Ruhiyat

50+ Soal & Jawab
Matematika Aktuaria

KATA SAMBUTAN PERSATUAN AKTUARIS INDONESIA

Persatuan Aktuaris Indonesia mengucapkan selamat atas penerbitan "Seri Catatan Kuliah Sains Aktuaria" dalam kerangka penyediaan bahan belajar bagi mereka yang menempuh pendidikan di bidang sains aktuaria. Pengajaran isi kurikulum pendidikan Persatuan Aktuaris Indonesia serta isi kurikulum pendidikan sains aktuaria di berbagai universitas di Indonesia secara umum akan terbantu dengan adanya pengadaan Seri Catatan Kuliah ini.

Sebagai organisasi profesi, Persatuan Aktuaris Indonesia akan senantiasa mendorong upaya berbagai pihak untuk menghasilkan karya bagi pembangunan di bidang sains aktuaria di Indonesia. Seri Catatan Kuliah ini dengan Editor Penerbitan yang juga sebagai Editor Utama Saudara Agah D. Garnadi merupakan salah satu kontribusi berharga dalam upaya meningkatkan kapasitas nasional di bidang sains aktuaria.

Akhir kata, Persatuan Aktuaris Indonesia menyatakan apresiasi kepada Saudara Agah D. Garnadi sebagai Editor Penerbitan atas penerbitan Seri Catatan Kuliah ini. Semoga Seri ini bisa dijadikan panduan belajar di bidang sains aktuaria serta mendapatkan tanggapan yang baik dari semua pihak.

Jakarta, 2 Mei 2016

Rianto Ahmadi Djojosugito

Ketua Persatuan Aktuaris Indonesia

DRAF 1
JAWABAN UJIAN PAI
A60 - MATEMATIKA AKTUARIA
26 NOVEMBER 2014

Ruhiyat
Departemen Matematika
FMIPA IPB

Bogor, 2015

1. Sebuah variable acak dari distribusi *age-at-failure*, didefinisikan sebagai berikut:

$$F_x(x) = 1 - 0.10(100 - x)^{1/2} \text{ untuk } 0 \leq x \leq 100.$$

Carilah nilai $E(X)$ yang paling mendekati, bila diketahui fungsi $E(X) = \int_0^{\infty} S_x(x) dx$

Jawab

$$\begin{aligned} S_x(t) &= 1 - F_x(t) \\ &= 0.1(100 - x)^{1/2}, \quad 0 \leq t \leq 100 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^{\infty} S_x(t) dt \\ &= \int_0^{100} 0.1(100 - t)^{1/2} dt \\ &= \left[-\frac{0.2}{3} (100 - t)^{3/2} \right]_0^{100} \\ &= -\frac{0.2}{3} (0 - 1000) \\ &= 66.667 \end{aligned}$$

Jawaban: C. 66.67

2. Hitunglah nilai dari $\ddot{a}_{x:\overline{4}|}$, diketahui sebagai berikut:

$$\ddot{a}_{x:\overline{4}|} = E \left[\ddot{Y}_{x:\overline{4}|} \right]$$

k	$\ddot{a}_{\overline{k} }$	${}_k p_x$
1	1.00	0.33
2	1.93	0.24
3	2.80	0.16
4	3.62	0.11

Jawab

$$\begin{aligned}
 \ddot{a}_{x:\overline{4}|} &= E \left[\ddot{Y}_{x:\overline{4}|} \right] \\
 &= \sum_{k=1}^3 \ddot{a}_{\overline{k}|} {}_k p_x + \ddot{a}_{\overline{4}|} \sum_{k=4}^{\infty} {}_k p_x \\
 &= (1.00) (0.33) + (1.93) (0.24) + (2.80) (0.16) + (3.62) (1 - 0.33 - 0.24 - 0.16) \\
 &= 2.2186
 \end{aligned}$$

Jawaban: A. 2.2186

3. Sebuah perusahaan mesin cuci menyediakan garansi perbaikan untuk setiap mesin baru yang di jual. Perusahaan mengharuskan *customer* membayar 50 (*deductible*) untuk setiap perbaikan. Tabel di bawah ini menunjukkan biaya perbaikan selama ini.

<i>Event</i>	<i>Loss amount</i> (<i>x</i>)
A	25
B	52
C	70
D	75
E	150

Hitunglah berapa *variance* untuk biaya yang dibayarkan oleh perusahaan pada setiap kejadian kerusakan?

Jawab

Misalkan peubah acak X menyatakan biaya yang dibayarkan oleh perusahaan pada setiap kejadian kerusakan, maka

$$\Pr(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{5}, & x = 0, 2, 20, 25, 100 \\ 0, & \text{selainnya.} \end{cases}$$

$$E[X] = (0) \left(\frac{1}{5}\right) + (2) \left(\frac{1}{5}\right) + (20) \left(\frac{1}{5}\right) + (25) \left(\frac{1}{5}\right) + (100) \left(\frac{1}{5}\right) = \frac{147}{5}$$

$$E[X^2] = (0^2) \left(\frac{1}{5}\right) + (2^2) \left(\frac{1}{5}\right) + (20^2) \left(\frac{1}{5}\right) + (25^2) \left(\frac{1}{5}\right) + (100^2) \left(\frac{1}{5}\right) = \frac{11029}{5}$$

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{11029}{5} - \left(\frac{147}{5}\right)^2 = \frac{33536}{25} = 1341.44$$

Jawaban: D. 1341.44

4. Sebuah asuransi seumur hidup sebesar 1 untuk seorang berusia 41 tahun, dengan manfaat meninggal yang dibayarkan di akhir tahun kematian.

