METODA ELEMEN HINGGA SIMPUL BERGERAK UNTUK MUSNAHNYA DALAM WAKTU HINGGA DARI SISTEM PARAMETER TERDISTRIBUSI DENGAN UMPAN-BALIK POSITIF EKSPONENSIAL

Agah D. Garnadi

Abstrak Dalam sebuah sistem parameter terdistribusi dengan umpan balik positif eksponensial, keujudan global dalam waktu dari penyelesaian tidak dapat dijamin. Untuk sejumlah nilai awal, terdapat waktu T yang hingga sehingga penyelesaian u menuju tak hingga, yaitu musnahnya dalam waktu hingga atau meledak atau terbentuknya singularitas waktu. Metoda elemen hingga dengan simpul bergerak digunakan untuk memecahkan SPD dengan umpan balik positif eksponensial mendekati waktu ledaknya. Perhatian kita tak hanya bagaimana mengatur langkah waktu mendekati waktu ledak, tetapi juga perilaku penyelesaian di sekitar waktu ledak.

1. Pendahuluan

Pada masalah pembakaran sistem parameter terdistribusi dengan umpan balik positif eksponensial:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \exp(u)$$

muncul sebagai representasi fenomena. Salah satu aspek permasalahan dalam penyelesaian masalah ini ialah dimungkinkannya penyelesaian hanya ujud dalam waktu hingga. Disamping itu, secara analitis, manakala penyelesaian mendekati waktu akhirnya, penyelesaian membumbung tinggi dengan cepat menuju tak-hingga. Disamping itu, untuk nilai awal tertentu, penyelesaian akan terkonsentrasi di satu titik. Mengingat penyelesaian analitis tidak mudah diperoleh, maka metoda numerik menjadi salah satu jalan keluar untuk memahami perilaku penyelesaian.

Masalah penting dalam memperoleh penyelesaian numerik ialah bagaimana memperoleh penyelesaian numerik dapat menangkap penyelesaian analitis yang nilainya membumbung tinggi dengan sangat cepat, dengan kata lain skala waktu menjadi dominan. Serta menangkap konsentrasi penyelesaian di satu atau lebih tempat, dengan perkata lain skala ruang yang juga cepat.

SPD di atas diketahui memiliki keujudan waktu yang hingga untuk beberapa syarat awal tertentu [Le90], [WB93].

Karena penyelesaian analitis tidak diketahui, maka metoda numerik menjadi metoda alternatif untuk memperoleh jawaban. Sebagai upaya untuk memahami perilaku penyelesaian SPD di sekitar waktu akhir, maka metoda numerik digunakan.

Sebagai pembandingan kita tinjau penggunaan beda hingga dengan lebar simpul tetap. Perlu dicatat bahwa penggunaan beda hingga dengan lebar simpul tetap untuk memecahkan SPD memungkinkan perilaku konsentrasi penyelesaian gagal diperoleh, sebagaimana dilaporkan oleh [AB94]. Karenanya, dalam [BHR95] digunakan metoda beda hingga dengan simpul bergerak, keadaptifan yang dinamik sifatnya. Karenanya cukup menarik apabila metoda elemen hingga dengan simpul bergerak [BZ94] [VBFZ89] digunakan untuk memecahkan SPD dengan keujudan waktu hingga.

2. Metoda Elemen Hingga Simpul Bergerak

2.1. Perumusan Semi-Diskret Galerkin

Kita tinjau bentuk umum sistem parameter terdistribusi:

$$c(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (R(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x})) - Q(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x})$$

dengan daerah $W = [a, b], t > 0$. Fungsi R dan Q dapat dianggap secara berturut-turut sebagai fluks dan sumber. Dengan mentransformasikan koordinat ke bentuk Lagrangian, dengan menggunakan turunan total terhadap u :

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt}$$

diperoleh:

$$c(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}) (\frac{du}{dt} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt}) = \frac{\partial}{\partial x} (R(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x})) - Q(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x})$$

Misalkan $W_h(t) = [a = X_0, X_1(t), \dots, X_N(t), X_{(N+1)}(t) = b]$ menyatakan N simpul bergantung terhadap waktu. Dengan menggunakan metoda Galerkin, bentuk lagrangian diaproksimasi di atas $W_h(t)$. Dipilih fungsi coba dan fungsi test berbentuk linier bagian demi bagian. Untuk setiap elemen $[X_i(t), X_{(i+1)}(t)]$

digunakan kwadratur Gauss, sedangkan untuk turunan waktu digunakan lumping [BZ94].

