$.

Maka pernyataan yang benar adalah pernyataan II dan III.

Soal No.21

$$P\left(X + \frac{10}{X} > 7\right) = P(X^2 - 7X + 10 > 0) = P(X < 2) + P(X > 5)$$

$$= \int_0^2 \frac{1}{10} dx + \int_5^{10} \frac{1}{10} dx = \frac{7}{10}$$

Soal No.22

Misalkan

A : persentase orang yang menonton film pertama LOTR

B : persentase orang yang menonton film kedua LOTR

C : persentase orang yang menonton film ketiga LOTR

$$P(A) = 35\%, P(B) = 33\%, P(C) = 31\%$$

$$P(A \cap B \cap C) = 20\%$$

$$P(A \cap B' \cap C') = 8\%$$

$$P(A \cap B \cap C') = 4\%$$

$$P(A' \cap B' \cap C') = 50\%$$

$$P(A \cap B' \cap C') + P(A' \cap B \cap C') + P(A' \cap B' \cap C) = 8\% + 7\% + 6\% = 21\%$$

Soal No.24

$$Z_1 = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{80 - 72}{S} = \frac{8}{S}$$

$$Z_2 = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{90 - 80}{15} = \frac{10}{15}$$

$$\frac{8}{S} = \frac{10}{15} \Leftrightarrow S = 12$$

Soal No.30

$$F(\theta_p) = p$$

$$\Leftrightarrow 1 - \exp\left(-\frac{1}{2}(y-a)^2\right) = 0.75$$

$$\Leftrightarrow \exp\left(-\frac{1}{2}(y-a)^2\right) = 0.25$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}(y-a)^2 = \ln(0.25)$$

$$\Leftrightarrow (y-a)^2 = -2\ln(0.25)$$

$$\Leftrightarrow (y-a)^2 = \ln(0.25)^{-2}$$

$$\Leftrightarrow (y-a)^2 = \ln 16$$

$$\Leftrightarrow y-a = 2\sqrt{\ln 2}$$

$$\Leftrightarrow y = a + 2\sqrt{\ln 2}$$