Diketahui:

(i) $i = 5\%$

(ii) $P_{40} = 0.9972$

(iii) $A_{41} - A_{40} = 0.00822$

(iv) ${}^2A_{41} - {}^2A_{40} = 0.00433$

(v) Z adalah nilai sekarang variabel acak dari asuransi ini.

Hitunglah $Var(Z)$.

Jawab

$$A_x = vq_x + vp_x A_{x+1}$$

$$\begin{aligned} A_{40} &= vq_{40} + vp_{40}A_{41} \\ A_{41} - 0.00822 &= \frac{1}{1.05} (1 - 0.9972) + \frac{1}{1.05} (0.9972) A_{41} \\ A_{41} - \frac{0.9972}{1.05} A_{41} &= \frac{0.0028}{1.05} + 0.00822 \\ \left(1 - \frac{0.9972}{1.05}\right) A_{41} &= \frac{0.0028}{1.05} + 0.00822 \\ (1.05 - 0.9972) A_{41} &= 0.0028 + (0.00822) (1.05) \\ A_{41} &= \frac{0.0028 + (0.00822) (1.05)}{1.05 - 0.9972} \\ &= 0.21650 \end{aligned}$$

$${}^2A_x = v^2q_x + v^2p_x {}^2A_{x+1}$$

$$\begin{aligned} {}^2A_{40} &= v^2q_{40} + v^2p_{40} {}^2A_{41} \\ {}^2A_{41} - 0.00433 &= \frac{1}{1.05^2} (1 - 0.9972) + \frac{1}{1.05^2} (0.9972) {}^2A_{41} \\ {}^2A_{41} - \frac{1}{1.05^2} (0.9972) {}^2A_{41} &= \frac{0.0028}{1.05^2} + 0.00433 \\ \left[1 - \frac{1}{1.05^2} (0.9972)\right] {}^2A_{41} &= \frac{0.0028}{1.05^2} + 0.00433 \\ [1.05^2 - 0.9972] {}^2A_{41} &= 0.0028 + (0.00433) (1.05^2) \\ {}^2A_{41} &= \frac{0.0028 + (0.00433) (1.05^2)}{1.05^2 - 0.9972} \\ &= 0.071926 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var[Z] &= {}^2A_{41} - (A_{41})^2 \\ &= 0.071926 - (0.21650)^2 \\ &= 0.02504 \end{aligned}$$

Jawaban: C. 0.02544

5. Sebuah anuitas menaik (*temporary annuity - due*) membayarkan 2 pada tahun pertama, 3 di tahun kedua dan 4 di tahun ketiga. Diketahui nilai berikut:

$$p_x = 0.80$$

$$p_{x+1} = 0.75$$

$$p_{x+2} = 0.50$$

$$v = 0.90$$

Hitunglah *variance* terhadap nilai sekarang dari variabel acak anuitas ini (*present value random variable*)

Jawab

Kemungkinan 1: x meninggal di tahun pertama

$$\begin{aligned}\text{anuitas} &= 2 \\ \text{peluang} &= q_x = 1 - 0.80 = 0.2\end{aligned}$$

Kemungkinan 2: x meninggal di tahun kedua

$$\begin{aligned}\text{anuitas} &= 2 + 3v = 2 + 3(0.90) = 4.7 \\ \text{peluang} &= p_x q_{x+1} = (0.80)(1 - 0.75) = 0.2\end{aligned}$$

Kemungkinan 3: x mencapai usia $x + 2$

$$\begin{aligned}\text{anuitas} &= 2 + 3v + 4v^2 = 2 + 3(0.90) + 4(0.90^2) = 7.94 \\ \text{peluang} &= {}_2p_x = p_x p_{x+1} = (0.80)(0.75) = 0.6\end{aligned}$$

Nilai Harapan

$$(2)(0.2) + (4.7)(0.2) + (7.94)(0.6) = 6.104$$

Momen Kedua

$$(2^2)(0.2) + (4.7^2)(0.2) + (7.94^2)(0.6) = 43.044$$

Ragam

$$43.044 - (6.104)^2 = 5.7852$$

Jawaban: C. 5.79

6. Jika X berdistribusi seragam pada $(1, 3)$, berapakah $Var(X)$?

Jawab

$$Var[X] = \frac{(3-1)^2}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Jawaban: B. $1/3$

7. Aktuaris A dan B menggunakan tabel mortalita yang sama untuk menghitung premi dari suatu produk asuransi Dwiguna diskrit selama 2 tahun sebesar 1000.

(i) Aktuaris A menghitung premi sebesar 608 di tahun pertama dan 350 di tahun kedua.

(ii) Aktuaris B menghitung level premi untuk tahun pertama dan kedua.

