AZƏRBAYCAN MİLLİ ELMLƏR AKADEMİYASININ MƏRUZƏLƏRİ

ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНА

TOM LX CİLD № 3-4 2004

УДК 517.984.54 **Математика**

Н. Дж. КУЛИЕВ

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ В КРАЕВОМ УСЛОВИИ

(*Представлено академиком НАН Азербайджана Дж.Э.Аллахвердиевым*)

Рассмотрим краевую задачу $P = P(q, h, H, H_1, H_2)$:

$$\ell y := -y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \tag{1}$$

$$y'(0) - hy(0) = 0,$$

$$\lambda(y'(\pi) + Hy(\pi)) = H_1 y'(\pi) + H_2 y(\pi),$$

где $h, H, H_1, H_2 \in \mathbf{R}$, $q(x) \in L_2(0,\pi)$ — вещественнозначная функция и

$$\rho := HH_1 - H_2 > 0.$$

В настоящей работе изучаются обратные задачи восстановления краевых задач типа P. Некоторые обратные задачи для уравнений со спектральным параметром в краевом условии рассмотрены в работах [1-3]. В случае, когда краевые условия не зависят от спектрального параметра, обратные задачи подробно исследованы (см. [4-6]).

Информацию о конкретных физических задачах, приводящих к изучению P, можно найти в работах [7-9]. В [9-12] исследованы осцилляционные свойства и базисность собственных функций, а в [7-8,13] разложения по собственным функциям задач вида P.

Пусть $\varphi(x,\lambda)$ и $\psi(x,\lambda)$ являются решениями уравнения (1) при начальных условиях

$$\varphi(0,\lambda) = 1, \quad \varphi'(0,\lambda) = h, \quad \psi(\pi,\lambda) = -\lambda + H_1, \quad \psi'(\pi,\lambda) = \lambda H - H_2.$$

Тогда характеристическая функция, нули которой являются собственными значениями задачи P, имеет вид

$$\chi(\lambda) := \varphi(\pi,\lambda)\psi'(\pi,\lambda) - \varphi'(\pi,\lambda)\psi(\pi,\lambda).$$

Задача P имеет счетное число простых вещественных собственных значений и для каждого собственного значения λ_n существует такое число k_n, что

$$\psi(x,\lambda_n) = k_n \varphi(x,\lambda_n), \quad k_n \neq 0.$$

В гильбертовом пространстве $\mathbf{H} = L_2(0,\pi) \oplus \mathbf{C}$ определим скалярное произведение

$$(F,G) := \int_0^\pi F_1(x)\overline{G}_1(x)dx + \frac{1}{\rho}F_2\overline{G}_2,$$

где

$$F = \begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} G_1(x) \\ G_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{H}.$$

Определим оператор

$$A(F) := \begin{pmatrix} -F_1''(x) + q(x)F_1(x) \\ H_1F_1'(\pi) + H_2F_1(\pi) \end{pmatrix}$$

с областью определения

$$D(A) = \{F \in \mathbf{H} \mid F_1(x), F_1'(x) \in AC[0,\pi], \ell F_1 \in L_2(0,\pi),$$
$$F_1'(0) - hF_1(0) = 0, F_2 = F_1'(\pi) + HF_1(\pi)\}.$$

Тогда

$$\Phi_n := \begin{pmatrix} \varphi(x,\lambda_n) \\ \varphi'(\pi,\lambda_n) + H\varphi(\pi,\lambda_n) \end{pmatrix}$$

являются ортогональными собственными элементами оператора A (см. [8]):

$$(\Phi_n, \Phi_m) = 0, \quad n \neq m.$$

Определим *нормировочные числа* как

$$\gamma_n := \|\Phi_n\|^2 = \int_0^\pi \varphi^2(x,\lambda_n)dx + \frac{(\varphi'(\pi,\lambda_n) + H\varphi(\pi,\lambda_n))^2}{\rho}.$$

Числа $\{\gamma_n, \lambda_n\}$ назовем *спектральными данными* краевой задачи P.

Теорема 1. Справедливы следующие асимптотические равенства:

$$s_n := \sqrt{\lambda_n} = n - 1 + \frac{\omega}{n\pi} + \frac{\zeta_n}{n}, \quad \{\zeta_n\} \in l_2, \tag{2}$$

$$\gamma_n = \frac{\pi}{2} + \frac{\zeta_n'}{n}, \quad \{\zeta_n'\} \in l_2, \tag{3}$$

где

$$\omega := h + H + \frac{1}{2}\int_0^\pi q(x)dx.$$

Приведем теорему разложения по собственным функциям и одну лемму, которые понадобятся при выводе основного уравнения обратной задачи.