2.2. Simpul Bergerak

Untuk menyelesaikan aproksimasi semi-diskret yang dihasilkan, diperlukan persamaan tambahan yang menentukan bagaimana gerak simpul $X_i(t)$, yang belum diketahui. Gerak simpul ini ditentukan secara implisit oleh persamaan:

$$(\tau n_i + n_i)/M_i = (\tau n_{(i+1)} + n_{(i+1)})/M_{(i+1)}$$

dengan $n_i = 1/(X_{(i+1)} - X_i) = 1/(DX)$ yang menyatakan kepekatan titik dan $M_i = (1 + (u_{(i+1)} - u_i)^2/(DX)^2)^{(1/2)}$ fungsi monitor titik.

Fungsi monitor tersebut menentukan bagaimana simpul X_i akan didistribusikan. Parameter τ berfungsi sebagai pemulus yang berfungsi agar tidak terjadi penempatan titik seketika manakala ditemui tanjakan yang curam pada penyelesaian numerik, dengan demikian menghindari osilasi temporal dari kisi-kisi sehingga menimbulkan galat yang cukup besar.

3. Algoritma Pengendali Waktu

Untuk pengaturan langkah waktu mendekati waktu ledak, digunakan cara yang serupa sebagaimana yang dipakai oleh Berger dan Kohn [BK88]. Digunakannya cara ini utamanya karena kesederhanaanya. Kedua, kita gunakan rutin DDASSL untuk integrasi aproksimasi semi-diskret, yang secara inheren memiliki pengaturan langkah waktu otomatis, maka ringkas kata kita dapat tetapkan waktu akhir perhitungan T_{end} lebih besar dari waktu ledak, yang sebenarnya tidak kita ketahui sama sekali.

Algoritma langkah waktunya ialah sebagai berikut:

1. Tetapkan $mL = \text{norm}(u(0), 8)$, $mU = M \times mL$, M_B
2. Selesaikan untuk maju ke muka untuk :
 $\text{norm}(u(t_k), \infty) \leq mU$
3. Jika $mU \geq M_B$ STOP
 lainnya:
 tukar : $mL = mU$; $mU = M \times mL$
 kembali ke langkah 2
 selesai

4. Hasil Numerik

Di sini akan dilaporkan hasil perhitungan untuk kasus $W = [0, 1]$ dengan syarat awal $u(0, x) = A \sin(\pi x)$, A konstanta. Pada awalnya ditetapkan kisi-kisi simpul yang seragam berjumlah $N = 41$. Sistem persamaan differensial diselesaikan dengan menggunakan rutin untuk masalah stiff dalam presisi

ganda DDASSL. Integrasi waktunya menggunakan Backward Differentiation Formulae (BDF), yang secara internal perhitungan Jakobian didekati dengan metoda beda hingga. Kita tetapkan toleransi galat waktu langkah lokal relatif dan absolut secara berturut-turut pada $rtol = 1.0E-7$ dan $atol = 1.0E-4$.

5. Kesimpulan

Telah disajikan keefektifan MEHSB dalam menyelesaikan masalah SPD yang memiliki singularitas waktu. Kelemahan metode langkah waktu yang diusulkan di atas baik kiranya bila memodifikasi fungsional di [Na76] sebagai alternatif pengaturan langkah waktu.

Ucapan Terima Kasih

Penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada AIDAB (Sekarang AusAID), Kementrian Perdagangan dan Urusan Luar Negeri Pemerintah Australia yang memungkinkan penulis melakukan penelitian di Department of Mathematics, School of Mathematical Sciences, The Australian National University.

Daftar Pustaka

- [AB94] L. Abia and C. J. Budd, Blow-up in uniform discretization of parabolic PDEs, cited in [BHR95]
- [BHR95] C. J. Budd, W. Huang and R. D. Russel, Moving mesh methods for problems with blow-up, SIAM J. Sci. Comp., to appear
- [BK88] M. Berger and R. V. Kohn, A rescaling algorithm for the calculation of blow-up solutions, Comm. Pure App. Math., v41, 841-863, 1988
- [BZ94] J. G. Blom and P. A. Zegeling, Algorithm 731: A moving-grid interface for systems of one-dimensional time dependent partial differential equations, ACM Trans. Math. Soft., v20(2), 194-219, 1994
- [Le90] H. A. Levine, The role of critical exponent in blow-up theorems, SIAM Rev., v32(2), 262-288, 1990
- [Na76] T. Nakagawa, Blowing-up of finite difference solution to $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u^2$, App. Math. Opt, v2(4), 336-350, 1976
- [VBFZ89] J. G. Verwer, J. G. Blom, R. M. Furzeland and P. A. Zegeling, A moving grid method for one dimensional partial differential equations based on method of lines, Adaptive Methods for Partial Differential Equations (J. E. Flaherty e.a. eds), SIAM, Philadelphia, 1989
- [WB93] R. O. Weber and S. I. Barry, Finite-time blow-up in reaction-diffusion equations, Math. Comput. Modelling, v18(10), 163-168, 1993