(iii) $d = 0.05$

Berapakah level premi yang dihitung Aktuaris B? (yang paling mendekati)

Jawab

A:

$$608 + 350vp_x = 1000A_{x:\overline{2}|}$$

B:

$$\pi + \pi vp_x = 1000A_{x:\overline{2}|}$$

$$\begin{aligned} A_{x:\overline{2}|} &= A_{x:\overline{2}|}^1 + A_{x:\overline{2}|}^{\overline{1}|} \\ &= vq_x + v^2p_xq_{x+1} + v^2{}_2p_x \\ &= v(1 - p_x) + v^2p_x(1 - p_{x+1}) + v^2p_xp_{x+1} \\ &= v - vp_x + v^2p_x - v^2p_xp_{x+1} + v^2p_xp_{x+1} \\ &= v - vp_x + v^2p_x \end{aligned}$$

$$v = 1 - d = 1 - 0.05 = 0.95$$

$$608 + 350(0.95)p_x = 1000(0.95 - 0.95p_x + 0.95^2p_x)$$

$$608 + 332.5p_x = 950 - 950p_x + 902.5p_x$$

$$380p_x = 342$$

$$p_x = 0.9$$

$$\pi + \pi vp_x = 608 + 350vp_x$$

$$\pi + \pi(0.95)(0.9) = 608 + 350(0.95)(0.9)$$

$$\pi + 0.855\pi = 907.25$$

$$1.855\pi = 907.25$$

$$\pi = \frac{907.25}{1.855} = 489.08$$

Jawaban: C. 489

8. Tentukan nilai dari $Var(Y_{95})$, bila menggunakan tingkat bunga tahunan 5% dan nilai sebagai berikut: $l_{95} = 100$, $l_{96} = 70$, $l_{97} = 40$, $l_{98} = 20$, $l_{99} = 4$, $l_{100} = 0$, $a_{95} = 1.2352$ dan ${}^2a_{95} = 1.1403$.

Jawab

$$d = \frac{i}{1+i} = \frac{0.05}{1.05}$$

$$A_x = v - da_x$$

$$\begin{aligned} A_{95} &= v - da_{95} \\ &= \frac{1}{1.05} - \frac{0.05}{1.05} (1.2352) \\ &= 0.8936 \end{aligned}$$

$$\delta' = 2\delta$$

$$\begin{aligned} e^{-\delta'} &= e^{-2\delta} \\ v' &= v^2 \\ &= \frac{1}{1.05^2} \\ &= \frac{1}{1.1025} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1+i' &= (1+i)^2 \\ i' &= (1+i)^2 - 1 \\ &= (1.05)^2 - 1 \\ &= 0.1025 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d' &= \frac{i'}{1+i'} = \frac{0.1025}{1.1025} \\ {}^2A_x &= v' - d'^2 a_x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^2A_{95} &= v' - d'^2 a_{95} \\ &= \frac{1}{1.1025} - \frac{0.1025}{1.1025} (1.1403) \\ &= 0.8010 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var[Y_{95}] &= \frac{{}^2A_{95} - (A_{95})^2}{d^2} \\ &= \frac{0.8010 - (0.8936)^2}{\left(\frac{0.05}{1.05}\right)^2} \\ &= 1.0933 \end{aligned}$$

Jawaban: A. 1.0933

9. Suatu asuransi seumur hidup diskrit untuk seorang berusia 40 tahun sebesar 1000.

Diketahui:

(i) $i = 0.06$

(ii) $\ddot{a}_{40:\overline{10}|} = 7.70$

(iii) $\ddot{a}_{50:\overline{10}|} = 7.57$

(iv) $1000A_{40:\overline{20}|}^1 = 60$

(v) $A_{40} = 0.16132$ dan $A_{50} = 0.24905$ dan $A_{60} = 0.36913$

(vi) $\ddot{a}_{40} = 14.8166$

(vii) $_{10}E_{40} = 0.53667$ dan $_{10}E_{50} = 0.51081$ dan $_{20}E_{40} = 0.27414$

Pada tahun ke 10, tertanggung ingin memilih opsi membayar hanya untuk 10 tahun berikutnya, tetapi tetap terproteksi sebesar 1000 selama seumur hidup. Berapakah premi yang harus di bayar untuk 10 tahun berikutnya?

Jawab

$$\begin{aligned} P_{40}\ddot{a}_{40} &= 1000A_{40} \\ P_{40} &= \frac{1000A_{40}}{\ddot{a}_{40}} \\ &= \frac{1000(0.16132)}{14.8166} \\ &= 10.888 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{50} &= 1 - d\ddot{a}_{50} \\ \ddot{a}_{50} &= \frac{1 - A_{50}}{d} \\ &= \frac{1 - 0.24905}{\frac{0.06}{1.06}} \\ &= 13.267 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{40}\ddot{a}_{50} &= P\ddot{a}_{50:\overline{10}|} \\ P &= \frac{P_{40}\ddot{a}_{50}}{\ddot{a}_{50:\overline{10}|}} \\ &= \frac{(10.888)(13.267)}{7.57} \\ &= 19.082 \end{aligned}$$

Jawaban: D. 19

10. Sebuah *select survival distribution* didefinisikan sebagai berikut:

$S_T(t; x) = \left(1 - \frac{1}{40 - x}\right)$, untuk $0 \leq x < 40$, dan $0 < t < 40 - x$. Tentukan ${}^{\circ}e_{[30]}$.