Теорема 2. Пусть $f(x) \in AC[0,\pi]$. Тогда

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\gamma_n} \int_0^{\pi} f(t)\varphi(t,\lambda_n)dt \right) \varphi(x,\lambda_n), \tag{4}$$

причем ряд сходится равномерно на $[0,\pi]$.

Лемма 1. (см. [6]) Если s_n и γ_n подчиняются асимптотикам (2), (3) и

$$\alpha_n^0 = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & n \geq 1 \\ \pi, & n = 0 \end{cases}$$

то

$$a(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos s_n x}{\gamma_n} - \frac{\cos(n-1)x}{\alpha_{n-1}^0} \right) \in W_2^1(0,\pi).$$

Положим

$$F(x,t) := \frac{\cos s_0 x \cos s_0 t}{\gamma_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos s_n x \cos s_n t}{\gamma_n} - \frac{\cos(n-1)x \cos(n-1)t}{\alpha_{n-1}^0} \right).$$

Так как

$$F(x,t) = \frac{\cos s_0 x \cos s_0 t}{\gamma_0} + \frac{a(x+t) + a(x-t)}{2},$$

то в силу леммы 1 функция $F(x,t)$ — непрерывна и $\frac{d}{dx} F(x,x) \in L_2(0,\pi)$. Известно [4] что, имеют место представления

$$\varphi(x,\lambda) = \cos\sqrt{\lambda}x + \int_0^x K(x,t)\cos\sqrt{\lambda}t dt,$$

$$\cos\sqrt{\lambda}x = \varphi(x,\lambda) + \int_0^x H(x,t)\varphi(t,\lambda)dt,$$

где $K(x,t)$ и $H(x,t)$ — вещественные непрерывные функции, причем

$$K(x,x) = \frac{1}{2}\int_0^x q(t)dt.$$

С помощью этих представлений доказываем следующие теоремы.

Теорема 3. При каждом фиксированном $x \in (0,\pi]$ функция $K(x,t)$ удовлетворяет следующему *основному уравнению*

$$F(x,t) + K(x,t) + \int_0^x K(x,\tau)F(\tau,t)d\tau = 0, \quad 0 < t < x. \tag{5}$$

Более того, это уравнение имеет единственное решение $K(x,t) \in L_2(0,x)$.

Теорема 4. Если спектральные данные краевых задач $P(q,h,H,H_1,H_2)$ и $P(\tilde{q},\tilde{h},\tilde{H},\tilde{H}_1,\tilde{H}_2)$ совпадают, то

$$q(x)=\tilde{q}(x) \text{ п.в. на } (0,\pi),$$
$$h=\tilde{h},\quad H=\tilde{H},\quad H_1=\tilde{H}_1,\quad H_2=\tilde{H}_2.$$

Пусть $\{\lambda_n,\gamma_n\}_{n\ge 0}$ — спектральные данные некоторой краевой задачи P. По этим данным строим функцию $F(x,t)$ и находим $K(x,t)$ из (5). Заменим $t\to tx$, $\tau\to\tau x$ в (5):

$$F(x,xt)+K(x,xt)+x\int_0^1 K(x,x\tau)F(x\tau,xt)d\tau=0,\quad 0<t<1.$$

Согласно лемме 1 и лемме 1.5.2 из [6] функция $K(x,t)$ определяется однозначно и $\frac{d}{dx}K(x,x)\in L_2(0,\pi)$. Теперь построим функции $q(x)$, $\varphi(x,\lambda)$, $\chi(\lambda)$ и число h по формулам

$$q(x):=2\frac{d}{dx}K(x,x),\quad h:=K(0,0),$$

$$\varphi(x,\lambda):=\cos sx+\int_0^x K(x,t)\cos st dt,$$

$$\chi(\lambda):=-\pi(\lambda-\lambda_0)(\lambda-\lambda_1)\prod_{n=2}^{\infty}\frac{(\lambda_n-\lambda)}{(n-1)^2}$$

и положим

$$k_n:=\frac{\dot{\chi}(\lambda_n)}{\gamma_n}.$$

Ясно, что $k_n\ne 0$.

Имеют место следующие утверждения.

Лемма 2. Справедливо равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi(x,\lambda_n)}{k_n\gamma_n}=0. \tag{6}$$

Лемма 3. Справедливы соотношения

$$-\varphi''(x,\lambda)+q(x)\varphi(x,\lambda)=\lambda\varphi(x,\lambda),$$
$$\varphi(0,\lambda)=1,\quad \varphi'(0,\lambda)=h.$$

Лемма 4. Для любого фиксированного n_0 система $\{\varphi(x,\lambda_n)\}_{n\ne n_0}$ образует базис Рисса в $L_2(0,\pi)$.

