线性模型的稳健性与全误差计算（多元函数微分）

杨正瓴

天津大学 电气自动化与信息工程学院
天津市南开区卫津路 92 号，邮编: 300072，中国

prai@tju.edu.cn

<http://blog.sciencenet.cn/u/zlyang>

2021-03-26 试贴。

摘要：非线性模型或系统的稳健性，可以从多元函数微分（物理实验里的全误差计算公式）角度进行一定的说明。该微分公式里的偏导数，对于线性模型是固定的数值，并且独立于系统的自变量。所以，线性系统的误差具有相对确定的变化范围。而非线性系统的偏导数依赖于系统的自变量，会随着自变量的变化而变化。因此高阶非线性模型的误差可以具有更大的变化范围。相反，低阶非线性模型可以具有比线性模型更好的稳健性。

关键词：动力系统，稳健性，线性，非线性，误差，自变量，全误差，微分，偏导数

尽管非线性系统（动力系统）或模型有自身的重要性，但是在预测、控制等实际领域中，大量的实践和应用证实了线性模型的稳健性。如范剑青（Jianqing Fan）、姚琦伟（Qiwei Yao）的《Nonlinear Time Series: Nonparametric and Parametric Methods (Springer Series in Statistics)》里的 10.1.5 Nonlinear versus Linear Prediction 等。实际应用中的自动控制，目前仍然以线性 PID 为主导，其次是模糊控制（fuzzy control）。线性系统或模型的稳健性从何而来？

一、范剑青、姚琦伟 2003 年的证明

他们在专著《Nonlinear Time Series: Nonparametric and Parametric Methods》的第 448 页写到：

“But empirical studies indicate that linear methods often work well despite their simplicity, and the gain from nonlinear prediction is not always significant and sometimes is not even guaranteed; see §3.4.1 of Chatfield (2001) and the references therein. Although we should not take numerical comparisons on faith (see, §6.6.3 of Chan and Tong 2001), the robust performance of linear forecasting methods is undeniable. Since this issue has rarely been addressed explicitly in the literature, we provide an explanation below.”

在第 449 页有一个证明。“This illustrates that it is perfectly sensible to seek the best linear predictor for general stationary nonlinear time series. Furthermore, if the innovation has a small variance in its Wold decomposition, the linear prediction is reliable.”

二、全误差计算（多元函数微分）

对于多元连续实数函数 $y = f(x_i)$, $i=1,2,\dots,N$, N 是一个正整数，其全微分的计算公式为（这里假定 y 可导）

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial y}{\partial x_i} dx_i + \cdots + \frac{\partial y}{\partial x_N} dx_N$$

这也是物理实验中的全误差计算公式。受到 N 个因素或自变量 x_i 影响的因变量 y ，当各

个自变量 x_i 的测量误差在同一水平时候，考虑 x_i 的个数 N 越多，则 y 的误差 dy 越大。

而且，对于线性模型，上式里的各个偏导数为常数。因此 y 的误差 dy 具有确定的范围，而且独立于系统的自变量 x_i ，是 x_i 的误差 dx_i 的线性组合。

相反，对于非线性函数，各个偏导数的绝对值会随着自变量 x_i 的变化而变化。因此非线性系统的误差有可能超过线性系统，特别是对于高阶非线性函数。相反，某些低阶非线性模型可以具有超过线性模型的稳健性：与“相当”的线性模型相比，低阶非线性模型各个偏导数的数值可以具有更小的绝对值。亦即在某些条件下可以具有更好的稳健性。

稳健性（robust, robustness）分析是个复杂问题。这里从多元函数微分（多变量测量的全误差计算）角度给出一个侧面的说明：线性模型的偏导数独立于各个自变量，而且具有固定的数值。

参考资料：

- [1] Jianqing Fan, Qiwei Yao. Nonlinear time series: nonparametric and parametric methods [M]. New York: Springer Science+Business Media, Inc, 2003.
- [2] Sarah Bergbreite, 谢力 翻译. 从实践走向理论：二战后的自动控制[J]. 系统与控制纵横, 2020, 7(2): 11-30.
- [3] Yang Zheng-Ling, Liu Ya-Di, Zhu Xin-Shan, Chen Xi, Zhang Jun. Removing forecasting errors with white Gaussian noise after square root transformation[J]. Journal of Forecasting, 2016, 35(8): 741-750.