Jawab

$$S_T(t; x) = 1 - \frac{t}{40 - x}, \quad 0 \leq x < 40, \quad 0 < t < 40 - x$$

$$\begin{aligned} {}^{\circ}e_{[30]} &= \int_0^{\infty} {}_t p_{[30]} dt \\ &= \int_0^{10} \frac{S_{[30]}(0 + t; 30)}{S_{[30]}(0; 30)} dt \\ &= \int_0^{10} \frac{1 - \frac{t}{10}}{1} dt \\ &= \left[t - \frac{t^2}{20} \right]_0^{10} \\ &= 10 - 5 - 0 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Jawaban: C. 5

11. Sebuah anuitas ditunda 10 tahun dengan pembayaran 10000 setahun di bayarkan setiap awal tahun (*10 year deferred annuity-due*), di jual kepada Bapak X yang berusia 55 tahun, dengan premi neto tahunan yang dibayarkan selama masa penundaan. Sebagai tambahan, produk ini juga menyediakan pengembalian premi tanpa bunga bila Bapak X meninggal selama masa penundaan.

Hitunglah premi level neto tahunan bila di ketahui:

$$- \ddot{a}_{55:\overline{10}|} = 8$$

$$- \ddot{a}_{55} = 12$$

$$- (IA)_{55:\overline{10}|}^1 = 2.5$$

Jawab

$$\begin{aligned} {}_{10|}\ddot{a}_{55} &= \ddot{a}_{55} - \ddot{a}_{55:\overline{10}|} \\ &= 12 - 8 \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\ddot{a}_{55:\overline{10}|} &= 10000 {}_{10|}\ddot{a}_{55} + P(IA)_{55:\overline{10}|}^1 \\ 8P &= 10000(4) + 2.5P \\ 5.5P &= 40000 \\ P &= \frac{40000}{5.5} = 7272.7 \end{aligned}$$

Jawaban: E. 7273

12. Sebuah kontrak dwiguna selama n tahun, dengan premi tunggal netto sebesar 600. Kontrak ini akan membayarkan sebesar 1000 bila tertanggung hidup di akhir tahun n , tetapi hanya akan membayarkan premi netto tunggal bila tertanggung meninggal dalam n tahun.

Diketahui: $A_{x:\overline{n}|} = 0.80$. Hitunglah ${}_nE_x$.

Jawab

$$\begin{aligned} A_{x:\overline{n}|} &= A_{x:\overline{n}|}^1 + {}_nE_x \\ 0.80 &= A_{x:\overline{n}|}^1 + {}_nE_x \\ A_{x:\overline{n}|}^1 &= 0.80 - {}_nE_x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 600 &= 1000{}_nE_x + 600A_{x:\overline{n}|}^1 \\ 600 &= 1000{}_nE_x + 600(0.80 - {}_nE_x) \\ 600 &= 1000{}_nE_x + 480 - 600{}_nE_x \\ 400{}_nE_x &= 120 \\ {}_nE_x &= 0.3 \end{aligned}$$

Jawaban: C. 0.30

13. Tentukan nilai dari $1000 ({}_2V_{x:\overline{3}|} - {}_1V_{x:\overline{3}|})$, bila menggunakan tingkat bunga tahunan 6% dan nilai sebagai berikut: $l_x = 100$, $l_{x+1} = 90$, $P_{x:\overline{3}|} = 0.3251$

Jawab

$${}_tV_{x:\overline{n}|} = A_{x+t:\overline{n-t}|} - P_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$$

$${}_1V_{x:\overline{3}|} = A_{x+1:\overline{2}|} - P_{x:\overline{3}|}\ddot{a}_{x+1:\overline{2}|}$$

$${}_2V_{x:\overline{3}|} = A_{x+2:\overline{1}|} - P_{x:\overline{3}|}\ddot{a}_{x+2:\overline{1}|}$$

$$\begin{aligned} & 1000 ({}_2V_{x:\overline{3}|} - {}_1V_{x:\overline{3}|}) \\ = & 1000 [(A_{x+2:\overline{1}|} - P_{x:\overline{3}|}\ddot{a}_{x+2:\overline{1}|}) - (A_{x+1:\overline{2}|} - P_{x:\overline{3}|}\ddot{a}_{x+1:\overline{2}|})] \\ = & 1000 [A_{x+2:\overline{1}|} - A_{x+1:\overline{2}|} - P_{x:\overline{3}|}(\ddot{a}_{x+2:\overline{1}|} - \ddot{a}_{x+1:\overline{2}|})] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{x+2:\overline{1}|} &= \sum_{k=0}^0 v^{k+1} {}_kp_{x+2}q_{x+2+k} + vp_{x+2} \\ &= vq_{x+2} + vp_{x+2} \\ &= v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{x+1:\overline{2}|} &= \sum_{k=0}^1 v^{k+1} {}_kp_{x+1}q_{x+1+k} + v^2p_{x+1} \\ &= vq_{x+1} + v^2p_{x+1}q_{x+2} + v^2p_{x+1}p_{x+2} \\ &= vq_{x+1} + v^2p_{x+1} \\ &= v(1 - p_{x+1}) + v^2p_{x+1} \\ &= v - vp_{x+1} + v^2p_{x+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{x+2:\overline{1}|} - A_{x+1:\overline{2}|} &= v - (v - vp_{x+1} + v^2p_{x+1}) \\ &= vp_{x+1} - v^2p_{x+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{x+2:\overline{1}|} &= \sum_{k=0}^0 v^k {}_kp_{x+2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{x+1:\overline{2}|} &= \sum_{k=0}^1 v^k {}_kp_{x+1} \\ &= 1 + vp_{x+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{x+2:\overline{1}|} - \ddot{a}_{x+1:\overline{2}|} &= 1 - (1 + vp_{x+1}) \\ &= -vp_{x+1} \end{aligned}$$