Лемма 5. Для каждой функции $f(x)\in W_2^2(0,\pi)$ имеет место разложение (4).

Леммы 3-5 доказываются аналогично соответствующим утверждениям работы [6].

Напишем равенство (6) в форме

$$\frac{\varphi(x,\lambda_{n_0})}{\gamma_{n_0}} = -\sum_{n\neq n_0} \frac{k_{n_0}\varphi(x,\lambda_n)}{k_n\gamma_n}, \tag{7}$$

где n_0 - любое неотрицательное целое число. Пусть $m \neq n_0$ фиксировано и $f(x) = \varphi(x,\lambda_m)$. Используя (7), из (4) находим:

$$\varphi(x,\lambda_m) = \sum_{n\neq n_0} c_{mn}\varphi(x,\lambda_n), \quad c_{mn} = \frac{1}{\gamma_n}\int_0^\pi \varphi(t,\lambda_m)\left(\varphi(t,\lambda_n) - \frac{k_{n_0}}{k_n}\varphi(t,\lambda_{n_0})\right)dt.$$

Согласно лемме 4, $c_{mn} = \delta_{mn}$ (δ_{mn} - символ Кронекера). Из произвольности n_0 получим:

$$\int_0^\pi \varphi^2(t,\lambda_n)dt = \gamma_n - \frac{\rho}{k_n^2}, \qquad \int_0^\pi \varphi(t,\lambda_m)\varphi(t,\lambda_n)dt = -\frac{\rho}{k_m k_n}, \quad m \neq n.$$

Используя эти равенства в формуле Грина

$$\varphi(\pi,\lambda)\varphi'(\pi,\mu) - \varphi'(\pi,\lambda)\varphi(\pi,\mu) = (\lambda-\mu)\int_0^\pi \varphi(t,\lambda)\varphi(t,\mu)dt$$

можем написать

$$\frac{k_n\varphi(\pi,\lambda_n)k_m\varphi'(\pi,\lambda_m) - k_n\varphi'(\pi,\lambda_n)k_m\varphi(\pi,\lambda_m)}{\lambda_n - \lambda_m} = -\rho, \quad n \neq m.$$

Из последнего равенства после некоторых преобразований получаем равенства

$$\lambda_n(\varphi'(\pi,\lambda_n) + H\varphi(\pi,\lambda_n)) = H_1\varphi'(\pi,\lambda_n) + H_2\varphi(\pi,\lambda_n), \quad n = 1,2,\ldots$$

для некоторых вещественных H, H_1 и H_2. Таким образом, мы доказали

Теорема 5. Для того чтобы вещественные числа $\{\lambda_n,\gamma_n\}_{n\geq 0}$ были спектральными данными некоторой задачи вида P, необходимо и достаточно, чтобы $\lambda_n \neq \lambda_m$ при $n \neq m$, $\gamma_n > 0$ и имели место (2)–(3).

Пусть $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ и $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ являются спектрами некоторых краевых задач $P(q,h,H,H_1,H_2)$ и $P(q,\tilde{h},H,H_1,H_2)$ соответственно. Согласно лемме 3.4.2 из [4] и теореме 1, они удовлетворяют следующим условиям:

$$\sqrt{\lambda_n} = n - 1 + \frac{\omega}{n\pi} + \frac{\zeta_n}{n}, \quad \sqrt{\mu_n} - \sqrt{\lambda_n} = \frac{\sigma}{n\pi} + \frac{\zeta'_n}{n^2}, \quad \{\zeta_n\},\{\zeta'_n\} \in l_2. \tag{8}$$

Для определенности предположим, что $h < \tilde{h}$. Так же, как и в классическом случае (см., напр., [5]) можно показать, что

$$\lambda_0 < \mu_0 < \lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \mu_2 < \dots$$

Можно показать, что указанные необходимые условия на собственные значения являются также достаточными. Для этого построим функции

$$\Phi(\lambda) = -\pi(\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_1)\prod_{n=2}^{\infty}\frac{\lambda_n - \lambda}{(n-1)^2},$$

$$\Psi(\lambda) = -\pi(\lambda - \mu_0)(\lambda - \mu_1)\prod_{n=2}^{\infty}\frac{\mu_n - \lambda}{(n-1)^2}$$