$$p_{x+1} = \frac{l_{x+1}}{l_x} = \frac{90}{100} = 0.9$$

$$\begin{aligned}
& 1000 ({}_2V_{x:\overline{3}|} - {}_1V_{x:\overline{3}|}) \\
= & 1000 [A_{x+2:\overline{1}|} - A_{x+1:\overline{2}|} - P_{x:\overline{3}|} (\ddot{a}_{x+2:\overline{1}|} - \ddot{a}_{x+1:\overline{2}|})] \\
= & 1000 [(vp_{x+1} - v^2p_{x+1}) - P_{x:\overline{3}|} (-vp_{x+1})] \\
= & 1000vp_{x+1} [(1 - v) + P_{x:\overline{3}|}] \\
= & 1000\frac{1}{1.06} (0.9) \left[\left(1 - \frac{1}{1.06}\right) + 0.3251 \right] \\
= & 324.09
\end{aligned}$$

Jawaban: E. tidak ada jawaban yang benar.

14. Tentukan nilai dari a_{95} , bila menggunakan tingkat bunga tahunan 6% dan nilai sebagai berikut: $l_{95} = 100$, $l_{96} = 60$, $l_{97} = 50$, $l_{98} = 30$, $l_{99} = 6$, $l_{100} = 0$.

Jawab

$$\begin{aligned}
 a_{95} &= vp_{95} + v^2 {}_2p_{95} + v^3 {}_3p_{95} + v^4 {}_4p_{95} + \sum_{k=5}^{\infty} v^k {}_kp_{95} \\
 &= v \frac{l_{96}}{l_{95}} + v^2 \frac{l_{97}}{l_{95}} + v^3 \frac{l_{98}}{l_{95}} + v^4 \frac{l_{99}}{l_{95}} + 0 \\
 &= \frac{1}{1.06} \frac{60}{100} + \frac{1}{1.06^2} \frac{50}{100} + \frac{1}{1.06^3} \frac{30}{100} + \frac{1}{1.06^4} \frac{6}{100} \\
 &= 1.3104
 \end{aligned}$$

Jawaban: D. 1.31

15. Diketahui $\lambda_x(x) = (80 - x)^{-1/2}$, for $0 < x < 80$. Manakah dari nilai di bawah ini yang paling mendekati median dari distribusi T_{20} ?

Jawab

$$\lambda_0(x) = (80 - x)^{-1/2}, \quad 0 < x < 80$$

$$\begin{aligned} S_0(t) &= \exp \left[- \int_0^t \lambda_0(y) dy \right] \\ &= \exp \left[- \int_0^t (80 - y)^{-1/2} dy \right] \\ &= \exp \left[\left(2(80 - y)^{1/2} \right)_0^t \right] \\ &= \exp \left[2(80 - t)^{1/2} - 2(80)^{1/2} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{20}(t) &= 1 - \frac{S_0(20 + t)}{S_0(20)} \\ &= 1 - \frac{\exp \left[2(60 - t)^{1/2} - 2(80)^{1/2} \right]}{\exp \left[2(60)^{1/2} - 2(80)^{1/2} \right]} \\ &= 1 - \exp \left[2(60 - t)^{1/2} - 2(60)^{1/2} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pr(T_{20} \leq t) &= 0.5 \\ 1 - \exp \left[2(60 - t)^{1/2} - 2(60)^{1/2} \right] &= 0.5 \\ \exp \left[2(60 - t)^{1/2} - 2(60)^{1/2} \right] &= 0.5 \\ 2(60 - t)^{1/2} - 2(60)^{1/2} &= \ln 0.5 \\ 2(60 - t)^{1/2} &= 2(60)^{1/2} + \ln 0.5 \\ (60 - t)^{1/2} &= (60)^{1/2} + \frac{1}{2} \ln 0.5 \\ 60 - t &= \left[(60)^{1/2} + \frac{1}{2} \ln 0.5 \right]^2 \\ t &= 60 - \left[(60)^{1/2} + \frac{1}{2} \ln 0.5 \right]^2 \\ &= 5.249 \end{aligned}$$

Jawaban: D. 5.249

16. Sebuah tabel penurunan multiple (*multiple decrement table*) dengan kejadian meninggal (1), ketidakmampuan- *disability* (2) dan batal (3) dimana pembatalan hanya terjadi pada akhir tahun.

Diketahui:

(i) $q'_{60}^{(1)} = 0.010$

(ii) $q'_{60}^{(2)} = 0.050$

(iii) $q'_{60}^{(3)} = 0.100$

(iv) Kejadian meninggal dan ketidakmampuan berdistribusi seragam sepanjang usia yang diasosiasikan dengan tabel penurunan *single*.

Hitunglah $q_{60}^{(30)}$.

Jawab

Jawaban: A. 0.094

17. Hitunglah premi neto tahunan dari produk asuransi selama 2 tahun dimana manfaat meninggal sebesar 1000 dibayarkan pada akhir tahun kematian. Premi neto tahunan dihitung berdasarkan *equivalence principle*.

Diketahui: $v = 0.90$, $q_x = 0.10$ dan $q_{x+1} = 0.20$

Jawab

$$\begin{aligned}\ddot{a}_{x:\overline{2}|} &= 1 + vp_x \\ &= 1 + (0.90)(0.90) \\ &= 1.81\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A_{x:\overline{2}|}^1 &= vq_x + v^2p_xq_{x+1} \\ &= (0.90)(0.10) + (0.90)^2(0.90)(0.20) \\ &= 0.2358\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P\ddot{a}_{x:\overline{2}|} &= 1000A_{x:\overline{2}|}^1 \\ P &= \frac{1000(0.2358)}{1.81} \\ &= 130.2762431\end{aligned}$$

Jawaban: C. 130.27

18. Bila di ketahui informasi berikut:

$$\cdot \text{Var} \left(\bar{a}_{\overline{T_x}|} \right) = \frac{100}{9}$$

$$\cdot \delta = 4k$$

$$\cdot \mu_{x+t} = k \text{ untuk semua } t$$

Tentukanlah nilai dari k .

Jawab

$$\begin{aligned} {}_t p_x &= e^{-\int_0^t \mu_{x+r} dr} \\ &= e^{-\int_0^t k dr} \\ &= e^{-kt} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{A}_x &= \int_0^\infty v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\delta t} e^{-kt} k dt \\ &= k \int_0^\infty e^{-(\delta+k)t} dt \\ &= \frac{k}{\delta + k} \\ &= \frac{k}{4k + k} \\ &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^2\overline{A}_x &= \int_0^\infty v^{2t} {}_t p_x \mu_{x+t} dt \\ &= \int_0^\infty e^{-2\delta t} e^{-kt} k dt \\ &= \frac{k}{2\delta + k} \\ &= \frac{k}{8k + k} \\ &= \frac{1}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Var\left(\overline{a_{T_x}}\right) &= \frac{100}{9} \\
\frac{{}^2\overline{A}_x - \overline{A}_x}{\delta^2} &= \frac{100}{9} \\
\frac{\frac{1}{9} - \left(\frac{1}{5}\right)^2}{16k^2} &= \frac{100}{9} \\
\frac{1}{225k^2} &= \frac{100}{9} \\
k^2 &= \frac{9}{22500} \\
k &= \frac{3}{150} \\
k &= 0.02
\end{aligned}$$

Jawaban: A. 0.02

19. Tabel kehidupan diberikan seperti di bawah ini:

x	l_x
0	100000
1	97408
2	97259
3	97160
4	97081

Berapakah yang akan meninggal antara usia 2 dan 4 tahun?

Jawab

$$\begin{aligned}l_2 - l_4 &= 97259 - 97081 \\ &= 178\end{aligned}$$

Jawaban: B. 178

20. Hitunglah p_{38} , bila di ketahui sebagai berikut:

$${}^{20}_{23}V_{15} = 0.585$$

$${}^{20}_{24}V_{15} = 0.600$$

$$i = 0.08$$

Jawab

$${}_t^hV_x = \begin{cases} A_{x+t} - {}_hP_x \ddot{a}_{x+t:\overline{h-t}|}, & t < h, \\ A_{x+t}, & t \geq h. \end{cases}$$

$${}^{20}_{23}V_{15} = A_{38}$$

$${}^{20}_{24}V_{15} = A_{39}$$

$$A_x = vq_x + vp_xA_{x+1}$$

$$A_{38} = vq_{38} + vp_{38}A_{39}$$

$$A_{38} = v(1 - p_{38}) + vp_{38}A_{39}$$

$$A_{38} = v - vp_{38} + vp_{38}A_{39}$$

$$A_{38} - v = p_{38}(vA_{39} - v)$$

$$p_{38} = \frac{A_{38} - v}{v(A_{39} - 1)}$$

$$= \frac{0.585 - \frac{1}{1.08}}{\frac{1}{1.08}(0.600 - 1)}$$

$$= 0.9205$$

Jawaban: C. 0.9205

21. Sebuah Anuitas seumur hidup ditunda yang dibayarkan di awal periode (*deferred annuity due*) dengan masa penundaan selama 30 tahun, di jual kepada seseorang berusia 35 tahun. Di tawarkan juga fitur tambahan bila tertanggung meninggal selama masa penundaan, premi tunggal netto yang telah di bayarkan akan di kembalikan. Hitunglah premi tunggal netto per unit dari produk asuransi tersebut bila diketahui sebagai berikut:

$$\cdot \ddot{a}_{65} = 9.90$$

$$\cdot A_{35:\overline{30}|} = 0.21$$

$$\cdot A_{35:\overline{30}|}^1 = 0.07$$

Jawab

$$\begin{aligned} v^{30} {}_{30}p_{35} &= A_{35:\overline{30}|}^1 \\ &= A_{35:\overline{30}|} - A_{35:\overline{30}|}^1 \\ &= 0.21 - 0.07 \\ &= 0.14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P &= {}_{30}|\ddot{a}_{35} + PA_{35:\overline{30}|}^1 \\ P &= \ddot{a}_{65} v^{30} {}_{30}p_{35} + PA_{35:\overline{30}|}^1 \\ P &= (9.90)(0.14) + P(0.07) \\ 0.93P &= 1.386 \\ P &= \frac{1.386}{0.93} \\ &= 1.490322581 \end{aligned}$$

Jawaban: A. 1.49032

22. Diketahui tingkat kematian (*force of failure*) untuk perokok adalah 2 kali lipat bukan perokok, untuk semua usia diatas 55 tahun. Bila variable acak untuk *age-at-failure* berdistribusi seragam dengan $\omega = 75$, hitunglah nilai dari ${}^{\circ}e_{65:55}$, jika (65) adalah bukan perokok dan (55) adalah perokok dan saling independen.