и положим

$$\gamma_n := (\omega - \sigma)\frac{\dot{\Phi}(\lambda_n)}{\Psi(\lambda_n)}.$$

С помощью леммы 3.4.2 из [4] можно показать, что числа γ_n удовлетворяют условию (3). Поэтому можем восстановить задачу $P(q,h,H,H_1,H_2)$. Число $\tilde{h}$ определим из равенства $\tilde{h} = h + \sigma - \omega$. Аналогично теореме 3.3.1 из [5] доказывается, что собственные значения построенной задачи совпадают с числами $\{\mu_n\}_{n\ge 0}$. Таким образом, доказана

Теорема 6. Для того чтобы последовательности вещественных чисел $\{\lambda_n\}$ и $\{\mu_n\}$ были спектрами двух краевых задач вида $P(q,h,H,H_1,H_2)$ и $P(q,\tilde{h},H,H_1,H_2)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись (8) и они перемежались.

В заключение автор выражает глубокую благодарность проф. И. М. Гусейнову за постановку задачи и полезные указания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мамедов С.Г.* Определение дифференциального уравнения второго порядка по двум спектрам, со спектральным параметром, входящим в граничные условия. // Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук, 1982, №2, с.15-22.

2. *Browne P.J., Sleeman B.D.* A uniqueness theorem for inverse eigenparameter dependent Sturm-Liouville problems. // Inverse Problems, 1997, v.13, p.1453-1462.

3. *Binding P.A., Browne P.J., Watson B.A.* Inverse spectral problems for Sturm-Liouville equations with eigenparameter dependent boundary conditions. // J. London Math. Soc. (2), 2000, v.62, №1, p.161-182.

4. *Марченко В.А.* Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. К.: Наукова Думка, 1977.

5. *Левитан Б.М.* Обратные задачи Штурма-Лиувилля. М.: Наука, 1984.

6. *Юрко В.А.* Обратные спектральные задачи и их приложения. Саратов: Изд-во Сарат. пед. ин-та, 2001.

7. *Walter J.* Regular eigenvalue problems with eigenvalue parameter in the boundary condition. // Math. Z., 1973, v.133, p.301-312.

8. *Fulton C.T.* Two-point boundary value problems with eigenvalue parameter contained in the boundary conditions. // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 1977, v.**77**, p.293-308.

9. *Капустин Н.Ю., Моисеев Е.И.* О спектральных задачах со спектральным параметром в граничном условии. // Дифференц. уравнения,1997,т.33,№1,с.115-119.

10. *Binding P.A., Browne P.J., Seddighi K.* Sturm-Liouville problems with eigenparameter dependent boundary conditions. // Proc. Edinburgh Math. Soc. (2), 1993, v.37, №1, p.57-72.

11. *Капустин Н.Ю.* Осцилляционные свойства решений одной несамосопряженной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии. // Дифференц. уравнения, 1999, т.35, №8, с.1024-1027.

12. *Керимов Н.Б., Мирзоев В.С.* О базисных свойствах одной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии. // Сиб. мат. журн., 2003, т.44, №5, с.1041–1045.

13. *Wray S.D.* Absolutely convergent expansions associated with a boundary-value problem with the eigenvalue parameter contained in one boundary condition. // Czechoslovak Math. J., 1982, v.32(107), p.608-622.

Институт математики и механики НАН Азербайджана

Поступило 17.V.2004

N.C.Quliyev

SƏRHƏDDƏ SPEKTRAL PARAMETRDƏN ASILILIQ OLDUQDA ŞTURM-LİUVİLL TƏNLİYİ ÜÇÜN TƏRS MƏSƏLƏLƏR

İşdə

$$\ell y := -y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x),$$
$$y'(0) - hy(0) = 0,$$
$$\lambda(y'(\pi) + Hy(\pi)) = H_1 y'(\pi) + H_2 y(\pi),$$

məsələsi üçün bir spektr və normallaşdırıcı ədədlər dəstinə əsasən, iki spektrə görə spektral analizin tərs məsələlərinə baxılır, burada $h, H, H_1, H_2 \in \mathbf{R}$, $q(x) \in L_2(0,\pi)$ isə həqiqi funksiyadır.

N.J.Guliyev

INVERSE PROBLEMS FOR STURM-LIOUVILLE EQUATION WITH SPECTRAL PARAMETER IN THE BOUNDARY CONDITION

Inverse problems of reconstruction of the boundary-value problem

$$\ell y := -y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x),$$
$$y'(0) - hy(0) = 0,$$
$$\lambda(y'(\pi) + Hy(\pi)) = H_1 y'(\pi) + H_2 y(\pi),$$

where $h, H, H_1, H_2 \in \mathbf{R}$ and $q(x) \in L_2(0,\pi)$ is a real-valued function, by one spectrum and a sequence of norming constants, by two spectra are considered.