Jawab

$$\begin{aligned} {}_t p_{65} &= \frac{10-t}{10}, \quad 0 \leq t \leq 10 \\ {}_t p_{55} &= \left(\frac{20-t}{20} \right)^2, \quad 0 \leq t \leq 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}_t p_{65:55} &= \left(\frac{10-t}{10} \right) \left(\frac{20-t}{20} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4000} (10-t)(20-t)^2, \quad 0 \leq t \leq 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^{\circ}e_{65:55} &= \int_0^{10} {}_t p_{65:55} dt \\ &= \frac{1}{4000} \int_0^{10} (4000 - 800t + 50t^2 - t^3) dt \\ &= \frac{1}{4000} \left[4000t - 400t^2 + \frac{50}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 \right]_0^{10} \\ &= \frac{1}{4000} \left(40000 - 40000 + \frac{50000}{3} - \frac{10000}{4} \right) \\ &= 3.54166667 \end{aligned}$$

Jawaban: C. 3.54167

23. Sebuah *survival model* didefinisikan sebagai berikut:

$S_x(x) = \frac{c-x}{c+x}$, untuk $0 \leq x \leq c$. Kemudian, sebuah tabel kehidupan (*Life table*) disusun berdasarkan distribusi tersebut dengan radix 100000. Dalam tabel tersebut, $l_{35} = 44000$. Diketahui pula $\omega = 90$. Hitunglah probabilitas dari seorang berusia 10 tahun akan meninggal antara usia 30 dan 45.

Jawab

$$\begin{aligned}
 l_{35} &= l_0 S_0(35) \\
 44000 &= 100000 \frac{c-35}{c+35} \\
 \frac{11}{25} &= \frac{c-35}{c+35} \\
 11c + 385 &= 25c - 875 \\
 14c &= 1260 \\
 c &= 90 \\
 \\
 l_{10} &= 100000 \frac{90-10}{90+10} = 80000 \\
 l_{30} &= 100000 \frac{90-30}{90+30} = 50000 \\
 l_{45} &= 100000 \frac{90-45}{90+45} = \frac{100000}{3} \\
 \\
 {}_{20|15}q_{10} &= {}_{20}p_{10} - {}_{35}p_{10} \\
 &= \frac{l_{30}}{l_{10}} - \frac{l_{45}}{l_{10}} \\
 &= \frac{50000 - \frac{100000}{3}}{80000} \\
 &= \frac{5}{24}
 \end{aligned}$$

Jawaban: D. 5/24

24. Sebuah asuransi diskrit seumur hidup sebesar 1000 dengan informasi sebagai berikut:
- Biaya tetap tahun pertama sebesar 70 (terdiri dari 50 biaya akuisisi dan 20 biaya *maintenance*) dan biaya tetap tahun selanjutnya sebesar 20 (biaya *maintenance*).
 - 3% dari setiap premi yang di bayarkan
 - $d = 0.04$, $\ddot{a}_x = 20$ dan $\ddot{a}_{x:\overline{20}|} = 10$

Jawab

$$\begin{aligned}
 A_x &= v - da_x \\
 &= v - d(\ddot{a}_x - 1) \\
 &= v - d\ddot{a}_x + d \\
 &= 1 - d - d\ddot{a}_x + d \\
 &= 1 - d\ddot{a}_x \\
 &= 1 - (0.04)(20) \\
 &= 0.2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G\ddot{a}_{x:\overline{20}|} &= 50 + 20\ddot{a}_x + 0.03G\ddot{a}_{x:\overline{20}|} + 1000A_x \\
 10G &= 50 + 400 + 0.3G + 200 \\
 9.7G &= 650 \\
 G &= 67.01030928
 \end{aligned}$$

Jawaban: E. 67.01 (Anulir)

25. Diketahui bahwa $q_x^{(1)} = 0.20$ dan $q_x^{(2)} = 0.10$. Kedua penurunan (*decrement*) tersebut berdistribusi seragam di antara interval $(x, x + 1)$ dalam konteks *multiple decrement*.

Diketahui pula persamaan berikut:

$${}_tP_x'^{(j)} = \left(1 - tq_x^{(\tau)}\right)^{q_x^{(j)}/q_x^{(\tau)}}, \text{ dan } t = 1$$

Tentukanlah nilai $q_x'^{(2)}$.

Jawab

Jawaban: B. 0.1121

26. Diketahui $\mu_x = 0.04$ untuk $0 < x \leq 40$ dan $\mu_x = 0.05$ untuk $x > 40$. Manakah dari pilihan nilai di bawah ini yang paling mendekati untuk ${}^{\circ}e_{25:\overline{25}}?$

Jawab

$${}_tp_x = e^{-\int_0^t \mu_{x+r} dr}$$

Untuk $t \leq 15$

$$\begin{aligned} {}_tp_{25} &= e^{-\int_0^t \mu_{25+r} dr} \\ &= e^{-\int_0^t 0.04 dr} \\ &= e^{-0.04t} \end{aligned}$$

Untuk $t > 15$

$$\begin{aligned} {}_tp_{25} &= e^{-\int_0^t \mu_{25+r} dr} \\ &= e^{-\left(\int_0^{15} \mu_{25+r} dr + \int_{15}^t \mu_{25+r} dr\right)} \\ &= e^{-\left(\int_0^{15} 0.04 dr + \int_{15}^t 0.05 dr\right)} \\ &= e^{-0.6 - 0.05(t-15)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^{\circ}e_{25:\overline{25}} &= \int_0^{25} {}_tp_{25} dt \\ &= \int_0^{15} {}_tp_{25} dt + \int_{15}^{25} {}_tp_{25} dt \\ &= \int_0^{15} e^{-0.04t} dt + \int_{15}^{25} e^{-0.6 - 0.05(t-15)} dt \\ &= \left[-25e^{-0.04t}\right]_0^{15} + \left[-20e^{-0.6 - 0.05(t-15)}\right]_{15}^{25} \\ &= (-25e^{-0.6} + 25) + (-20e^{-1.1} + 20e^{-0.6}) \\ &= 15.599 \end{aligned}$$

Jawaban: B. 15.6

27. Sebuah bond korporasi dengan durasi 10 tahun dan kupon sebesar 40 setahun, dengan tingkat gagal (*default rate*) 2% setahun. Bila bond tersebut *default* maka tidak akan ada lagi pembayaran kupon selanjutnya. Pada tingkat yield rate 6%, berapakah ekspektasi nilai sekarang dari kupon tersebut?

Diketahui pula bahwa anuitas pasti (tidak ada kemungkinan gagal) dari $a_{\overline{10}|0.06}$ adalah 7.36.

Jawab

Jawaban: C. 266.44

28. Suatu polis asuransi biasanya memuat klausa bahwa bila usia tertanggung diketahui tidak tepat pada saat diterbitkan, maka manfaat dari polis tersebut dapat disesuaikan sebesar selisih kalau polis tersebut dibeli dengan usia yang tepat. Suatu polis asuransi berjangka diskrit selama 3 tahun sebesar 1000 dijual kepada seseorang yang menyatakan berusia 30 pada saat penerbitan polis. Akan tetapi, pada tahun ke tiga, diketahui sesungguhnya orang tersebut berusia 31 tahun pada saat penerbitan polis.

Bila diketahui:

$$\cdot i = 0.04$$

$$\cdot q_{30} = 0.01$$

$$\cdot q_{31} = 0.02$$

$$\cdot q_{32} = 0.03$$

$$\cdot q_{33} = 0.04$$

Hitunglah berapa besar manfaat yang harus disesuaikan (besar manfaat yang dikurangkan).

Jawab

Jawaban: D. 335.90

29. T_{80} dan T_{85} adalah variabel acak independen berdistribusi seragam dengan $\omega = 100$. Hitunglah probabilitas bahwa kejadian kedua (*second failure*) terjadi 5 tahun dari sekarang.

Jawab

$$\begin{aligned}F_{80}(t_{80}) &= \frac{t_{80}}{20}, \quad 0 < t_{80} < 20 \\F_{85}(t_{85}) &= \frac{t_{85}}{15}, \quad 0 < t_{85} < 15\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Pr(T_{80} \leq 5, T_{85} \leq 5) &= \Pr(T_{80} \leq 5) \Pr(T_{85} \leq 5) \\&= \frac{5}{20} \frac{5}{15} \\&= \frac{1}{12}\end{aligned}$$

Jawaban: A. 1/12

30. Asuransi diskrit berjangka 2 tahun dijual untuk usia (x) dengan tingkat bunga $(i) = 0$.
Jika diketahui $q_x = 0.50$ dan $Var\left(Z_{x:\overline{2}}^1\right) = 0.1771$. Hitunglah q_{x+1} .

Jawab

$$v = \frac{1}{1+i} = 1$$

$$\begin{aligned} A_{x:\overline{2}}^1 &= vq_x + v^2p_xq_{x+1} \\ &= 0.5 + 0.5q_{x+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^2A_{x:\overline{2}}^1 &= v^2q_x + v^4p_xq_{x+1} \\ &= 0.5 + 0.5q_{x+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var\left(Z_{x:\overline{2}}^1\right) &= 0.1771 \\ {}^2A_{x:\overline{2}}^1 - \left(A_{x:\overline{2}}^1\right)^2 &= 0.1771 \\ 0.5 + 0.5q_{x+1} - (0.5 + 0.5q_{x+1})^2 &= 0.1771 \\ 0.5 + 0.5q_{x+1} - 0.25 - 0.5q_{x+1} - 0.25(q_{x+1})^2 &= 0.1771 \\ 0.25(q_{x+1})^2 &= 0.0729 \\ (q_{x+1})^2 &= \frac{0.0729}{0.25} \\ q_{x+1} &= \frac{0.27}{0.5} \\ &= 0.54 \end{aligned}$$

Jawaban: E. 0.54